Baccalauréat S Pondichéry 16 avril 2008

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

1. Soit f la fonction définie sur $[1\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1}$ et soit H la fonction définie sur $[1\,;\,+\infty[$ par $H(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

a. Justifier que f et H sont bien définies sur $[1\,;\,+\infty[$

b. Quelle relation existe-t-il entre H et f ?

c. Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ du plan. Interpréter en termes d'aire le nombre $H(3)$.

2. On se propose, dans cette question, de donner un encadrement du nombre $H(3)$.

a. Montrer que pour tout réel $x > 0$, $\dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1} = x \times \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1 - \mathrm{e}^{-x}}$.

b. En déduire que $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 3\ln\left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}^3}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}}\right) - \int_1^3 \ln\left(1 - \mathrm{e}^{-x}\right)\,\mathrm{d}x$.

c. Montrer que si $1 \leqslant x \leqslant 3$, alors $\ln\left(1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right) \leqslant \ln\left(1 - \mathrm{e}^{-x}\right) \leqslant \ln\left(1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}^3}\right)$.

d. En déduire un encadrement de $\displaystyle\int_1^3 \ln\left(1 - \mathrm{e}^{-x}\right)\,\mathrm{d}x$ puis de $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Cet exercice contient une restitution organisée de connaissances.

Partie A

On suppose connus les résultats suivants :

1. Dans le plan complexe, on donne par leurs affixes z_A, z_B et z_C trois points A, B et C.
Alors $\left|\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right| = \dfrac{CB}{CA}$ et $\arg\left(\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = \left(\overrightarrow{CA},\ \overrightarrow{CB}\right) \quad (2\pi)$.

2. Soit z un nombre complexe et soit θ un réel :
$z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ si et seulement si $|z| = 1$ et $\arg(z) = \theta + 2k\pi$, où k est un entier relatif.

Démonstration de cours : démontrer que la rotation r d'angle α et de centre Ω d'affixe ω est la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que

$$z' - \omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}(z - \omega).$$

Partie B

Dans un repère orthonorrnal direct du plan complexe $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives

$$z_A = -\sqrt{3} - \mathrm{i},\ z_B = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3},\ z_C = \sqrt{3} + \mathrm{i} \text{ et } z_D = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}.$$

1. **a.** Donner le module et un argument pour, chacun des quatre nombres complexes z_A, z_B, z_C et z_D.

b. Comment construire à la règle et au compas les points A, B, C et D dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$?

c. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

2. On considère la rotation r de centre B et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$. Soient E et F les points du plan définis par : $E = r(A)$ et $F = r(C)$.

a. Comment construire à la règle et au compas les points F et E dans le repère précédent ?

b. Donner l'écriture complexe de r.

c. Déterminer l'affixe du point E.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

On suppose connu le résultat suivant :

Une application f du plan muni d'un repère orthonormal direct dans lui-même est une similitude directe si et seulement si f admet une écriture complexe de la forme $z' = az + b$, où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

Démonstration de cours : on se place dans le plan complexe. Démontrer que si A, B, A' et B' sont quatre points tels que A est distinct de B et A' est distinct de B', alors il existe une unique similitude directe transformant A en A' et B en B'.

Partie B

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonomal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ on considère les points A, B, C, D d'affixes respectives

$$z_A = -\sqrt{3} - \text{i},\ z_B = 1 - \text{i}\sqrt{3},\ z_C = \sqrt{3} + \text{i} \text{ et } z_D = -1 + \text{i}\sqrt{3}.$$

1. **a.** Donner le module et un argument-de chacun des quatre nomlres complexes z_A, z_B, z_C et z_D.

b. Construire à la règle et au compas les points A, B, C et D (on prendra pour unité graphique 2 cm).

c. Déterminer le milieu du segment $[AC]$, celui du segment $[BD]$. Calculer le quotient $\dfrac{z_B}{z_A}$. En déduire la nature du quadrilatère $ABCD$.

2. On considère la similitude directe g dont l'écriture complexe est $z' = \text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{3}} z + 2$.

a. Déterminer les éléments caractéristiques de g.

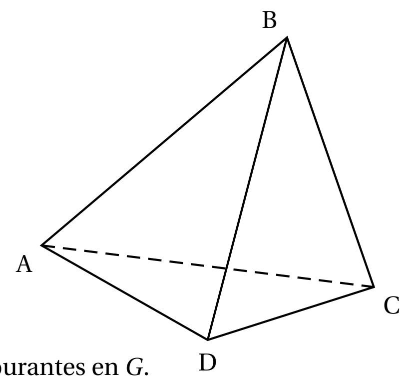
b. Construire à la règle et au compas les images respectives E, F et J par g des points A, C et O.

c. Que constate-t-on concernant ces points E, F et J ? Le démontrer.

EXERCICE 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

On considère un tétraèdre $ABCD$.
On note I, J, K, L, M, N les milieux respectifs des arêtes $[AB]$, $[CD]$, $[BC]$, $[AD]$, $[AC]$ et $[BD]$.
On désigne par G l'isobarycentre des points A, B, C et D.



1. Montrer que les droites (IJ), (KL) et (MN) sont concourantes en G.

Dans la suite de l'exercice, on suppose que $AB = CD$, $BC = AD$ et $AC = BD$.
(On dit que le tétraèdre $ABCD$ est équifacial, car ses faces sont isométriques).

2. **a.** Quelle est la nature du quadrilatère $IKJL$? Préciser également la nature des quadrilatères $IMJN$ et $KNLM$.

b. En déduire que (IJ) et (KL) sont orthogonales. On admettra que, de même, les droites (IJ) et (MN) sont orthogonales et les droites (KL) et (MN) sont orthogonales.

3. **a.** Montrer que la droite (IJ) est orthogonale au plan (MKN).

b. Quelle est la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{MK}$? En déduire que (IJ) est orthogonale à la droite (AB).
Montrer de même que (IJ) est orthogonale à la droite (CD).

c. Montrer que G appartient aux plans médiateurs de $[AB]$ et $[CD]$.

d. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Comment démontrerait-on que G est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre $ABCD$?

EXERCICE 4 **7 points**

Commun à tous les candidats

On cherche à modéliser de deux façons différentes l'évolution du nombre, exprimé en millions, de foyers français possédant un téléviseur à écran plat, en fonction de l'année.

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A : un modèle discret

Soit u_n le nombre, exprimé en millions, de foyers possédant un téléviseur à écran plat l'année n.
On pose $n = 0$ en 2005, $u_0 = 1$ et, pour tout $n \geqslant 0$,

$$u_{n+1} = \frac{1}{10} u_n (20 - u_n).$$

1. Soit f la fonction définie sur $[0\,;20]$ par

$$f(x) = \frac{1}{10} x(20 - x).$$

a. Étudier les variations de f sur $[0\,;20]$.

b. En déduire que pour tout $x \in [0\,;\,20]$, $f(x) \in [0\,;\,10]$.

c. On donne en **annexe** la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f dans un repère orthonormal.
Représenter, sur l'axe des abscisses, à l'aide de ce graphique, les cinq premiers termes de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 10$.

3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente et déterminer sa limite.

Partie B : un modèle continu

Soit $g(x)$ le nombre, exprimé en millions, de tels foyers l'année x.
On pose $x = 0$ en 2005, $g(0) = 1$ et g est une solution, qui ne s'annule pas sur $[0\,;\,+\infty[$, de l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}) \quad ; \quad y' = \frac{1}{20} y(10 - y)$$

1. On considère une fonction y qui ne s'annule pas sur $[0\,;\,+\infty[$ et on pose $z = \dfrac{1}{y}$.

a. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution de l'équation différentielle :

$$(\mathrm{E}_1) \quad : \quad z' = -\frac{1}{2} z + \frac{1}{20}.$$

b. Résoudre l'équation (E_1) et en déduire les solutions de l'équation (E).

2. Montrer que g est définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{10}{9\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} + 1}$.

3. Étudier les variations de g sur $[0\,;\,+\infty[$.

4. Calculer la limite de g en $+\infty$ et interpréter le résultat.

5. En quelle année le nombre de foyers possédant un tel équipement dépassera-t-il 5 millions ?

ANNEXE

À rendre avec la copie