Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie mars 2008 (spécialité)

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur $]-\infty\ ;\ 6[$ par

$$f(x) = \frac{9}{6-x}$$

On définit pour tout entier naturel n la suite (U_n) par

$$\left\{\begin{array}{lcl} U_0 & = & -3 \\ U_{n+1} & = & f\left(U_n\right) \end{array}\right.$$

1. La courbe représentative de la fonction f est donnée sur la feuille jointe accompagnée de celle de la droite d'équation $y = x$. Construire, sur cette feuille annexe les points $M_0\left(U_0\ ;\ 0\right)$, $M_1\left(U_1\ ;\ 0\right)$, $M_2\left(U_2\ ;\ 0\right)$, $M_3\left(U_3\ ;\ 0\right)$ et $M_4\left(U_4\ ;\ 0\right)$.

Quelles conjectures peut-on formuler en ce qui concerne le sens de variation et la convergence éventuelle de la suite (U_n) ?

2. **a.** Démontrer que si $x < 3$ a alors $\dfrac{9}{6-x} < 3$.

En déduire que $U_n < 3$ pour tout entier naturel n.

b. Étudier le sens de variation de la suite (U_n).

c. Que peut-on déduire des questions 2. a. et 2. b. ?

3. On considère la suite (V_n) définie par $V_n = \dfrac{1}{U_n - 3}$ pour tout entier naturel n.

a. Démontrer que la suite (V_n) est une suite arithmétique de raison $-\dfrac{1}{3}$.

b. Déterminer V_n puis U_n en fonction de n.

c. Calculer la limite de la suite (U_n).

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

PARTIE A : Question de cours

Quelles sont les propriétés de compatibilité de la relation de congruence avec l'addition, la multiplication et les puissances ?

Démontrer la propriété de compatibilité avec la multiplication.

PARTIE B

On note 0, 1, 2, ..., 9, α, β, les chiffres de l'écriture d'un nombre en base 12. Par exemple :

$$\overline{\beta\alpha 7}^{12} = \beta \times 12^2 + \alpha \times 12 + 7 = 11 \times 12^2 + 10 \times 12 + 7 = 1\,711 \text{ en base } 10$$

1. **a.** Soit N_1 le nombre s'écrivant en base 12 :

$$N_1 = \overline{\beta 1 \alpha}^{12}$$

Déterminer l'écriture de N_1 en base 10.

b. Soit N_2 le nombre s'écrivant en base 10 :

$$N_2 = 1\,131 = 1 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 3 \times 10 + 1$$

Déterminer l'écriture de N_2 en base 12.

Dans toute la suite, un entier naturel N s'écrira de manière générale en base 12 :

$$N = \overline{a_n \cdots a_1 a_0}^{12}$$

2. **a.** Démontrer que $N \equiv a_0 \quad (3)$. En déduire un critère de divisibilité par 3 d'un nombre écrit en base 12.

b. À l'aide de son écriture en base 12, déterminer si N_2 est divisible par 3. Confirmer avec son écriture en base 10.

3. **a.** Démontrer que $N \equiv a_n + \cdots + a_1 + a_0 \quad (11)$. En déduire un critère de divisibilité par 11 d'un nombre écrit en base 12.

b. À l'aide de son écriture en base 12, déterminer si N_1 est divisible par 11. Confirmer avec son écriture en base 10.

4. Un nombre N s'écrit $\overline{x4y}^{12}$. Déterminer les valeurs de x et de y pour lesquelles N est divisible par 33.

EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

Deux éleveurs produisent une race de poissons d'ornement qui ne prennent leur couleur définitive qu'à l'âge de trois mois :

- pour les alevins du premier élevage, entre l'âge de deux mois et l'âge de trois mois, 10 % n'ont pas survécu, 75 % deviennent rouges et les 15 % restant deviennent gris.
- pour les alevins du deuxième élevage, entre l'âge de deux mois et l'âge de trois mois, 5 % n'ont pas survécu, 65 % divinnent rouges et les 30 % restant deviennent gris.

Une animalerie achète les alevins, à l'âge de deux mois : 60 % au premier éleveur, 40 % au second.

1. Un enfant achète un poisson le lendemain de son arrivée à l'animalerie, c'est-à-dire à l'âge de deux mois.

  a. Montrer que la probabilité que le poisson soit toujours vivant un mois plus tard est de $0,92$.

  b. Déterminer la probabilité qu'un mois plus tard le poisson soit rouge.

  c. Sachant que le poisson est gris à l'âge de trois mois, quelle est la probabilité qu'il provienne du premier élevage ?

2. Une personne choisit au hasard et de façon indépendante 5 alevins de deux mois. Quelle est la probabilité qu'un mois plus tard, seulement trois soient en vie ? On donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.

3. L'animalerie décide de garder les alevins jusqu'à l'âge de trois mois, afin qu'ils soient vendus avec leur couleur définitive. Elle gagne 1 euro si le poisson est rouge, $0,25$ euro s'il est gris et perd $0,10$ euro s'il ne survit pas.

Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique de l'animalerie par poisson acheté. Déterminer la loi de probabilité de X et son espérance mathématique, arrondie au centime.

EXERCICE 4 **5 points**

Commun à tous les candidats

L'espace est rapporté à un repère $\left(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ orthonormé. Soit t un nombre réel. On donne le point A$(-1\ ;\ 2\ ;\ 3)$ et la droite $\mathcal{D}$ de système d'équations paramétriques :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 9+4t \\ y & = & 6+t \\ z & = & 2+2t \end{array}\right.$$

Le but de cet exercice est de calculer de deux façons différentes la distance d entre le point A et la droite $\mathcal{D}$.

1. **a.** Donner une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$, perpendiculaire à la droite $\mathcal{D}$ et passant par A.

  b. Vérifier que le point B$(-3\ ;\ 3\ ;\ -4)$ appartient à la droite $\mathcal{D}$.

  c. Calculer la distance d_{B} entre le point B et le plan $\mathcal{P}$.

  d. Exprimer la distance d en fonction de d_{B} et de la distance AB. En déduire la valeur exacte de d.

2. Soit M un point de la droite $\mathcal{D}$. Exprimer AM^2 en fonction de t. Retrouver alors la valeur de d.

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Soit OABC un tétraèdre trirectangle (les triangles OAB, OBC, OCA sont rectangles en O). On note H le projeté orthogonal de O sur le plan (ABC).

Le but de l'exercice est d'étudier quelques propriétés de ce tétraèdre.

1. **a.** Pourquoi la droite (OH) est-elle orthogonale à la droite (BC) ?
   Pourquoi la droite (OA) est-elle orthogonale à la droite (BC) ?

   b. Démontrer que les droites (AH) et (BC) sont orthogonales. On démontrera de façon anlogue que les droites (BH) et (AC) sont orthogonales. Ce résultat est ici admis.

   c. Que représente le point H pour le triangle ABC ?

2. L'espace est maintenant muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
   On considère les points A(1 ; 0 ; 0), B(0 ; 2 ; 0) et C(0 ; 0 ; 3).

   a. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

   b. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) passant par O et orthogonale au plan (ABC).

   c. Démontrer que le plan (ABC) et la droite (D) se coupent en un point H de coordonnées $\left(\dfrac{36}{49}\ ;\ \dfrac{18}{49}\ ;\ \dfrac{12}{49}\right)$.

3. **a.** Calculer la distance du point O au plan (ABC).

   b. Calculer le volume du tétraèdre OABC. En déduire l'aire du triangle ABC.

   c. Vérifier que le carré de l'aire du triangle ABC est égal à la somme des carrés des aires des autres faces de ce tétraèdre.

ANNEXE (à rendre avec la copie)