Baccalauréat S France Juin 2008

Exercice 1

1. $I = \int_1^{\mathrm{e}} \ln(x)dx$, $J = \int_1^{\mathrm{e}} g(x)dx$.

   a. $F(x) = x\ln(x) - x$, donc F est dérivable sur $]0\,;+\infty[$.
   De plus, $\forall x \in]0;+\infty[$, $F'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \dfrac{1}{x} - 1 = \ln(x) = f(x)$. Donc, F est bien une primitive de f.
   D'où, $I = \int_1^{\mathrm{e}} f(x)dx = [F(x)]_1^{\mathrm{e}} = F(\mathrm{e}) - F(1) = (\mathrm{e}\ln(\mathrm{e}) - \mathrm{e}) - (1 \times \ln(1) - 1) = 1$ car $\ln(\mathrm{e}) = 1$ et $\ln(1) = 0$.

   b. On remarque que $J = \int_1^{\mathrm{e}} 1 \times \ln^2(x)dx = \int_1^{\mathrm{e}} u'(x) \times v(x)dx$, avec $u(x) = x$ et $v(x) = \ln^2(x)$
   D'où, $J = [u(x)v(x)]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} u(x)v'(x)dx = [x\ln^2(x)]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} x \times \dfrac{2\ln(x)}{x}dx$.
   D'où, $J = [\mathrm{e}\ln^2(\mathrm{e}) - 1\ln^2(1)] - 2\int_1^{\mathrm{e}} \ln(x)dx$.
   D'où, $J = e - 2I$.

   c. On a vu que $I = 1$, donc, $J = \mathrm{e} - 2$.

   d. On a : $A = \int_1^{\mathrm{e}} (f(x) - g(x)dx = \int_1^{\mathrm{e}} f(x)dx - \int_1^{\mathrm{e}} g(x)dx = I - J = 3 - e$.
   Donc, $A = (3 - \mathrm{e})UA$.

2. Soit $x \in [1\,;2]$. M a pour coordonnées $(x\,; f(x))$ et N a pour coordonnées $(x\,; g(x))$.
   Donc, $MN = |f(x) - g(x)| = f(x) - g(x)$ car $f(x) - g(x) \geq 0$ sur $[1\,;\mathrm{e}]$. Donc, $MN = \ln(x) - \ln^2(x)$.
   On pose alors $d(x) = \ln(x) - \ln^2(x)$ pour x dans $[1\,;\mathrm{e}]$. La dérivée de d est alors : $d'(x)\dfrac{1}{x} - 2\dfrac{\ln(x)}{x} = \dfrac{1 - 2\ln(x)}{x}$.
   Comme $x > 0$, $d'(x)$ est du signe de $1 - 2\ln(x)$. On sait que $1 - 2\ln(x) \geq 0 \Longleftrightarrow \ln(x) \leq \dfrac{1}{2}$.
   D'où, $d'(x) \geq 0 \Longleftrightarrow x \leq \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$, ou encore, $d'(x) \Longleftrightarrow x \leq \sqrt{\mathrm{e}}$.
   d est donc croissante sur $[1\,;\sqrt{\mathrm{e}}]$ puis décroissante sur $[\sqrt{\mathrm{e}}\,;\mathrm{e}]$. d a donc un maximum en $x_0 = \sqrt{\mathrm{e}}$.
   La distance MN est donc maximale pour $x = \sqrt{\mathrm{e}}$.
   Cette distance maixmale est alors $d(\sqrt{\mathrm{e}}) = \dfrac{1}{4}$.

Exercice 2

$A(1,1,0)$, $B(1,2,1)$ et $C(3,-1,2)$.

1. **a.** Les points A, B et C ne sont pas alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

   Or, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Les coordonnées de ces vecteurs ne sont pas proportionnelles, donc ces vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les trois points A, B et C ne sont pas alignés.

   b. L'équation $2x+y-z-3=0$ est l'équation cartésienne d'un plan.
   On remarque, après un calcul simple, que les coordonnées de A, B et C vérifient bien cette équation.
   De plus, A, B et C ne sont pas alignés, donc ils définissent bien un plan.
   Donc, l'équation $2x+y-z-3=0$ est bien l'équation cartésienne du plan (ABC).

   c.

2. $(P) : x+2y-z-4=0$, et $(Q) : 2x+3y-2z-5=0$.

   On remarque que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (P).

   De même, $\overrightarrow{m}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (Q).

   Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les plans (P) et (Q) ne sont pas parallèles.
   Leur intersection est donc une droite $(D$.

   De plus, l'équation paramétrique $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -2+t \\ y & = & 3 \\ z & = & t \end{array}\right. \quad (t \in \mathbb{R})$ est bien celle d'une droite.

   On vérifie que pour tout $t \in \mathbb{R}$, le point M de coordonnées $(-2+t;3;t)$ appartient bien à (P) et à (Q), simplement en remplaçant ses coordoonées dans les équations cartésiennes des deux plans.

   Donc, la droite d'équation paramétrique $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -2+t \\ y & = & 3 \\ z & = & t \end{array}\right. \quad (t \in \mathbb{R})$ est incluse dans (P) et dans (Q).

   On sait que $(P)\cap(Q)$ est une droite (D), donc cette droite (D) a pour équation paramétrique

$$(P)\cap(Q)=(D) : \left\{\begin{array}{lcl} x & = & -2+t \\ y & = & 3 \\ z & = & t \end{array}\right. \quad (t \in \mathbb{R})$$

3. On sait que $(P)\cap(Q)$ est la droite (D) précédente. Donc, $(ABC)\cap(P)\cap(Q)=(ABC)\cap(D)$.
   Une équation cartésienne de (ABC) est $2x+y-z-3=0$ et une représentation paramétrique de (D) est $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -2+t \\ y & = & 3 \\ z & = & t \end{array}\right. \quad (t \in \mathbb{R})$.

   Donc, $(M(x;y;z)\in(A)\cap(D) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x+y-z-3=0 \\ \left\{\begin{array}{lcl} x & = & -2+t \\ y & = & 3 \\ z & = & t \end{array}\right. \quad (t\in\mathbb{R}) \end{array}\right.$

   D'où, en remplaçcant x, y et z par leurs expressions en fonction de t dans l'équation de (A), on a :

$$2(-2+t)+3-t-3=0 \Longleftrightarrow t=4$$

   Donc, $(A)\cap(D)$ contient un point unique qui correspond à $t=4$ dans l'équation paramètrique de (D).
   Ce point est $M(2\,;3\,;4)$.

Exercice 3

$\forall t \geq 0$, $P(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$ et $R(t) = P(X > t)$.

1. **Restitution organisée de connaissances**

   a. Pour tout $t \geq 0$, $R() = P(X > t) = 1 - P(X \leq t) = 1 - \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$.

   D'où, $R(t) = 1 - [-e^{-\lambda x}]_0^t = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t}$.

   b. $s \geq 0$.

   On sait que $P_{X>t}(X > t + s) = \dfrac{P(X > t \text{ et } X > t + s)}{P(X > t)}$.

   Or, $(X > t \text{ et } X > t + s) \Longleftrightarrow X > t + s$, donc $P_{X>t}(X > t + s) = \dfrac{P(X > t + s)}{P(X > t)} = \dfrac{R(t + s)}{R(t)}$.

   D'où, $P_{X>t}(X > t + s) = \dfrac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s}$.

   On a donc bien $P_{X>t}(X > t + s)$ qui ne dépend que de s, et pas de t.

2. $\lambda = 0,00026$.

   a. $P(X \leq 1000) = 1 - R(1000) = 1 - e^{-1000\lambda} = 1 - e^{-0,26}$, d'où .. $(P(X > 1000) = e^{-0.26}$.

   b. On veut donc $P_{X>1000}(X > 1000 + s)$ avec $s = 1000$.

   Donc, $P_{X>1000}(X > 2000) = R(1000) = e^{-0.26}$.

   c. De même, on veut $P_{X>2000}(X \leq 2000 + s)$ avec $s = 1000$.

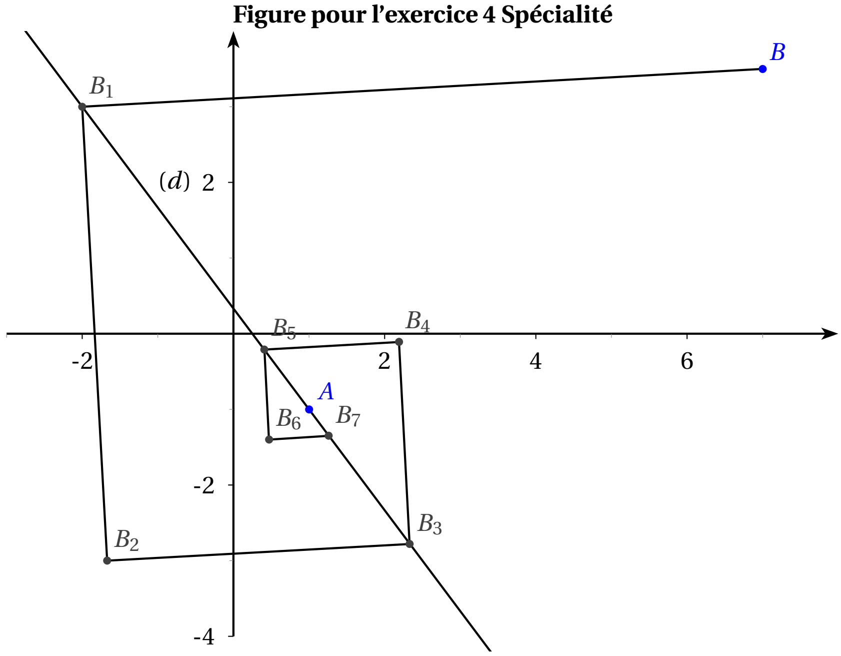
   Donc, $P_{X>2000}(X \leq 3000) = 1 - R(1000) = 1 - e^{-0.26}$.

   Ben ...oui .....on pouvait le prévoir ! C'est même le princpe de cette loi de probabilité !

Exercice 4 : Spécialité

1. (d) d'équation $4x+3y=1$.
On a une solution particuluère de l'équation $4y+3y=1$ avec x et y dans $\mathbb{Z}$. $x_0=1$ et $y_0=-1$.
Donc, $(x;y)$ est solution de $4x+3y=1$ si et seulement si $4x+3y=4x_0+3y_0$.
D'où, $(x;y)$ est solution si et seulement si $4(x-x_0)=3(y_0-y)$.
4 et 3 sont premiers entre eux, 4 divise $3(y_0-y)$, donc 4 divise (y_0-y). (Voir le Théorème de Gauss ....)
Donc si $(x;y)$ est solution alors il existe un entier relatif k tel que $4k=y_0-y$, c'est à dire, tel que $y=-4k-1$.
On remplace alors y ar $-4k-1$, dans l'équation, et on a alors $x=3k+1$.
Donc, pour toute solution de $4x+3y=1$ avec x et y dans $\mathbb{Z}$, il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $x=3k+1$ et $y=-4k-1$.
Réciproquement, on vérifie que pour tout $k\in\mathbb{Z}$, le couple $(3k+1\,;\,-4k-1)$ est bien solution de l'équation.
Donc, l'ensemble des solutions entières de $4x+3y=1$ est formé est des couples $(3k+1\,;\,-4k-1)$ avec $k\in\mathbb{Z}$.
Donc, les points à coordonnées entires de (d) sont les $M_k(3k+1\,;\,-4k-1)$, avec $k\in\mathbb{Z}$.
2. On pose z_a = affixe de A, z_b= affixe de B et z_m = affixe de M_1(-2 ; 3).
On sait qu'il une unique similitude directte S telle que $S(A)=A$ et $S(B)=M_{-1}$.
Posons $z'=\alpha z+\beta$ l'expression complexe de cette similitude. On a alors :
$$z_a=\alpha z_a+\beta$$
$$z_m=\alpha z_b+\beta$$
D'où , $\alpha=\dfrac{z_a-z_m}{z_a-z_b}=\dfrac{3-4\mathrm{i}}{-6-\frac{9}{2}\mathrm{i}}=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{3-4\mathrm{i}}{-4-3\mathrm{i}}=\dfrac{2}{3}\mathrm{i}$.
Or, $|\alpha|$ est le rapport de S et $\operatorname{Arg}(\alpha)$ est l'angle de S, donc, Rapport de $S=\dfrac{2}{3}$ et Angle de $S=\dfrac{\pi}{2}$.
3. On constante, après calcul, que l'image de s par la similitude donnée est A. Donc, A est invariant par s.
On remarque aussi que Rapport de $s=\dfrac{2}{3}$ et Angle de $s=\dfrac{\pi}{2}$.
Il s'agit donc de la même similitude que dans la question précédente !
4. $B_1=s(B)$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $B_{n+1}=s(B_n)$. On pose par commodités, $B_0=B$.
   a. s est de rapport $\dfrac{2}{3}$, $s(A)=A$ et $s(B_n)=B_{n+1}$, donc $AB_{n+1}=\dfrac{2}{3}AB_n$. La suite (AB_n) est donc géométrique de raison $q=\dfrac{2}{3}$.
   On a donc, $\forall n\in\mathbb{N}$, $AB_n=(\dfrac{2}{3})^n AB_0=(\dfrac{2}{3})^n AB$.
   On calcule alors $AB=|z_b-z_a|=\dfrac{15}{2}$. On en déduit alors que
   $$\forall n\in\mathbb{N},\ AB_n=\left(\frac{2}{3}\right)^n\times\frac{15}{2}=5\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$
   b. On en déduit que B_n appartient au disque de centre A et de rayon 10^{-2} si et seulement si $Ab_n\leq 10^{-2}$, c'est à dire, si et seulement si
   $$5\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\leq 10^{-2},\ \text{ce qui donne : } n-1\geq\frac{\ln(500)}{\ln(3/2)}\sim 15,32710947$$
   D'où, B_n appartient au disque de centre A et de rayon 10^{-2} si et seulement si $n\geq 17$.
   c. On remarque que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $B_n=s(B_{n-1})=s\circ s(B_{n-2})=\underbrace{s\circ s\circ s\circ\cdots\circ s}_{(n-1)...'s'}(B_1)=s^{(n-1)}(B_1)$.
   B_n est donc l'image de B_1 par la similitude directe $s^{(n-1)}$.
   Comme $\text{Angle}(s)=\dfrac{\pi}{2}$, on peut dire que $\text{Angle}(s^{(n-1)}=\dfrac{(n-1)\pi}{2}$.
   On peut aussi dire que $\text{Rapport}(s^{(n-1)}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$.
   A est le centre de s donc $s^{(n-1)}(A)=A$, donc A est le centre de $s^{(n-1)}$.
   Les points A, B_1 et B_n sont donc alignés si et seulement si $\text{Angle}(s^{(n-1)}=0$ modulo π.
   D'où, A, B_1 et B_n alignés si et seulement si $\dfrac{(n-1)\pi}{2}\equiv 0\,[\pi]$, ou encore, si et seulement si n impair.

Figure pour l'exercice 4 Spécialité



Exercice 4 : Non Spécialité$M' = f(M) \iff z' = z^2 - 4z$.

1. Voir le figure à la fin de l'exercice !
2. Un rapide calcul montre que $(1+\mathrm{i})^2 - 4(1+\mathrm{i}) = -4-2\mathrm{i}$, et $(3-\mathrm{i})^2 - 4(3-\mathrm{i})^2 = -4-2\mathrm{i}$.
   Donc, A' et B' ont même affixe qui est -4-2i. On a donc $A' = B'$.
3. Les points qui ont pour image le point d'affixe -5, on pour affixe z tel que $z^2 - 4z = -5$.
   D'où, l'équation à résoudre : $z^2 - 4z + 5 = 0$...Forme canonique ... $z^2 - 4z + 5 = (z-2)^2 + 1 = (z-2)^2 - \mathrm{i}^2$.
   D'où, $(z\text{-}2\text{-i})(z\text{-}2\text{+i})=0$ ..d'où il existe deux points ayant le point d'affixe -5 pour image !
   - M_1 d'affixe $z_1 = 2 + \mathrm{i}$
   - M_2 d'affixe $z_2 = 2 - \mathrm{i}$
4. **a.** $\forall z \in \mathbb{C}$, $z' + 4 = z^2 - 4z + 4 = (z+2)^2$ ..... c'est tout ce qu'il y a dire !

   b. On en déduit que $|z' + 4| = |z-2|^2$ et que Arg(z'+4) = 2Arg(z-2) modulo 2π.

   c. M décrit $\mathscr{C} \iff z - 2 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ où θ décrit l'intervalle $[0\,;\,2\pi[$.
   $z' + 4 = (z-2)^2$, donc, on a $z' + 4 = 4\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}$ où θ décrit $[0\,;\,2\pi[$, ou encore, $z' + 4 = 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}$ où β décrit $[0\,;\,\pi[$.
   Donc M' décrit le cercle $\mathscr{C}'$ de centre J d'affixe -4 et de rayon 4.
5. **a.** L'affixe de $\overrightarrow{IE}$ est $z_E - z_I = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$. Donc, $IE = 2$ et $(\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{IE}) = \dfrac{\pi}{3}$.

   b. E appartient à $\mathscr{C}$ donc, E' appartient au cercle $\mathscr{C}'$. (Voir question **4.c.**)
   Donc, comme J est le centre de $\mathscr{C}'$, on $JE' = 4$.
   De plus, d'après les questions **4.a et 4.b**, on a : $(\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{JE'}) = \dfrac{2\pi}{3}$

Figure pour l'exercice 4 Non-Spécialité