∽ Baccalauréat S 2006 ∾

L'intégrale de septembre 2003 à juin 2004

Pour un accès direct cliquez sur les liens bleus

Baccalauréat S Antilles–Guyane septembre 2003

EXERCICE 1 **5 points**

Une association organise des promenades en montagne. Douze guides emmènent chacun, pour la journée, un groupe de personnes dès le lever du Soleil. L'été il y a plus de demandes que de guides et chaque groupe doit s'inscrire la veille de la promenade.
Mais l'expérience des dernières années prouve que la probabilité que chacun des groupes inscrits ne se présente pas au départ de la promenade est égale à $\frac{1}{8}$. On admettra que les groupes inscrits se présentent indépendamment les uns des autres.
Les probabilités demandées seront arrondies au 100^{e} *le plus proche.*

1. **a.** Montrer que la probabilité qu'un jour donné les 12 groupes inscrits soient tous présents est comprise entre 0,20 et 0,21.

   b. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de jours où les 12 groupes inscrits se sont tous présentés au départ lors d'un mois de 30 jours. Montrer que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

   Donner la signification des évènements $X = 30$ puis $X = 0$ et calculer la probabilité de ces évènements.

   Préciser l'espérance mathématique $\text{E}(X)$

   Quelle signification peut-on donner à ce résultat ?

   c. Une somme de 1 Crédit (la monnaie locale) est demandée à chaque groupe pour la journée. Cette somme est réglée au départ de la promenade.

   Dans le cas où un groupe ne se présente pas au départ, l'association ne gagne évidemment pas le Crédit que ce groupe aurait versé pour la journée.

   On nomme S la variable aléatoire égale à la somme, en Crédits, perçue par l'association un jour donné.

   Calculer la probabilité de l'évènement $[S = 11]$.

   Préciser l'espérance mathématique de S.

2. **a.** Agacé par le nombre de guides inemployés, le dirigeant de l'association décide de prendre chaque jour une réservation supplémentaire. Évidemment si les 13 groupes inscrits se présentent, le 13^{e} groupe sera dirigé vers une activité de substitution. Toutefois, cette activité de remplacement entraîne une dépense de 2 Crédits à l'association.

   Quelle est a probabilité P_{13} qu'un jour donné il n'y ait pas de désistement, c'est-à-dire que les 13 groupes inscrits la veille se présentent au départ de la promenade ?

   b. Soit R la variable aléatoire égale au coût de l'activité de substitution.

   Préciser la loi de la variable aléatoire R et calculer son espérance mathématique.

   c. Montrer que le gain moyen obtenu pour chaque jour est :

$$\left(\sum_{k=0}^{13} k \cdot \binom{k}{13} \left(\frac{7}{8}\right)^{k} \left(\frac{1}{8}\right)^{13-k}\right) - 2\text{P}_{13}.$$

   Calculer ce gain.

   d. La décision du dirigeant est-elle rentable pour l'association ?

EXERCICE 2 **4 points**

Enseignement obligatoire

Soient A, B deux points distincts fixés d'un cercle $\mathscr{C}$ de centre I et M un point quelconque de ce cercle $\mathscr{C}$.

1. Le point D est défini par $\overrightarrow{\text{IA}} + \overrightarrow{\text{IB}} + \overrightarrow{\text{I}M} = \overrightarrow{\text{I}D}$.

a. Prouver que les produits scalaires $\overrightarrow{\text{A}D} \cdot \overrightarrow{\text{B}M}$ et $\overrightarrow{\text{B}D} \cdot \overrightarrow{\text{A}M}$ sont nuls.
En déduire à quelles droites particulières du triangle ABM le point D appartient puis préciser la nature du point D pour le triangle AMB.

b. Soit G l'isobarycentre des points A, B, M. Exprimer $\overrightarrow{\text{I}D}$ en fonction de $\overrightarrow{\text{I}G}$.

2. Dans le plan complexe, rapporté à un repère otthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on donne les points A, B, I d'affixes respectives $z_\text{A} = 2$, $z_\text{B} = 4 + 2\text{i}$ et $z_\text{I} = 4$. On nomme f l'application qui, à tout point M du plan d'affixe z, associe le point M' d'affixe Z tel que $Z = \dfrac{1}{3}z + 2 + \dfrac{2}{3}\text{i}$.

a. Montrer qu'il existe un unique point Ω tel que $f(\Omega) = \Omega$ et calculer l'affixe ω de ce point.
Pour tout point d'affixe z, exprimer alors $Z - \omega$ en fonction de $z - \omega$.
Préciser la nature de l'application f.

b. M étant un point quelconque d'affixe z_M, montrer que l'image par l'application f du point M est l'isobarycentre G d'affixe z_G des points A, B, M.

c. Déterminer l'ensemble des points G lorsque le point M décrit le cercle $\mathscr{C}$ de centre I et de rayon 2.

d. En déduire alors, à l'aide du résultat de la question **1 b**, l'ensemble décrit par le point D défini par $\overrightarrow{\text{I}D} = \overrightarrow{\text{IA}} + \overrightarrow{\text{IB}} + \overrightarrow{\text{I}M}$ lorsque le point M parcourt le cercle $\mathscr{C}$ de centre I et de rayon 2.

EXERCICE 2 **4 points**

Enseignement de spécialité

Soit l'équation (1) d'inconnue rationnelle x :

$$78x^3 + ux^2 + vx - 14 = 0.$$

où u et v sont des entiers relatifs.

1. On suppose dans cette question que $\dfrac{14}{39}$ est solution de l'équation (1).

a. Prouver que les entiers relatifs u et v sont liés par la relation
$14u + 39v = 1\ 129$.

b. Utiliser l'algorithme d'Euclide, en détaillant les diverses étapes du calcul, pour trouver un couple $(x\ ;\ y)$ d'entiers relatifs vérifiant l'équation
$14x + 39y = 1$.

Vérifier que le couple $(-25\ ;\ 9)$ est solution de cette équation.

c. En déduire un couple $(u_0\ ;\ v_0)$ solution particulière de l'équation $14u + 39v = 1\ 129$.

Donner la solution générale de cette équation c'est-à-dire l'ensemble des couples $(u\ ;\ v)$ d'entiers relatifs qui la vérifient.

d. Déterminer, parmi les couples $(u\ ;\ v)$ précédents, celui pour lequel le nombre u est l'entier naturel le plus petit possible.

2. **a.** Décomposer 78 et 14 en facteurs premiers.
En déduire, dans $\mathbb{N}$, l'ensemble des diviseurs de 78 et l'ensemble des diviseurs de 14.

b. Soit $\dfrac{P}{Q}$ une solution rationnelle de l'équation (1) d'inconnue x :

$$78x^3 + ux^2 + vx - 14 = 0 \quad \text{où} \quad u \quad \text{et} \quad v \quad \text{sont des entiers relatifs.}$$

Montrer que si P et Q sont des entiers relatifs premiers entre eux, alors P divise 14 et Q divise 78.

c. En déduire le nombre de rationnels, non entiers, pouvant être solutions de l'équation (1) et écrire, parmi ces rationnels, l'ensemble de ceux qui sont positifs.

PROBLÈME — 10 points

Partie A - Étude préliminaire d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = (2-x)\mathrm{e}^x - 1$

1. Déterminer les limites de la fonction φ en $-\infty$ et $+\infty$.
2. Montrer que la fonction φ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et étudier le signe de sa dérivée.
   En déduire les variations de la fonction φ et préciser les valeurs de $\varphi(-2)$, $\varphi(0)$, $\varphi(1)$ et $\varphi(2)$.
3. Prouver que la fonction φ s'annule uniquement en deux valeurs que l'on nommera α et β. On prendra $\alpha < \beta$. Étudier alors le signe de la fonction φ sur l'ensemble des réels et récapituler cette étude dans un tableau.
4. À l'aide de la calculatrice, fournir un encadrement d'amplitude 10^{-2} des valeurs α et β.
5. Montrer que $\mathrm{e}^{\alpha} = \dfrac{1}{2-\alpha}$.

Partie B - Étude d'une fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x - x}$ et calcul intégral

1. Montrer que $\mathrm{e}^x - x$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. En déduire que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et $+\infty$.
3. Calculer la dérivée f' de la fonction f puis, à l'aide des résultats de la **partie A**, construire le tableau des variations de f.
4. Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha - 1}$, le nombre α étant la plus petite des deux valeurs pour lesquelles la fonction φ de la partie A s'annule.
5. Déterminer une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$. Donner une valeur exacte puis une valeur décimale approchée à 0,01 près de l'intégrale :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x - x}\,\mathrm{d}x.$$

Partie C - Étude de deux suites

1. Préciser l'ensemble de définition D_g de la fonction g définie sur cet ensemble par $g(x) = \ln\left(\dfrac{1}{2-x}\right)$ où ln désigne la fonction logarithme népérien.
   Prouver que la fonction g est croissante sur son ensemble de définition et que l'image par g de l'intervalle $\mathrm{I} = [-2\,;\,0]$ est incluse dans cet intervalle.
2. **a.** Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\left\{\begin{array}{lll} u_0 & = & -2 \\ u_{n+1} & = & g(u_n) \end{array}\right.$$

Montrer que u_1 appartient à l'intervalle I = $[-2\ ;\ 0]$. Prouver par récurrence, à l'aide des variations de la fonction g, que la suite (u_n) a tous ses termes dans l'intervalle I et est croissante.

b. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} v_0 & = & 0 \\ v_{n+1} & = & g\left(v_n\right) \end{array}\right.$$

Calculer le terme v_1 et montrer que $-2 \leqslant u_1 \leqslant v_1 \leqslant v_0 \leqslant 0$.

Établir par récurrence, à l'aide de la croissance de la fonction g sur l'intervalle $[-2\ ;\ 0]$, que pour tout entier naturel n strictement positif, on a :

$$-2 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_{n-1} \leqslant 0.$$

Préciser le sens de variation de la suite (v_n).

3. **a.** Soit m la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$m(x) = x - \ln(1+x).$$

Montrer que m est croissante et calculer $m(0)$. En déduire que, pour tout x positif, on a $\ln(1+x) \leqslant x$.

b. Vérifier que, pour tout entier n, $v_{n+1} - u_{n+1} = \ln\left(1 + \dfrac{v_n - u_n}{2 - v_n}\right)$.

En déduire que $v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \dfrac{v_n - u_n}{2 - v_n}$.

Sachant que, pour tout entier n, les termes de la suite (v_n) appartiennent à l'intervalle $[-2\ ;\ 0]$, donner un encadrement de $\dfrac{1}{2 - v_n}$ et établir que :

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}\left(v_n - u_n\right).$$

Prouver alors que, pour tout entier naturel n,

$$v_n - u_n \leqslant \frac{1}{2^n}\left(v_0 - u_0\right).$$

Que peut-on en déduire pour la suite de terme général $v_n - u_n$ et pour les suites (u_n) et (v_n) ?

4. Donner, à l'aide de la calculatrice, un encadrement d'amplitude 10^{-4} de u_{10} et v_{10}.

Baccalauréat France série S septembre 2003

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Le plan complexe est rapporte à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

On considère les points A et Ω d'affixes respectives : $a = -1 + \sqrt{3} + \text{i}$ et $\omega = -1 + 2\text{i}$.

On appelle r la rotation de centre Ω et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$ et h l'homothétie de centre Ω et de rapport $-\dfrac{1}{2}$.

1. Placer sur une figure les points A et Ω, l'image B du point A par r, l'image C du point B par r et l'image D du point A par h.
2. On note b, c et d les affixes respectives des points B, C et D.

Le tableau ci-dessous contient une suite de 18 affirmations, dont chacune débute dans la première colonne et s'achève sur la même ligne colonne 2, colonne 3 ou colonne 4.

Le candidat doit se prononcer sur chacune de ces affirmations. Pour cela il doit remplir le tableau de la feuille annexe, en faisant figurer dans chacune des cases la mention VRAI ou FAUX (en toutes lettres).

1.	$\lvert a-\omega\rvert$	2	4	$\sqrt{3}-\text{i}$
2.	$\arg(a-\omega)$	$-\dfrac{5\pi}{6}$	$\dfrac{47\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{6}$

3.	$\left(\vec{v}, \overrightarrow{\Omega\text{C}}\right) =$	$\arg[(\omega-\text{i})]$	$-\left(\vec{v}, \overrightarrow{\text{C}\Omega}\right)$	$\dfrac{2\pi}{3}$
4.	$\omega =$	$\dfrac{1}{3}(a+b+c)$	$a+b+c$	$b-2\text{i}$

5.	$\dfrac{b-d}{a-d} =$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\text{i}$	$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\text{i}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}\text{i}$
6.	Le point D est	l'image de Ω par la translation de vecteur $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\text{A}\Omega}$	l'image de Ω par l'homothétie de centre A et de rapport $\dfrac{3}{2}$	l'image de Ω par la la rotation de centre B et d'angle $-\dfrac{\pi}{6}$

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Un commerce possède un rayon « journaux » et un rayon « souvenirs ». À la fin d'une journée, on trie les pièces de monnaie contenues dans les caisses de chaque rayon. On constate que la caisse du rayon « journaux » contient 3 fois plus de pièces de 1 € que celle du rayon « souvenirs ». Les pièces ont toutes le côté pile identique, mais le côté face differe et symbolise un des pays utilisant la monnaie unique. Ainsi, 40 % des pièces de 1 € dans la caisse du rayon « souvenirs » et 8 % de celle du rayon « journaux » portent une face symbolisant un pays autre que la France (on dira « face étrangère »).

1. Le propriétaire du magasin, collectionneur de monnaies, recherche les pièces portant une face étrangère. Pour cela il prélève au hasard et avec remise 20 pièces issues de la caisse « souvenirs ». On note X la variable aléatoire qui associe à chaque prélèvement le nombre de pièces portant une face « étrangère ».

a. Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale ; déterminer les paramètres de cette loi.

b. Calculer la probabilité qu'exactement 5 pièces parmi les 20 portent une face étrangère.

c. Calculer la probabilité qu'au moins 2 pièces parmi les 20 portent une face étrangère.

2. Les pièces de 1 € issues des deux caisses sont maintenant rassemblées dans un sac.
On prélève au hasard une pièce du sac.
On note S l'évènement « la pièce provient de la caisse souvenirs » et E l'évènement « la pièce porte une face étrangère ».

a. Déterminer P(S), $P_S(E)$; en déduire $P(S \cap E)$.

b. Démontrer que la probabilité que la pièce porte une face étrangère est égale à 0,16.

c. Sachant que cette pièce porte une face étrangère, déterminer la probabilité qu'elle provienne de la caisse « souvenirs ».

3. Dans la suite, la probabilité qu'une pièce choisie au hasard dans le sac porte une face étrangère est égale à 0,16.
Le collectionneur prélève n pièces (n entier supérieur ou égal à 2) du sac au hasard et avec remise.
Calculer n pour que la probabilité qu'il obtienne au moins une pièce portant une face étrangère soit supérieure ou égale à 0,9.

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité
On rappelle que 2 003 est un nombre premier.

1. a. Déterminer deux entiers relatifs u et v tels que :

$$123u + 2\ 003v = 1.$$

b. En déduire un entier relatif k_0 tel que :

$$123k_0 \equiv 1 \quad [2\ 003].$$

c. Montrer que, pour tout entier relatif x,

$$123x \equiv 456 \quad [2\ 003] \text{si et seulement si } x \equiv 456k_0 \quad [2\ 003].$$

d. Déterminer l'ensemble des entiers relatifs x tels que :

$$123x \equiv 456 \quad [2\ 003].$$

e. Montrer qu'il existe un unique entier n tel que :

$$1 \leqslant n \leqslant 2\ 002 \quad \text{et} \quad 123n \equiv 456 \quad [2003].$$

2. Soit a un entier tel que : $1 \leqslant a \leqslant 2\ 002$.

a. Déterminer :

$$\text{PGCD}(a,\ 2\ 003).$$

En déduire qu'il existe un entier m tel que :

$$am \equiv 1 \quad [2\ 003].$$

b. Montrer que, pour tout entier b, il existe un unique entier x tel que :

$$0 \leqslant x \leqslant 2\,002 \quad \text{et} \quad ax \equiv b \quad [2\,003].$$

PROBLÈME **10 points**

Commun à tous les candidats

Partie A : Une équation différentielle

On considère l'équation différentielle :

$$\text{(E)} \quad y' - 3y = \frac{-3\mathrm{e}}{\left(1+\mathrm{e}^{-3x}\right)^2}.$$

On donne une fonction φ dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-3x}\varphi(x)$.

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, exprimer $\varphi'(x) - 3\varphi(x)$ en fonction de $f'(x)$.
2. Déterminer f de sorte que φ soit solution de (E) sur $\mathbb{R}$ et vérifie $\varphi(0) = \dfrac{\mathrm{e}}{2}$.

Partie B : Étude d'une fonction

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{1-3x}}{1+\mathrm{e}^{-3x}}.$$

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$, puis étudier les variations de f.
2. Tracer $\mathscr{C}$.
3. Pour α réel non nul, on pose $I_\alpha = \displaystyle\int_0^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x$.
   a. Donner le signe et une interprétation graphique de I_α en fonction de α.
   b. Exprimer I_α en fonction de α.
   c. Déterminer la limite de I_α lorsque α tend vers $+\infty$.

Partie C : Étude d'une suite

On définit sur $\mathbb{N}^*$ la suite (u_n) par :

$$u_n = \int_0^1 f(x)\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}\,\mathrm{d}x, \text{ où } f \text{ est la fonction définie dans la } \textbf{partie B}.$$

On ne cherchera pas à calculer u_n.

1. **a.** Donner, pour tout n de $\mathbb{N}$, le signe de u_n.
   b. Donner le sens de variation de la suite (u_n).
   c. La suite (u_n) est-elle convergente ?
2. **a.** Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$

$$\mathrm{I}_1 \leqslant u_n \leqslant \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\mathrm{I}_1$$

   où I_1 est l'intégrale de la **partie B** obtenue pour α égal à 1.
   b. En déduire la limite de la suite (u_n).
   Donner sa valeur exacte.

Baccalauréat S Polynésie spécialité septembre 2003

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

L'espace est rapporté à un repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ orthonormé. Soit s un nombre réel.
On donne les points A (8 ; 0 ; 8), B (10 ; 3 ; 10) ainsi que la droite $\mathcal{D}$ d'équations paramétriques :

$$\left\{\begin{array}{rcr} x & = & -5+3s \\ y & = & 1+2s \\ z & = & -2s \end{array}\right.$$

1. **a.** Donner un système d'équations paramétriques de la droite Δ définie par A et B.

   b. Démontrer que $\mathcal{D}$ et Δ sont non coplanaires.

2. **a.** Le plan $\mathcal{P}$ est parallèle à $\mathcal{D}$ et contient Δ. Montrer que le vecteur $\vec{n}\,(2\,;\,-2\,;\,1)$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$. Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.

   b. Montrer que la distance d'un point quelconque M de $\mathcal{D}$ à $\mathcal{P}$ est indépendante de M.

   c. Donner un système d'équations paramétriques de la droite définie par l'intersection de $\mathcal{P}$ avec le plan $(x\text{O}y)$.

3. La sphère $\mathcal{S}$ est tangente à $\mathcal{P}$ au point C(10 ; 1 ; 6). Le centre Ω de $\mathcal{S}$ se trouve à la distance $d = 6$ de $\mathcal{P}$, du même côté que O.
   Donner l'équation cartésienne de $\mathcal{S}$.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On désigne par p un nombre entier premier supérieur ou égal à 7.
Le but de l'exercice est de démontrer que l'entier naturel $n = p^4 - 1$ est divisible par 240, puis d'appliquer ce résultat.

1. Montrer que p est congru à -1 ou à 1 modulo 3. En déduire que n est divisible par 3.
2. En remarquant que p est impair, prouver qu'il existe un entier naturel k tel que $p^2 - 1 = 4k(k+1)$, puis que n est divisible par 16.
3. En considérant tous les restes possibles de la division euclidienne de p par 5, démontrer que 5 divise n.
4. **a.** Soient a, b et c trois entiers naturels.
   Démontrer que si a divise c et b divise c, avec a et b premiers entre eux, alors ab divise c.

   b. Déduire de ce qui précède que 240 divise n.
5. Existe-t-il quinze nombres premiers p_1, $p_2, \ldots,$ p_{15} supérieurs ou égaux à 7 tels que l'entier $A = p_1^4 + p_2^4 + \ldots + p_{15}^4$ soit un nombre premier ?

PROBLÈME **10 points**

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par :

$$\left\{\begin{array}{l c l}f(0) &=& 1\\ f(x) &=& \dfrac{1}{2}x^2(3-2\ln x)+1 \quad \text{si} \quad x>0\end{array}\right.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

Partie A

1. a. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$. Que peut-on en déduire pour la fonction f ?
   b. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. a. Étudier la dérivabilité de f en 0.
   b. Montrer que f est dérivable sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ et calculer $f'(x)$ pour $x>0$, f' désignant la fonction dérivée de f.
3. Étudier le sens de variations de f sur $[0~;~+\infty[$, puis dresser son tableau de variations.
4. Montrer que l'équation $f(x)=0$ possède une solution unique α sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$. Déterminer une valeur approchée décimale de α à 10^{-2} près.

Partie B

1. Calculer une équation de la tangente $\mathscr{D}$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $x = 1$.
2. On considère la fonction $g~:~x \longmapsto f(x)-2x-\dfrac{1}{2}$ définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
   a. Calculer $g'(x)$, puis $g''(x)$ où g' et g'' désignent respectivement les fonctions dérivées première et seconde de g. Étudier le sens de variations de g'. En déduire le signe de $g'(x)$ sur $]0~;~+\infty[$
   b. Étudier le sens de variations de g.
   En déduire la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la tangente $\mathscr{D}$.
3. Construire la courbe $\mathscr{C}$ et la tangente $\mathscr{D}$ (unité graphique : 2 cm).

Partie C

1. n est un entier naturel non nul.
   Exprimer en fonction de n le réel $I_n = \displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1} x^2 \ln x\,\text{d}x$ (on pourra utiliser une intégration par parties).
2. En déduire en fonction de l'entier n, l'aire $\mathscr{A}_n$ exprimée en cm^2 du domaine plan délimité par la courbe $\mathscr{C}$, la tangente $\mathscr{D}$ et les deux droites d'équation $x=\dfrac{1}{n}$ et $x=1$.
3. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathscr{A}_n$ et interpréter le résultat obtenu.

Baccalauréat Amérique du Sud série S novembre 2003

Exercice 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Un sac contient 4 jetons numérotés respectivement $-1,\ 0,\ 0,\ 1$ et indiscernables au toucher.

On tire un jeton du sac, on note son numéro x et on le remet dans le sac ; on tire un second jeton, on note son numéro y et on le remet dans le sac ; puis on tire un troisième jeton, on note son numéro z et on le remet dans le sac.

Tous les jetons ont la même probabilité d'être tirés.

À chaque tirage de trois jetons, on associe, dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ le point M de coordonnées $(x,\ y,\ z)$.

Sur le graphique joint en annexe page 6, sont placés les 27 points correspondant aux différentes positions possibles du point M. Les coordonnées du point A sont $(1\ ;\ -1\ ;\ -1)$ dans le repère $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.

On note $\mathscr{C}$ le cube ABCDEFGH.

1. Démontrer que la probabilité que le point M soit en A est égale à $\dfrac{1}{64}$.
2. On note E_1 l'évènement : « M appartient à l'axe des abscisses ».

   Démontrer que la probabilité de E_1 est égale à $\dfrac{1}{4}$.
3. Soit $\mathscr{P}$ le plan passant par O et orthogonal au vecteur $\vec{n}\,(1\ ;\ 1\ ;\ 1)$.

   a. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$.

   b. Tracer en couleur sur le graphique de la page 5, la section du plan $\mathscr{P}$ et du cube $\mathscr{C}$. (On ne demande pas de justification).

   c. On note E_2 l'évènement : « M appartient à $\mathscr{P}$ ».
   Quelle est la probabilité de l'évènement E_2 ?
4. On désigne par $\mathscr{B}$ la boule de centre O et de rayon 1,5 (c'est-à-dire l'ensemble des points M de l'espace tels que $\text{O}M \leqslant 1,5$).

   On note E_3 l'évènement : « M appartient à la boule $\mathscr{B}$ ».

   Déterminer la probabilité de l'évènement E_3.

Exercice 2 **5 points**

Enseignement obligatoire

Le plan complexe est muni d'un repèère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ (unité graphique 4 cm).

Soit I le point d'affixe 1. On note $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre [OI] et on nomme son centre Ω.

Partie I

On pose $a_0 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\text{i}$ et on note A_0 son image.

1. Montrer que le point A_0 appartient au cercle $\mathscr{C}$.
2. Soit B le point d'affixe b, avec $b = -1 + 2\text{i}$, et B' le point d'affixe b' telle que $b' = a_0 b$.

   a. Calculer b'.

   b. Démontrer que le triangle OBB' est rectangle en B'.

Partie II

Soit a un nombre complexe non nul et différent de 1, et A son image dans le plan complexe.

À tout point M d'affixe z non nulle, on associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = az$.

1. On se propose de déterminer l'ensemble des points A tels que le triangle OMM' soit rectangle en M'.

   a. Interpréter géométriquement $\arg\left(\dfrac{a-1}{a}\right)$.

   b. Montrer que $\left(\overrightarrow{M'\mathrm{O}}\,,\,\overrightarrow{M'M}\right) = \arg\left(\dfrac{a-1}{a}\right) + 2k\pi \quad (\text{où } k \in \mathbb{Z})$.

   c. En déduire que le triangle OMM' est rectangle en M' si et seulement si A appartient au cercle $\mathscr{C}$ privé de O et de I.

2. Dans cette question, M est un point de l'axe des abscisses, différent de O.
   On note x son affixe.
   On choisit a de manière que A soit un point de $\mathscr{C}$ différent de I et de O.
   Montrer que le point M' appartient à la droite (OA).
   En déduire que M' est le projeté orthogonal de M sur cette droite.

EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 1 cm).

On note r_1 la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ et r_2 la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{5}$.

Partie A

1. Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) : $3y = 5(15 - x)$.
2. Soit I le point d'affixe 1.
   On considère un point A mobile sur le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ de centre O.
   Sa position initiale est en I.
   On appelle d la distance, exprimée en centimètres, qu'a parcourue le point A sur le cercle $\mathscr{C}$ après avoir subi p rotations r_1 et q rotations r_2 (p et q étant des entiers naturels).
   On convient que lorsque A subit la rotation r_1 (respectivement r_2), il parcourt une distance de $\dfrac{\pi}{3}$ cm (respectivement $\dfrac{\pi}{5}$ cm).
   Déterminer toutes les valeurs possibles de p et q pour lesquelles le point A a parcouru exactement deux fois et demie la circonférence du cercle $\mathscr{C}$ à partir de I.

Partie B

On note h_1 l'homothétie de centre O et de rapport 4 et h_2 l'homothétie de centre O et de rapport -6. On pose $s_1 = r_1 \circ h_1$ et $s_2 = r_2 \circ h_2$.

1. Préciser la nature et les éléments caractéristiques de s_1 et s_2.
2. On pose :
   $S_m = s_1 \circ s_1 \cdots \circ s_1$ (composée de m fois s_1, m étant un entier naturel non nul),
   $S'_n = s_2 \circ s_2 \cdots \circ s_2$ (composée de n fois s_2, n étant un entier naturel non nul),
   et $f = S'_n s_1 \circ S_m$.

   a. Justifier que f est la similitude directe de centre O, de rapport $2^{2m+n} \times 3^n$ et d'angle $m\dfrac{\pi}{3} + n\dfrac{6\pi}{5}$.

b. f peut-elle être une homothétie de rapport 144 ?

c. On appelle M le point d'affixe 6 et M′ son image par f.
Peut-on avoir $\text{OM}' = 240$?
Démontrer qu'il existe un couple d'entiers naturels unique $(m,\ n)$ tel que $\text{OM}' = 576$.
Calculer alors la mesure principale de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{u}\,,\ \overrightarrow{\text{OM}'}\right)$.

PROBLÈME **11 points**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\text{e}^x + \text{e}^{-x}}$$

et on désigne par Γ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(\text{O},\ \overrightarrow{\imath}\,,\ \overrightarrow{\jmath}\right)$.

Partie A

1. Étudier la parité de f. Que peut-on en déduire pour la courbe Γ ?
2. Démontrer que, pour tout réel x positif ou nul, $\text{e}^{-x} \leqslant \text{e}^x$.
3. **a.** Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   b. Étudier les variations de f sur $[0,\ +\infty[$.
4. On considère les fonctions g et h définies sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{1}{\text{e}^x}$ et $h(x) = \dfrac{1}{2\text{e}^x}$.
   Sur l'annexe de la page 7 sont tracées, dans le repère $\left(\text{O},\ \overrightarrow{\imath}\,,\ \overrightarrow{\jmath}\right)$les courbes représentatives de g et h, notées respectivement Γ_1 et Γ_2.
   a. Démontrer que, pour tout réel x positif ou nul, $h(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$.
   b. Que peut-on en déduire pour les courbes Γ, Γ_1, et Γ_2 ?
   Tracer Γ sur l'annexe de la page 7, en précisant sa tangente au point d'abscisse 0.

Partie B

Soit (I_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $I_n = \displaystyle\int_n^{n+1} f(x)\,\text{d}x$.

1. Justifier l'existence de (I_n), et donner une interprétation géométrique de (I_n).
2. **a.** Démontrer, que pour tout entier naturel n, $f(n+1) \leqslant I_n \leqslant f(n)$.
   b. En déduire que la suite (I_n) est décroissante.
   c. Démontrer que la suite (I_n) est convergente et determiner sa limite.

Partie C

Soit (J_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $J_n = \displaystyle\int_0^n f(x)\,\text{d}x$.

1. En utilisant l'encadrement obtenu dans la question **A. 4. a.**, démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$\frac{1}{2}\left(1 - \text{e}^{-n}\right) \leqslant J_n \leqslant 1 - \text{e}^{-n} \leqslant 1.$$

2. Démontrer que la suite (J_n) est croissante.
   En déduire qu'elle converge.

3. On note L la limite de la suite (J_n) et on admet le théorème suivant :
« Si $u_n,\ v_n$ et w_n sont trois suites convergentes de limites respectives $a,\ b$ et c et si, à partir d'un certain rang on a pour tout $n,\ u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$, alors $a \leqslant b \leqslant c$ ».
Donner un encadrement de L.

4. Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$u(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

On note v la primitive de u sur $\mathbb{R}$ telle que $v(1) = \dfrac{\pi}{4}$.
On admet que la courbe représentative de v admet en $+\infty$ une asymptote d'équation $y = \dfrac{\pi}{2}$.

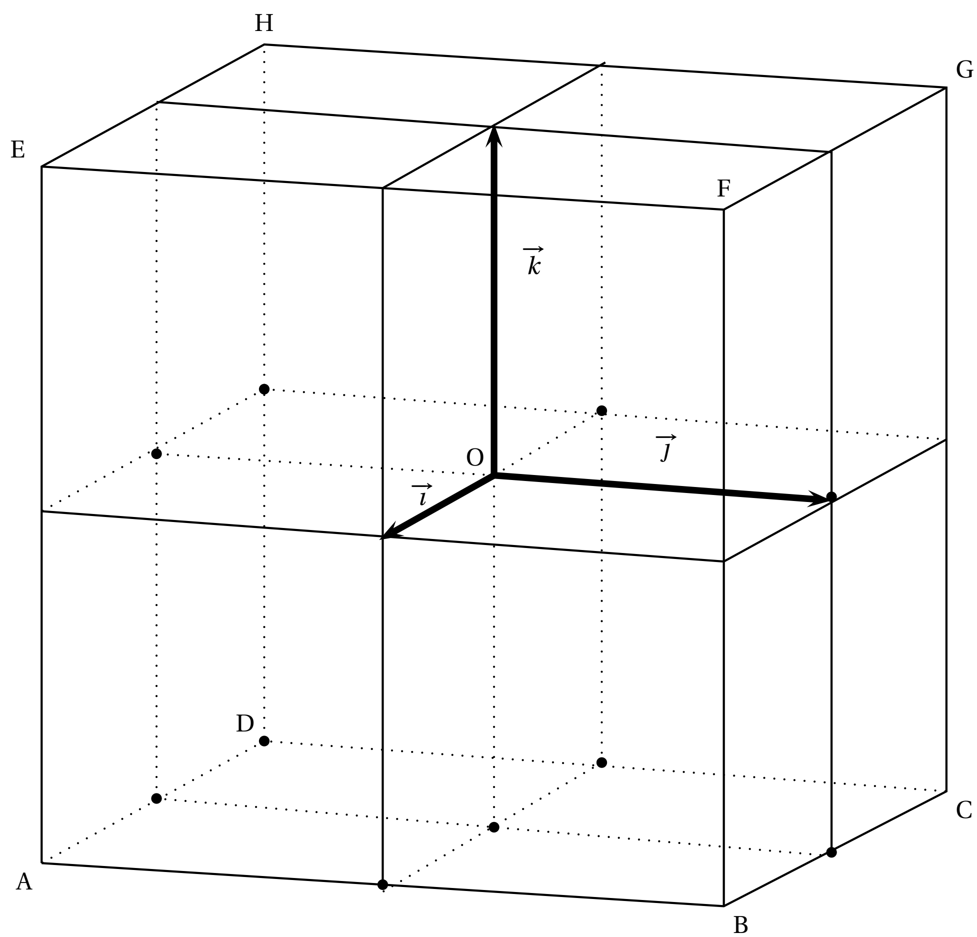
a. Démontrer que, pour tout réel $x,\ f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x)^2+1}$.

b. Démontrer que, pour tout réel $x,\ f$ est la dérivée de la fonction $x \longmapsto v\left(\mathrm{e}^x\right)$.

c. En déduire la valeur exacte de L.

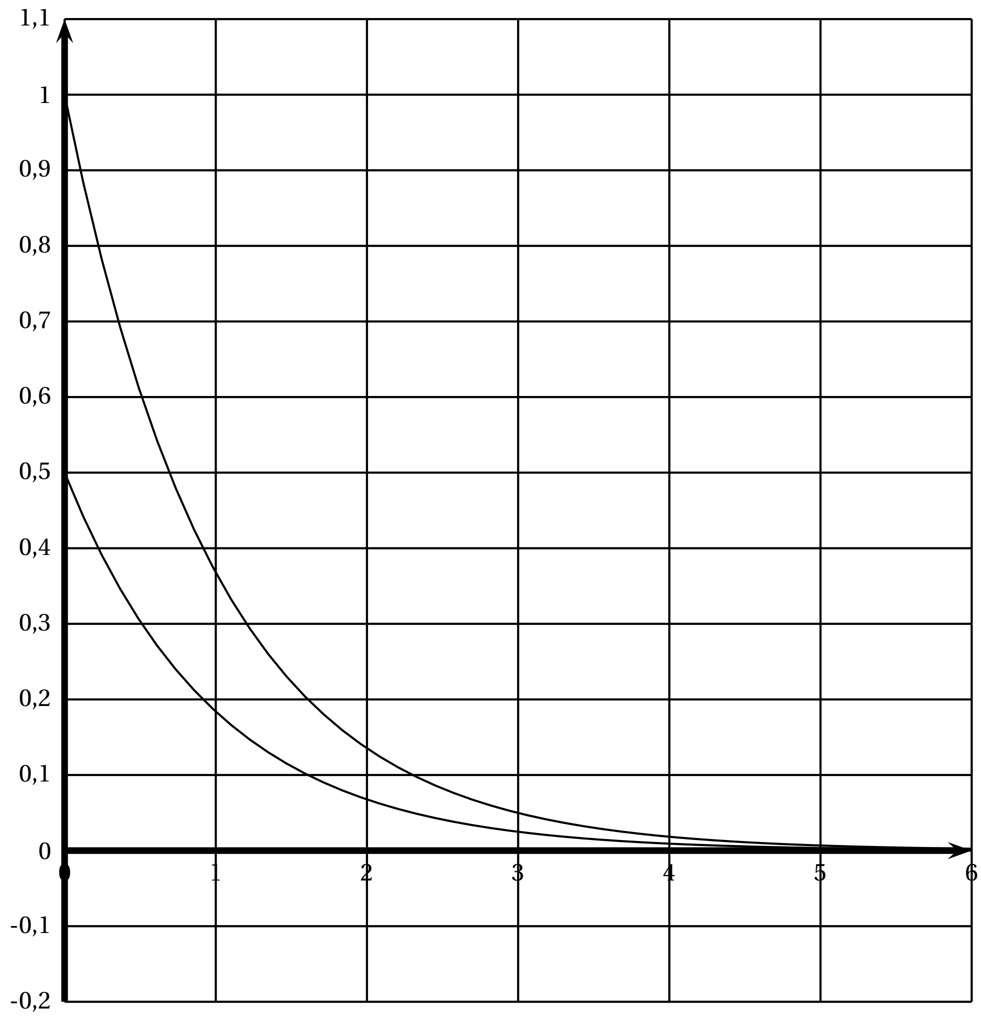
Annexe de l'exercice 1

Cette page sera complétée et remise avec la copie



Annexe du problème

Cette page sera complétée et remise avec la copie



Baccalauréat Nouvelle-Calédonie série S novembre 2003

Exercice 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

On observe sur une longue période le nombre d'accidents de scooters à un carrefour. Il est alors possible de proposer la modélisation suivante : pour n scooters franchissant le carrefour durant une année (n est un grand nombre inconnu), on admet que la variable aléatoire S_n qui totalise le nombre d'accidents de scooters à ce carrefour durant cette année suit une loi binomiale ; on estime que l'espérance mathématique de S_n notée $E(S_n)$ est égale â 10.

Soit p la probabilité pour un scooter d'être accidenté à ce carrefour pendant l'année considérée.

1. Calculer p, puis justifier l'égalité $P(S_n = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{10}{n}\right)^k\left(1-\frac{10}{n}\right)^{n-k}$ où k est un entier naturel tel que $0 \leqslant k \leqslant n$.

2. **a.** Établir l'égalité $\ln[P(S_n = 0)] = -10 \times \dfrac{\ln\left(1-\frac{10}{n}\right)}{\frac{-10}{n}}$ où ln désigne la fonction logarithme népérien ; en déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} P(S_n = 0) = e^{-10}$.

   b. Démontrer que $P(S_n = k+1) = P(S_n = k) \times \dfrac{n-k}{n-10} \times \dfrac{10}{k+1}$, où k est un entier naturel tel que $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

   c. Démontrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} P(S_n = k) = e^{-10}\dfrac{10^k}{k!}$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$, alors on a également $\lim\limits_{n\to+\infty} P(S_n = k+1) = e^{-10}\dfrac{10^{k+1}}{(k+1)!}$ pour $0 \leqslant k+1 \leqslant n$.

   d. Démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence sur l'entier naturel k que $\lim\limits_{n\to+\infty} P(S_n = k) = e^{-10}\dfrac{10^k}{k!}$ où k est un entier naturel tel que $0 \leqslant k \leqslant n$.

3. On suppose que le nombre n est suffisamment grand pour que l'on puisse admettre que $e^{-10}\dfrac{10^k}{k!}$ est une approximation acceptable de $P(S_n = k)$. Utiliser cette approximation pour calculer à 10^{-4} près la probabilité pour qu'au cours de cette année il y ait au moins trois accidents de scooters à ce carrefour.

Exercice 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$; on considère les points A(3 ; 0 ; 10), B(0 ; 0 ; 15) et C(0 ; 20 ; 0).

1. **a.** Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).

   b. Montrer que la droite (AB) coupe l'axe des abscisses au point E(9 ; 0 ; 0).

   c. Justifier que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. Soit H le pied de la hauteur issue de O dans le triangle OBC.

   a. Justifier que la droite (BC) est perpendiculaire au plan (OEH). En déduire que (EH) est la hauteur issue de E dans le triangle EBC.

   b. Déterminer une équation cartésienne du plan (OEH).

c. Vérifier que le plan (ABC) admet pour équation cartésienne

$$20x + 9y + 12z - 180 = 0.$$

d. Montrer que le système $\left\{\begin{array}{lll} x & = & 0 \\ 4y - 3z & = & 0 \\ 20x + 9y + 12z - 180 & = & 0 \end{array}\right.$ a une solution unique. Que représente cette solution ?

e. Calculer la distance OH, en déduire que EH = 15 et l'aire du triangle EBC.

3. En exprimant de deux façons le volume du tétraèdre OEBC, déterminer la distance du point O au plan (ABC). Pouvait-on prévoir le résultat à partir de l'équation obtenue en **2 c** ?

EXERCICE 2 — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. a. Soit p un entier naturel. Montrer que l'un des trois nombres $p,\ p+10$ et $p+20$, et l'un seulement est divisible par 3.

b. Les entiers naturels $a,\ b$ et c sont dans cet ordre les trois premiers terme d'une suite arithmétique de raison 10. Déterminer ces trois nombres sachant qu'ils sont premiers.

2. Soit E l'ensemble des triplets d'entiers relatifs $(u,\ v,\ w)$ tels que

$$3u + 13v + 23w = 0.$$

a. Montrer que pour un tel triplet $v \equiv w \pmod{3}$

b. On pose $v = 3k + r$ et $w = 3k' + r$ où $k,\ k'$ et r sont des entiers relatifs et $0 \leqslant r \leqslant 2$.

Montrer que les éléments de E sont de la forme :

$$(-13k - 23k' - 12r,\ 3k + r,\ 3k' + r).$$

c. l'espace est rapporté à un repère orthonormal d'origine O et soit P le plan d'équation $3x + 13y + 23z = 0$.

Déterminer l'ensemble des points M à coordonnées $(x,\ y,\ z)$ entières relatives appartenant au plan P et situés à l'intérieur du cube de centre O, de côté 5 et dont les arêtes sont parallèles aux axes.

PROBLÈME — 11 points

Les trois parties sont dans une large mesure indépendantes.

Pour tout entier naturel n, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction numérique f_n par :

$$f_0(x) = \frac{1}{1+x^2} \text{ et pour } n \text{ entier naturel non nul } f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^2}.$$

On note Γ_n, la courbe représentative de f_n, dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, unité graphique : 4 cm.

On désigne par I_n l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

Partie A

1. a. Étudier les limites de f_1 en $+\infty$ et en $-\infty$. Quelle est la conséquence graphique de ces résultats ?

b. Étudier les variations de f_1.

c. Tracer la courbe Γ_1.

d. Calculer I_1.

2. **a.** Étudier les limites de f_3 en $+\infty$.

b. Étudier les variations de f_3.

c. Tracer la courbe Γ_3 sur le même dessin qu'au **1. c.**.

3. Calculer $\mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_3$. En déduire la valeur de I_3.

4. Calculer, en unités d'aire, l'aire du domaine limité par les courbes Γ_1, Γ_3 et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

Partie B

Pour cette partie, on dessinera la figure demandée dans un nouveau repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, unité graphique : 4 cm.

1. **a.** Étudier les limites de f_0 en $+\infty$ et en $-\infty$.

b. Étudier les variations de f_0.

2. Soit (a_n) la suite définie, pour n entier naturel non nul, par $a_n = \displaystyle\int_0^n \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

a. Interpréter graphiquement a_n.

b. Montrer que la suite (a_n) est croissante.

c. Montrer que pour tout réel t : $\dfrac{1}{1+t^2} \leqslant 1$ et en déduire que $a_1 \leqslant 1$.

d. Montrer que pour tout réel t non nul : $\dfrac{1}{1+t^2} \leqslant \dfrac{1}{t^2}$ et en déduire que pour tout entier naturel non nul, $\displaystyle\int_1^n \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant 1 - \frac{1}{n}$.

e. Montrer, en utilisant les questions précédentes, que pour tout entier naturel n non nul, $a_n \leqslant 2$. Que peut-on en déduire pour la convergence de la suite (a_n) ?

Partie C

Soit F la fonction telle que :

$$F(0) = 0,\ F \text{ dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } F'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

1. On pose, pour tout x de $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$, $H(x) = F[\tan(x)]$.

a. Calculer $H(0)$.

b. Montrer que H est dérivable sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$ et calculer $H'(x)$.

c. En déduire que, pour tout x de $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$, $H(x) = x$.

d. Montrer que $F(1) = \dfrac{\pi}{4}$.

2. On pose, pour tout x réel positif ou nul, $k(x) = F\left(\dfrac{1}{x+1}\right) + F\left(\dfrac{x}{x+2}\right)$.

a. Montrer que la fonction k est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et déterminer $k'(x)$.

b. En déduire la valeur de $F\left(\dfrac{1}{2}\right) + F\left(\dfrac{1}{3}\right)$.

Baccalauréat S Nouvelle–Calédonie mars 2004

EXERCICE 1 **4 points**

Dans le plan complexe $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère le quadrilatère ABCD tel que :

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}\right) = \alpha \quad [2\pi], \left(\overrightarrow{\mathrm{CD}}, \overrightarrow{\mathrm{CB}}\right) = \beta \quad [2\pi],\ 0 < \alpha < \pi,\ 0 < \beta < \pi.$$

On construit les triangles équilatéraux DCP, DAQ, BAM et BCN tels que :

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{DC}}, \overrightarrow{\mathrm{DP}}\right) = \frac{\pi}{3} \quad [2\pi], \quad \left(\overrightarrow{\mathrm{DA}}, \overrightarrow{\mathrm{DQ}}\right) = \frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$$

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{BA}}, \overrightarrow{\mathrm{BM}}\right) = \frac{\pi}{3} \quad [2\pi] \quad \text{et} \quad \left(\overrightarrow{\mathrm{BC}}, \overrightarrow{\mathrm{BN}}\right) = \frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$$

Soit a, b, c et d les affixes respectives des points A, B, C et D, m, n, p et q les affixes respectives des points M, N, P et Q.

1. Démontrer les relations suivantes :

$$m = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(a-b)+b, \qquad n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(c-b)+b,$$

$$p = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(c-d)+d, \qquad q = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(a-d)+d.$$

2. En utilisant les relations précédentes :

a. Démontrer que MNPQ est un parallélogrammme.

b. Démontrer que l'on a :

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{AC}}, \overrightarrow{\mathrm{QP}}\right) = \frac{\pi}{3} \quad [2\pi], \quad \mathrm{AC} = \mathrm{QP}$$

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{NP}}, \overrightarrow{\mathrm{BD}}\right) = \frac{\pi}{3} \quad [2\pi], \quad \text{et} \quad \mathrm{NP} = \mathrm{BD}.$$

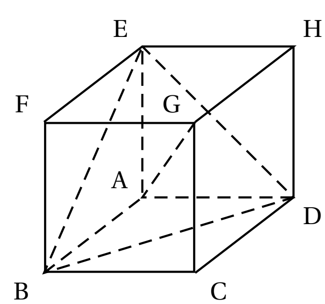
3. Démontrer que MNPQ est un carré si, et seulement si, les diagonales [AC] et [BD] du quadrilatère ABCD vérifient :

$$\mathrm{AC} = \mathrm{BD} \quad \text{et} \quad \left(\overrightarrow{\mathrm{AC}}, \overrightarrow{\mathrm{BD}}\right) = \frac{\pi}{6} + k\pi$$

où k est un entier relatif.

EXERCICE 2 **5 points**

On considère Ie cube ABCDEFGH ci-contre.
O_1 et O_2 sont Ies centres des carrés ABCD et EFGH, et I est Ie centre de gravité du triangle EBD.
Soit m un nombre réel et G_m le barycentre du système de points pondérés :



$$\{(\mathrm{E}\,;\,1),\ (\mathrm{B}\,;\,1-m),\ (\mathrm{G}\,;\,2m-1),\ (\mathrm{D}\,;\,1-m)\}$$

Partie A

1. Justifier l'existence du point G_m.
2. Préciser la position du point G_1.
3. Vérifier que $G_0 = A$. En déduire que les points A, I et G sont aIignés.
4. Démontrer que $\overrightarrow{AG_m} = m\overrightarrow{AO_2}$. En déduire l'ensemble des points G_m lorsque m parcourt l'ensemble des nombres réels.
5. **a.** Vérifier que les points A, G_m , E et O_1, sont coplanaires.
   b. Déterminer la valeur de m pour laquelle G_m se trouve sur la droite (EI).

Partie B
Dans cette question, l'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AE}\right)$.

1. Démontrer que la droite (AG) est orthogonale au plan (EBD). En déduire une équation cartésienne du plan ABD.
2. Déterminer les coordonnées du point G_m.
3. Pour quelles valeurs de m, la distance de G_m au plan (EBD) est-elle égale à $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$?

EXERCICE 3 **11 points**

Partie A Étude d'une fonction
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x] = 1 + e^{-x} - 2e^{-2x}$$

et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthogonal $\left(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, (unités graphiques : 3 cm sur l'axe des abscisses et 8 cm sur l'axe des ordonnées).

1. **a.** Soit Ie polynôme P défini sur $\mathbb{R}$ par $P(X) = 1 + X - 2X^2$.
   Étudier Ie signe de $P(X)$.
   b. En déduire Ie signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.
   c. Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?
2. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. Qu'en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?
3. Vérifier que $f(x) = e^{-2x}\left(e^{2x} + e^{x} - 2\right)$, puis déterminer la limite de f en $-\infty$.
4. **a.** Soit f' la fonction dérivee de la fonction f, calculer $f'(x)$.
   b. Montrer que $f'(x)$ a Ie même signe que $(4 - e^{x})$, puis étudier Ie signe de $f'(x)$.
   c. Dresser Ie tableau de variations de f. On montrera que Ie maximum est un nombre rationnel.
5. **a.** Démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 1$ n'ont qu'un point d'intersection A dont on déterminera les coordonnées.
   b. Étudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport a la droite $\mathscr{D}$.
6. Déterminer une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point A.
7. Tracer les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{T}$, puis la courbe $\mathscr{C}$.

Partie B Étude d'une suite

1. Calculer l'aire, en unités d'aire, de la partie de plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$ l'axe des ordonnées et la droite $\mathscr{D}$.

2. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \int_{(n-1)+\ln 2}^{n+\ln 2} \left[f(x) - 1\right]\,\mathrm{d}x.$$

a. Démontrer que la suite (u_n) est à termes positifs.

b. Donner une interprétation géométrique de (u_n).

3. **a.** En utilisant Ie sens de variation de f, montrer que, pour tout $n \geqslant 2$:
si $x \in [(n-1)+\ln 2\,;\ n+\ln 2]$ alors

$$f(n+\ln 2) - 1 \leqslant f(x) - 1 \leqslant f\left[(n-1)+\ln 2\right] - 1.$$

b. En déduire que, pour tout $n,\ n \geqslant 2$, on a :

$$f(n+\ln 2) - 1 \leqslant u_n \leqslant f\left[(n-1)+\ln 2\right] - 1.$$

c. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 2.

d. Montrer que la suite (u_n) est convergente.

4. Soit la suite (S_n) définie pour $n > 0$, par

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n.$$

a. Écrire S_n à l'aide d'une intégrale.

b. Interpréter géométriquement S_n.

c. Calculer S_n et déterminer la limite de la suite (S_n).

Baccalauréat S Pondichéry 1^{er} avril 2004

Exercice 1 **3 points**

1. Soit u la suite définie par : $\begin{cases} u_0 & = & 0 \\ u_{n+1} & = & \dfrac{1}{2-u_n} \end{cases}$ pour tout entier naturel n

a. Calculer u_1, u_2 et u_3. On exprimera chacun de ces termes sous forme d'une fraction irréductible.

b. Comparer les quatre premiers termes de la suite u aux quatre premiers termes de la suite w définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = \dfrac{n}{n+1}$.

c. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = w_n$.

2. Soit v la suite de terme général v_n défini par $v_n = \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$ où ln désigne la fonction logarithme népérien.

a. Montrer que $v_1 + v_2 + v_3 = -\ln 4$.

b. Soit S_n la somme définie pour tout entier naturel non nul n par :

$$S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n.$$

Exprimer S_n en fonction de n.

Déterminer la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 2 **4 points**

Un joueur dispose d'un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6, et de trois urnes U_1, U_2 et U_3 contenant chacune k boules, où k désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.

Il y a trois boules noires dans l'urne U_1, deux boules noires dans l'urne U_2 et une boule noire dans l'urne U_3, et toutes les autres boules contenues dans les urnes sont blanches.

Les boules sont indiscernables au toucher.

Une partie se déroule de la façon suivante :

le joueur lance le dé,

- s'il obtient le numéro 1, il prend au hasard une boule dans l'urne U_1, note sa couleur et la remet dans l'urne U_1 ;
- s'il obtient un multiple de trois, il prend au hasard une boule dans l'urne U_2, note sa couleur et la remet dans l'urne U_2 ;
- si le numéro amené par le dé n'est ni le 1 ni un multiple de trois, il prend au hasard une boule dans l'urne U_3, note sa couleur et la remet dans l'urne U_3.

On désigne par A, B, C, et N les évènements suivants :

A : « Le dé amène le numéro 1. »

B : « Le dé amène un multiple de trois. »

C : « Le dé amène un numéro qui n'est ni le 1, ni un multiple de 3. »

N : « La boule tirée est noire. »

1. Le joueur joue une partie.

a. Montrer que la probabilité qu'il obtienne une boule noire est égale à $\dfrac{5}{3k}$.

b. Calculer la probabilité que le dé ait amené le 1 sachant que la boule tirée est noire.

c. Déterminer k pour que la probabilité d'obtenir une boule noire soit supérieure à $\frac{1}{2}$.

d. Déterminer k pour que la probabilité d'obtenir une boule noire soit égale à $\frac{1}{30}$.

2. Dans cette question, k est choisi pour que la probabilité d'obtenir une boule noire en jouant une partie soit égale à $\frac{1}{30}$.
Le joueur joue 20 parties, indépendantes les unes des autres.
Calculer, sous forme exacte puis arrondie à 10^{-3}, la probabilité qu'il obtienne au moins une fois une boule noire.

Exercice 3 **8 points**

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire
Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\varphi(x) = (x^2 + x + 1)\mathrm{e}^{-x} - 1.$$

1. a. Déterminer les limites de φ en $-\infty$ et en $+\infty$.

b. Étudier le sens de variations de φ puis dresser son tableau de variations sur $\mathbb{R}$.

2. Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$, dont l'une dans l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$, qui sera notée α.
Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

3. En déduire le signe de $\varphi(x)$ sur $\mathbb{R}$ et le présenter dans un tableau.

Partie B : Étude de la position relative de deux courbes et calcul d'aire
Sur la feuille annexe page 5 sont tracées les courbes représentatives de deux fonctions f et g.
Les fonctions f et g sont définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (2x+1)\mathrm{e}^{-x} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}.$$

Leurs courbes représentatives dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ sont notées $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

1. Démontrer que les deux courbes passent par le point A de coordonnées $(0\,;\,1)$ et admettent en ce point la même tangente.

a. Démontrer que, pour tout nombre réel x, $f(x) - g(x) = \dfrac{(2x+1)\varphi(x)}{x^2+x+1}$ où φ est la fonction étudiée dans la **partie A**.

b. À l'aide d'un tableau, étudier le signe de $f(x) - g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

c. En déduire la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

2. a. Montrer que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = (-2x-3)\mathrm{e}^{-x} - \ln\left(x^2 + x + 1\right)$$

est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto f(x) - g(x)$.

b. En déduire l'aire $\mathscr{A}$, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan délimitée par les deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équations $x = -\frac{1}{2}$ et $x = 0$.
Donner la valeur exacte puis la valeur arrondie à 10^{-4} de cette aire.

Exercice 4 : enseignement obligatoire **5 points**

Partie A

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation :

$$z^2 - 2z + 4 = 0.$$

Les solutions seront notées z' et z'', z' désignant la solution dont la partie imaginaire est positive.

Donner les solutions sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.

2. Donner la valeur exacte de $\left(z'\right)^{2\,004}$ sous forme exponentielle puis sous forme algébrique.

Partie B

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$; (unité graphique : 2 cm).

1. Montrer que les points A d'affixe $1+\text{i}\sqrt{3}$ et B d'affixe $1-\text{i}\sqrt{3}$ sont sur un même cercle de centre O dont on précisera le rayon.
Tracer ce cercle puis construire les points A et B.
2. On note O$'$ l'image du point O par la rotation r_1 de centre A et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ et B$'$ l'image du point B par la rotation r_2 de centre A et d'angle $+\dfrac{\pi}{2}$.
Calculer les affixes des points O$'$ et B$'$ et construire ces points.
3. Soit I le milieu du segment [OB].
   a. Que peut-on conjecturer pour la droite (AI) dans le triangle AO$'$B$'$?
   b. Calculer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{\text{AI}}$.
   Montrer que l'affixe du vecteur $\overrightarrow{\text{O}'\text{B}'}$ est égale à $3\sqrt{3}-\text{i}$.
   c. La conjecture émise à la **question a** est-elle vraie ?.

Exercice 4 : exercice de spécialité **5 points**

L'espace (E) est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$.
On considère les points A(0 ; 5 ; 5) et B(0 ; 0 ; 10).

1. Dans cette question, on se place dans le plan P_0 d'équation $x=0$ rapporté au repère $\left(\text{O}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On note $\mathscr{C}$ le cercle de centre B passant par A.
Démontrer que la droite (OA) est tangente au cercle $\mathscr{C}$.
2. On nomme $\mathscr{S}$ la sphère engendrée par la rotation du cercle $\mathscr{C}$ autour de l'axe (Oz) et Γ le cône engendré par la rotation de la droite (OA) autour de l'axe (Oz).
   a. Démontrer que le cône Γ admet pour équation $x^2+y^2=z^2$.
   b. Déterminer l'intersection du cône Γ et de la sphère $\mathscr{S}$.
   Préciser la nature de cette intersection et ses éléments caractéristiques.
   c. Illustrer ces objets par un schéma dans l'espace.
3. On coupe le cône Γ par le plan P_1 d'équation $x=1$.
Dans P_1, l'une des trois figures ci-dessous représente cette intersection.
Identifier cette figure en donnant les justifications nécessaires.
4. Soit $M(x,\ y,\ z)$ un point du cône Γ dont les coordonnées sont des entiers relatifs non nuls. Démontrer que x et y ne peuvent pas être simultanément impairs.

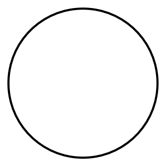


Figure 1

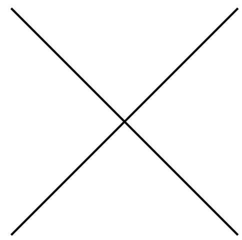


Figure 2

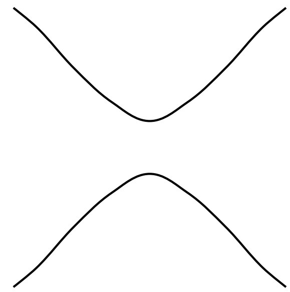
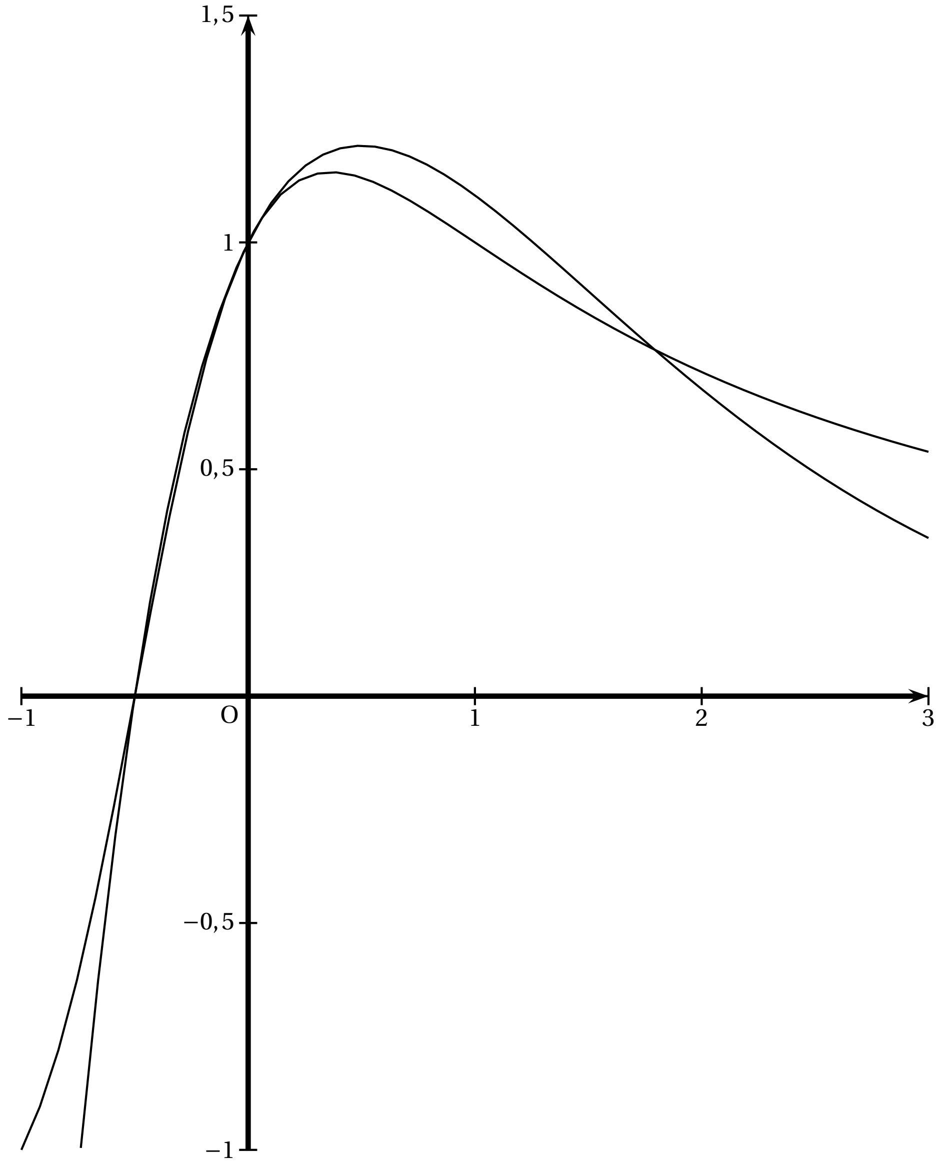


Figure 3

Exercice 3



Baccalauréat S Amérique du Nord mai 2004

EXERCICE 1 **3 points**

Commun à tous les candidats

Dans le plan affine, on considère ABC un triangle rectangle en A, I le milieu du segment [AB] et J le centre de gravité de ABC.

Pour tout réel m, différent de $-\dfrac{1}{3}$, on note G_m le barycentre du système de points pondérés

$$S_m = \{(\mathrm{A},\ 1),\ (\mathrm{B},\ m),\ (\mathrm{C},\ 2m)\}.$$

Pour tout point M du plan on note $\overrightarrow{V_M} = 3\overrightarrow{M\mathrm{A}} - \overrightarrow{M\mathrm{B}} - 2\overrightarrow{M\mathrm{C}}$.

Pour chacune des six affirmations suivantes, dite si elle est vraie (V) ou fausse (F).

Chaque bonne réponse donne 0,5 *point, chaque réponse fausse ou illisible enlève* 0,25 *point, l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Un éventuel total négatif serait ramené à* 0.

Répondre aux affirmations sur la page annexe.

Affirmation	**V ou F**
G_1 est le milieu du segment [CI].	
G_1 est barycentre de $\left\{(\mathrm{J},\ 2),\ \left(\mathrm{C},\ \dfrac{2}{3}\right)\right\}$	
Pour tout point M, $\overrightarrow{V_M} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + 2\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.	
Pour tout m, distinct de $-\dfrac{1}{3}$, $\overrightarrow{\mathrm{AG}_m}$ est colinéaire à $\overrightarrow{\mathrm{AG}_{-1}}$.	
$\mathrm{IBG}_{-\frac{1}{2}}$ est un triangle rectangle.	
Pour tout point P de (AG_{-1}), il existe un réel m tel que $P = G_m$.	

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

1. On veut résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$(\mathrm{E}) \quad : z^3 + 4z^2 + 2z - 28 = 0.$$

   a. Déterminer deux réels a et b tels que l'équation (E) s'écrive :

$$(z-2)(z^2 + az + b) = 0.$$

   b. Résoudre (E)

2. On note (H) l'ensemble des points M du plan complexe d'affixe z vérifiant :

$$z^2 - 4 = 4 - \overline{z}^2.$$

a. On note x et y les parties réelle et imaginaire de l'affixe z d'un point M.
Montrer que : M appartient à (H) si et seulement si

$$x^2 - y^2 = 4.$$

b. Soient A, B et C les points d'affixes respectives 2, $-3 - \text{i}\sqrt{5}$ et $-3 + \text{i}\sqrt{5}$.
Vérifier que A, B et C appartiennent à (H).

3. Soit r la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{4}$.

a. Déterminer les affixes de A′, B′ et C′, images respectives de A, B et C par la rotation r (on donnera ces affixes sous la forme algébrique).

b. On note M' l'image par r du point M d'affixe z. On note z' l'affixe de M'. Les parties réelle et imaginaire de z sont notées x et y, celles de z' sont notées x' et y'. On note (H′) l'ensemble des points du plan dont l'antécédent par r est un point de (H).
– Exprimer x et y en fonction de x' et y'.
– En utilisant la question **2 a** prouver que : M' appartient à (H′) si et seulement si

$$x'y' = -2.$$

4. Faire une figure sur laquelle on placera les points A, B, C, A′, B′, C′, la courbe (H′), puis la courbe (H).

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
Soient les points A, A′, B et B′ d'affixes respectives :

$$z_{\text{A}} = 1 - 2\text{i},\ z_{\text{A}'} = -2 + 4\text{i},\ z_{\text{B}} = 3 - \text{i},\ z_{\text{B}'} = 5\text{i}.$$

1. **a.** Placer les points A, A′, B et B′ dans le plan complexe. Monter que ABB′A′ est un rectangle.

b. Soit s la réflexion telle que s(A)=A′ et s(B)=B′. On note (Δ) son axe.
Donner une équation de la droite (Δ) et la tracer dans le plan complexe.

c. On note z' l'affixe du point M' image par s du point M d'affixe z.
Montrer que

$$z' = \left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}\text{i}\right)\overline{z} + 2\text{i} - 1.$$

2. Soit g l'application du plan dans lui même qui à tout point M d'affixe z associe le point P d'affixe z' définie par :

$$z' = \left(-\frac{6}{5} - \frac{8}{5}\text{i}\right)\overline{z} + 5 - \text{i}.$$

a. On note C et D les images respectives de A et B par g ; déterminer les affixes de C et D et placer ces points dans le plan complexe.

b. Soit Ω le point d'affixe 1+i et soit h l'homothétie de centre Ω et de rapport −2.
Montrer que C et D sont les images respectives de A′ et B′ par h.

c. Soit M_1 d'affixe z_1 l'image par h de M, d'affixe z. Donner les éléments caractéristiques de h^{-1} et exprimer z en fonction de z_1.

3. On pose $f = h^{-1} \circ g$.

a. Déterminer l'expression complexe de f.

b. Reconnaître f. En déduire une construction du point P, image par g d'un point M quelconque donné du plan.

EXERCICE 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

Un jeu de hasard est formé d'un dispositif lançant de façon aléatoire une fléchette dans une cible ayant la forme suivante :

B	B	B	B	B	B	B	B	B	J	J	J	V	V	R
R	V	V	J	J	J	B	B	B	B	B	B	B	B	B

La fléchette atteint toujours une case et une seule.

Les trente cases, blanches (B), *jaunes* (J), *vertes* (V) *ou rouges* (R), *ont toutes la même probabilité d'être atteintes.*

– Si la fléchette atteint une case rouge, le joueur gagne 8 euros.
– Si la fléchette atteint une case verte, le joueur gagne 5 euros.
– Si la fléchette atteint une case jaune, le joueur ne gagne rien et ne perd rien.
– Si la fléchette atteint une case blanche, le joueur perd a euros, la lettre a désigne un nombre réel positif.

1. On note X la variable aléatoire représentant le gain algébrique du joueur (compté négativement quand il perd).

a. Donner la loi de probabilité de X.

b. Calculer a pour que le jeu soit équitable, c'est-à-dire pour que l'espérance $\mathrm{E}(X)$ soit nulle.

2. Un joueur est considéré comme gagnant s'il a obtenu un gain strictement positif.

a. Quelle est la probabilité p qu'un joueur gagne ?

b. Un joueur joue 5 parties consécutives indépendantes. Quelle est la probabilité qu'il gagne exactement 2 fois ? exactement 5 fois ?

c. Quel est le nombre moyen de parties gagnantes dans la situation décrite en **2 b** ?

EXERCICE 4 **8 points**

Commun à tous les candidats

Partie I

On donne un entier naturel n strictement positif, et on considère l'équation différentielle :

$$(\mathrm{E}_n) \qquad y' + y = \frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}.$$

1. On fait l'hypothèse que deux fonctions g et h, définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, vérifient, pour tout x réel :

$$g(x) = h(x)\mathrm{e}^{-x}.$$

a. Montrer que g est solution de (E_n) si et seulement si, pour tout x réel,

$$h'(x) = \frac{x^n}{n!}.$$

b. En déduire la fonction h associée à une solution g de (E_n), sachant que $h(0) = 0$.
Quelle est alors la fonction g ?

2. Soit φ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

a. Montrer que φ est solution de (E_n) si et seulement si $\varphi - g$ est solution de l'équation :

$$(\mathrm{F}) \qquad y' + y = 0.$$

b. Résoudre (F).

c. Déterminer la solution générale φ de l'équation (E_n).

d. Déterminer la solution f de l'équation (E_n) vérifiant $f(0) = 0$.

Partie II

Le but de cette partie est de montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \mathrm{e} \quad \text{(on rappelle que par convention} \quad 0! = 1).$$

1. On pose, pour tout x réel,

$$f_0(x) = \mathrm{e}^{-x},\ f_1(x) = x\mathrm{e}^{-x}.$$

a. Vérifier que f_1 est solution de l'équation différentielle : $y' + y = f_0$.

b. Pour tout entier strictement positif n, on définit la fonction f_n comme la solution de l'équation différentielle $y' + y = f_{n-1}$ vérifiant $f_n(0) = 0$.
En utilisant la **Partie I**, montrer par récurrence que, pour tout x réel et tout entier $n \geqslant 1$:

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}.$$

2. Pour tout entier naturel n, on pose :

$$I_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x. \quad \text{(on ne cherchera pas à calculer } I_n)$$

a. Montrer, pour tout entier naturel n et pour tout x élément de l'intervalle $[0\,;\,1]$, l'encadrement :

$$0 \leqslant f_n(x) \leqslant \frac{x^n}{n!}.$$

En déduire que $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{(n+1)!}$, puis déterminer la limite de la suite (I_n).

b. Montrer, pour tout entier naturel k non nul, l'égalité : $I_k - I_{k-1} = -\dfrac{1}{k!}\mathrm{e}^{-1}$.

c. Calculer I_0 et déduire de ce qui précède que :

$$I_n = 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{e}^{-1}}{k!}$$

d. En déduire finalement :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \mathrm{e}.$$

Baccalauréat S Antilles-Guyane juin 2004

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

On définit les suites (a_n) et (b_n) par $a_0 = 1,\ b_0 = 7$ et $\begin{cases} a_{n+1} &= \dfrac{1}{3}(2a_n + b_n) \\ b_{n+1} &= \dfrac{1}{3}(a_n + 2b_n) \end{cases}$

Soit D une droite munie d'un repère $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath}\right)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère les points A_n et B_n d'abscisses respectives a_n et b_n.

1. Placez les points A_0, B_0, A_1, B_1, A_2 et B_2.
2. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = b_n - a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Démontrez que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   Exprimez u_n en fonction de n.
3. Comparez a_n et b_n. Étudiez le sens de variation des suites (a_n) et (b_n). Interprétez géométriquement ces résultats.
4. Démontrez que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.
5. Soit (v_n) la suite définie par $v = a_n + b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Démontrez que (v_n) est une suite constante. En déduire que les segments $[A_nB_n]$ ont tous le même milieu I.
6. Justifiez que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes et calculez leur limite. Interprétez géométriquement ce résultat.

EXERCICE 2 **7 points**

Commun à tous les candidats

But de l'exercice : approcher $\ln(1+a)$ par un polynôme de degré 5 lorsque a appartient à l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
Soit $a \in [0\ ;\ +\infty[$.
On note $I_0(a) = \displaystyle\int_0^a \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t$ et pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_k(a) = \displaystyle\int_0^a \frac{(t-a)^k}{(1+t)^{k+1}}\,\mathrm{d}t$.

1. Calculez $I_0(a)$ en fonction de a.
2. À l'aide d'une intégration par parties, exprimez $I_1(a)$ en fonction de a
3. À l'aide d'une intégration par parties, démontrez que
$$I_{k+1}(a) = \frac{(-1)^{k+1}a^{k+1}}{k+1} + I_k(a) \quad \text{pour tout} \quad k \in \mathbb{N}^*.$$
4. Soit P le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = \dfrac{1}{5}x^5 - \dfrac{1}{4}x^4 + \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 + x$.
   Démontrez en calculant $I_2(a),\ I_3(a)$ et $I_4(a)$, que $I_5(a) = \ln(1+a) - P(a)$.
5. Soit $J(a) = \displaystyle\int_0^a (t-a)^5\,\mathrm{d}t$. Calculez $J(a)$.
6. **a.** Démontrez que pour tout $t \in [0\ ;\ a]$, $\dfrac{(t-a)^5}{(1+t)^6} \geqslant (t-a)^5$.
   b. Démontrez que pour tout $a \in [0\ ;\ +\infty[$, $J(a) \leqslant I_5(a) \leqslant 0$.
7. En déduire que pour tout $a \in [0\ ;\ +\infty[$, $|\ln(1+a) - P(a)| \leqslant \dfrac{a^6}{6}$.
8. Déterminez, en justifiant votre réponse, un intervalle sur lequel $P(a)$ est une valeur approchée de $\ln(1+a)$ à 10^{-3} près.

EXERCICE 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Chaque réponse juste rapporte 1 point. Une absence de réponse n'est pas sanctionnée. Il sera retiré 0,5 point par réponse fausse. On ne demande pas de justifier. La note finale de l'exercice ne peut être inférieure à zéro.

On pose $z = -\sqrt{2+\sqrt{2}} + \text{i}\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

1. La forme algébrique de z^2 est :

A : $2\sqrt{2}$ B : $2\sqrt{2}-2\text{i}\sqrt{2}$ C : $2+\sqrt{2}+\text{i}\left(2-\sqrt{2}\right)$ D : $2\sqrt{2}+2\text{i}\sqrt{2}$

2. z^2 s'écrit sous forme exponentielle :

A : $4\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}$ B : $4\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{4}}$ C : $4\text{e}^{\text{i}\frac{3\pi}{4}}$ D : $4\text{e}^{-\text{i}\frac{3\pi}{4}}$

3. z s'écrit sous forme exponentielle :

A : $2\text{e}^{\text{i}\frac{7\pi}{8}}$ B : $2\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{8}}$ C : $2\text{e}^{\text{i}\frac{5\pi}{8}}$ D : $2\text{e}^{\text{i}\frac{3\pi}{8}}$

4. $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ sont les cosinus et sinus de :

A : $\dfrac{7\pi}{8}$ B : $\dfrac{5\pi}{8}$ C : $\dfrac{3\pi}{8}$ D : $\dfrac{\pi}{8}$

EXERCICE 4 **5 points**

Pour les candidats n 'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère le tétraèdre ABCD ; on note I milieu du segment [AB] et J celui de [CD].

1. **a.** Soit G_1 le barycentre du système de points pondérés $\{(\text{A},\ 1)\ ;\ (\text{B},\ 1)\ ;\ (\text{C},\ -1)\ ;\ (\text{D},\ 1)\}$.
Exprimez $\overrightarrow{\text{IG}_1}$ en fonction de $\overrightarrow{\text{CD}}$. Placez I, J et G_1 sur la figure (voir feuille annexe).

b. Soit G_2 le barycentre du système de points pondérés $\{(A,\ 1)\ ;\ (B,\ 1)\ ;\ (D,\ 2)\}$.
Démontrez que G_2 est le milieu du segment [ID]. Placez G_2.

c. Démontrez que IG_1DJ est un parallélogramme.
En déduire la position de G_2 par rapport aux points G_1 et J.

2. Soit m un réel. On note G_m le barycentre du système de points pondérés $\{(A,\ 1)\ ;\ (B,\ 1)\ ;\ (C,\ m-2)\ ;\ (D,\ m)\}$.

a. Précisez l'ensemble $\mathcal{E}$ des valeurs de m pour lesquelles le barycentre G_m existe.

Dans les questions qui suivent, on suppose que le réel m appartient à l'ensemble $\mathcal{E}$.

b. Démontrez que G_m, appartient au plan (ICD).

c. Démontrez que le vecteur $m\overrightarrow{JG_m}$ est constant.

d. En déduire l'ensemble $\mathcal{F}$ des points G_m lorsque m décrit l'ensemble $\mathcal{E}$.

EXERCICE 4 **5 points**

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Dans le plan orienté, on considère un carré direct ABCD de centre O. Soit P un point du segment [BC] distinct de B. On note Q l'intersection de (AP) avec (CD). La perpendiculaire δ à (AP) passant par A coupe (BC) en R et (CD) en S.

1. Faire une figure.
2. Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

    a. Précisez, en justifiant votre réponse, l'image de la droite (BC) par la rotation r.

    b. Déterminez les images de R et de P par r.

    c. Quelle est la nature de chacun des triangles ARQ et APS.

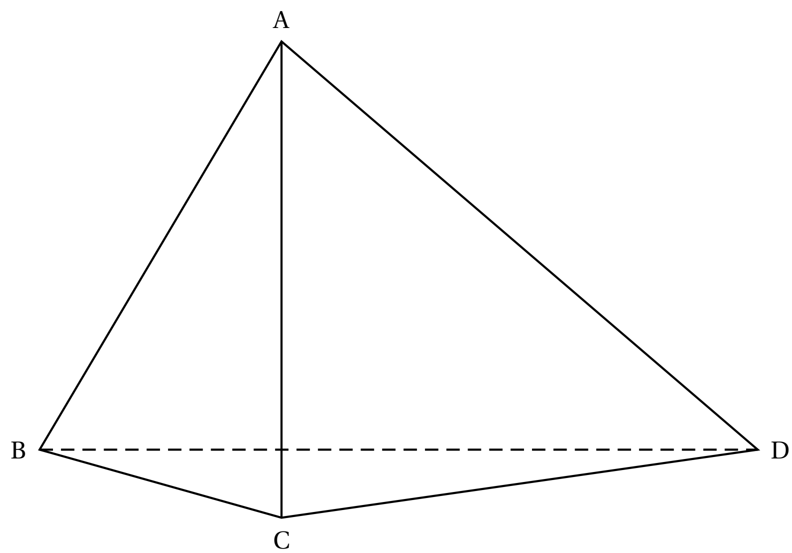
3. On note N le milieu du segment $[PS]$ et M celui du segment $[QR]$. Soit s la similitude de centre A, d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

    a. Déterminez les images respectives de R et de P par s.

    b. Quel est le lieu géométrique du point N quand P décrit le segment [BC] privé de B ?

    c. Démontrez que les points M, B, N et D sont alignés.

Annexe : exercice 4



Baccalauréat S Asie juin 2004

- **L'utilisation d'une calculatrice n'est pas autorisé**

EXERCICE 1 **3 points**

Commun à tous les candidats

À chacune des trois affirmations suivantes, répondre par « VRAI » ou par « FAUX ».
Aucune justification n'est demandée.

Données	Affirmations	Réponses
f est la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par : $f(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}$, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de f dans un repère du plan.	La tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 est parallèle à la droite d'équation $y = -\dfrac{1}{4}x$.	
G est le barycentre du système de points pondérés $\{(\mathrm{A}\ ;\ -1),\ (\mathrm{B}\ ;\ 1),\ (\mathrm{C}\ ;\ 4)\}$	L'application du plan dans lui-même qui à tout point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = -\overrightarrow{M\mathrm{A}} + \overrightarrow{M\mathrm{B}} + 4\overrightarrow{M\mathrm{C}}$, est une homothétie de rapport -3.	
$f(x) = x\sin 3x$	Les solutions de l'équation $f(x) = \dfrac{1}{2}x$ sont : 0 ; $\dfrac{\pi}{18} + 2k\dfrac{\pi}{3}$ ou $\dfrac{5\pi}{18} + 2k'\dfrac{\pi}{3}$, k et k' sont des entiers relatifs.	

Le barème est le suivant :

- Réponse exacte : 1 point.
- Réponse fausse : $-0,5$ point.
- Absence de réponse : 0 point.
- La note attribuée à l'exercice ne peut être négative.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe $\mathscr{P}$ est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{\mathrm{e_1}},\ \overrightarrow{\mathrm{e_2}}\right)$, unité graphique 1 cm.

Soit A le point d'affixe 3i. On appelle f l'application qui, à tout point M d'affixe z, distinct de A, associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = \frac{3\mathrm{i}z - 7}{z - 3\mathrm{i}}.$$

1. Recherche des points invariants par f.

  a. Développer $(z - 7\mathrm{i})(z + \mathrm{i})$.

  b. Montrer que f admet deux points invariants B et C dont on précisera les affixes et qu'on placera sur un dessin.

2. On appelle Σ le cercle de diamètre [BC]. Soit M un point quelconque de Σ, distinct de B et de C, soit M' son image par f.

  a. Justifier que l'affixe z de M vérifie : $z = 3\mathrm{i} + 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ où θ est un nombre réel.

  b. Exprimer l'affixe z' de M' en fonction de θ et en déduire que M' appartient aussi à Σ.

c. Démontrer que $z' = -\overline{z}$ et en déduire, en la justifiant, une construction géométrique de M'.

3. On considère un cercle de centre A, de rayon $r > 0$. Déterminer l'image de ce cercle par f.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On appelle (E) l'ensemble des entiers naturels qui peuvent s'écrire sous la forme $9 + a^2$ où a est un entier naturel non nul ; par exemple $10 = 9 + 1^2$; $13 = 9 + 2^2$ etc.

On se propose dans cet exercice d'étudier l'existence d'éléments de (E) qui sont des puissances de 2, 3 ou 5.

1. Étude de l'équation d'inconnue a : $a^2 + 9 = 2^n$ où $a \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 4$.

a. Montrer que si a existe, a est impair.

b. En raisonnant modulo 4, montrer que l'équation proposée n'a pas de solution.

2. Étude de l'équation d'inconnue a : $a^2 + 9 = 3^n$ où $a \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$.

a. Montrer que si $n \geqslant 3$, 3^n est congru à 1 ou à 3 modulo 4.

b. Montrer que si a existe, il est pair et en déduire que nécessairement n est pair.

c. On pose $n = 2p$ où p est un entier naturel, $p \geqslant 2$. Déduire d'une factorisation de $3^n - a^2$, que l'équation proposée n'a pas de solution.

3. Étude de l'équation d'inconnue a : $a^2 + 9 = 5^n$ où $a \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

a. En raisonnant modulo 3, montrer que l'équation n'a pas de solution si n est impair.

b. On pose $n = 2p$, en s'inspirant de **2 c** démontrer qu'il existe un unique entier naturel a tel que $a^2 + 9$ soit une puissance entière de 5.

EXERCICE 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

On appelle $\mathscr{P}$ le plan d'équation $2x - y + 5 = 0$ et $\mathscr{Q}$ le plan d'équation $3x + y - z = 0$.

1. Montrer que $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont sécants en une droite $\mathscr{D}$ dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \alpha \\ y & = & 2\alpha + 5 \\ z & = & 5\alpha + 5 \end{array}\right. \quad \text{où } \alpha \text{ est un nombre réel.}$$

2. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier précisément vos réponses :

- Affirmation 1 : $\mathscr{D}$ est parallèle au plan $\mathscr{R}$ d'équation : $-5x + 5y - z = 0$.

Soit $\mathscr{D}'$ la droite de l'espace de représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{lcr} x & = & -3\beta \\ y & = & 1 + \beta \\ z & = & 2 + 2\beta \end{array}\right. \quad \text{où } \beta \text{ est un nombre réel.}$$

- Affirmation 2 : $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont coplanaires.

EXERCICE 4 **8 points**

Commun à tous les candidats

I Première partie Étude d'une fonction f

On appelle f la fonction définie sur l'intervalle $\text{I} = \left]-\frac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$ par

$$f(x) = \ln(1+2x).$$

1. Justifier que f est strictement croissante sur l'intervalle I.
2. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $-\frac{1}{2}$.
3. On considère la fonction g définie sur l'intervalle I par $g(x) = f(x) - x$.
   a. Étudier les variations de g sur l'intervalle I.
   b. Justifier que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions : 0 et une autre, notée β, appartenant à l'intervalle $[1\ ;\ 2]$.
   c. En déduire le signe de $g(x)$ pour x appartenant à l'intervalle I.
4. Justifier que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ \beta[$, $f(x)$ appartient aussi à $]0\ ;\ \beta[$.

II Deuxième partie Étude d'une suite récurrente

On appelle $(u_n)_{\geqslant 0}$ la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 = 1$.

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, u_n appartient à $]0\ ;\ \beta[$.
2. Démontrer par récurrence que la suite $(u_n)_{\geqslant 0}$ est croissante.
3. Justifier que la suite $(u_n)_{\geqslant 0}$ est convergente.

III Troisième partie Recherche de la limite de la suite $(u_n)_{\geqslant 0}$

1. Montrer que pour tout réel $x \geqslant 1$, $f(x) \leqslant \frac{2}{3}$.
2. Recherche de la limite de la suite $(u_n)_{\geqslant 0}$
   a. Démontrer que pour tout entier naturel n, $\displaystyle\int_{u_0}^{\beta} f'(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{2}{3}\left(\beta - u_n\right)$.
   b. En déduire que pour tout entier naturel n, $\beta - u_{n+1} \leqslant \frac{2}{3}\left(\beta - u_n\right)$, puis à l'aide d'un raisonnement par récurrence que $0 \leqslant \beta - u_n \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n$.
   c. Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{\geqslant 0}$?

Baccalauréat S Centres étrangers juin 2004

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, unité graphique : 2 cm.

On appelle A le point d'affixe $-2i$.

À tout point M du plan d'affixe z, on associe le point M' d'affixe

$$z' = -2\overline{z} + 2i.$$

1. On considère le point B d'affixe $b = 3 - 2i$.

   Déterminer la forme algébrique des affixes a' et b' des points A' et B' associés respectivement aux points A et B. Placer ces points sur le dessin.
2. Montrer que si M appartient à la droite (Δ) d'équation $y = -2$ alors M' appartient aussi à (Δ).
3. Démontrer que pour tout point M d'affixe z, $\left|z' + 2i\right| = 2|z + 2i|$; interprétez géométriquement cette égalité.
4. Pour tout point M distinct de A on appelle θ un argument de $z + 2i$.

   a. Justifier que θ est une mesure de l'angle $\left(\vec{u}, \overrightarrow{AM}\right)$.

   b. Démontrer que $(z + 2i)(z' + 2i)$ est un réel négatif ou nul.

   c. En déduire un argument de $z' + 2i$ en fonction de θ.

   d. Que peut-on en déduire pour les demi-droites [AM) et [AM') ?
5. En utilisant les résultats précédents, proposer une construction géométrique du point M' associé au point M.

EXERCICE 2 **5 points**

Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Un employé se rend à son travail. S'il est à l'heure il prend le bus de ramassage gratuit mis à disposition par l'entreprise, s'il est en retard il prend le bus de la ville et il lui en coûte 1,50 €.

Si l'employé est à l'heure un jour donné, la probabilité qu'il soit en retard le lendemain est $\dfrac{1}{5}$, s'il est en retard un jour donné la probabilité qu'il soit en retard le lendemain est $\dfrac{1}{20}$.

Pour tout entier naturel non nul n, on appelle R_n l'évènement : « l'employé est en retard le jour n ». On note p_n, la probabilité de R_n et q_n, celle de $\overline{R_n}$. On suppose que $p_1 = 0$.

1. Détermination d'une relation de récurrence.

   a. Déterminer les probabilités conditionnelles $p_{R_n}\left(R_{n+1}\right)$ et $p_{\overline{R_n}}\left(R_{n+1}\right)$.

   b. Déterminer $p\left(R_{n+1} \cap R_n\right)$ en fonction de p_n et $p\left(R_{n+1} \cap \overline{R_n}\right)$ en fonction de q_n

   c. Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n et de q_n.

   d. En déduire que $p_{n+1} = \dfrac{1}{5} - \dfrac{3}{20} p_n$.
2. Étude de la suite $\left(p_n\right)$.

   Pour tout entier naturel non nul n, on pose $v_n = p_n - \dfrac{4}{23}$.

a. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $-\dfrac{3}{20}$.

b. Exprimer v_n puis p_n en fonction de n.

c. Justifier que la suite $\left(p_n\right)$ est convergente et calculer sa limite.

EXERCICE 2 **5 points**

Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On se propose dans cet exercice d'étudier le problème suivant :

« *Les nombres dont l'écriture décimale n'utilise que le seul chiffre* 1 *peuvent-ils être premiers* ? »

Pour tout entier naturel $p \geqslant 2$, on pose $N_p = 1\ldots1$ où 1 apparaît p fois.

On rappelle dès lors que $N_p = 10^{p-1} + 10^{p-2} + \cdots + 10^0$.

1. Les nombres $N_2 = 11,\ N_3 = 111,\ N_4 = 1\ 111$ sont-ils premiers ?
2. Prouver que $N_p = \dfrac{10^p - 1}{9}$. Peut-on être certain que $10^p - 1$ est divisible par 9 ?
3. On se propose de démontrer que si p n'est pas premier, alors N_p n'est pas premier.

   On rappelle que pour tout nombre réel x et tout entier naturel n non nul,

$$x^n - 1 = (x-1)\left(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1\right).$$

   a. On suppose que p est pair et on pose $p = 2q$, où q est un entier naturel plus grand que 1.

   Montrer que N_p est divisible par $N_2 = 11$.

   b. On suppose que p est multiple de 3 et on pose $p = 3q$, où q est un entier naturel plus grand que 1.

   Montrer que N_p est divisible par $N_3 = 111$.

   c. On suppose p non premier et on pose $p = kq$ où k et q sont des entiers naturels plus grands que 1.

   En déduire que N_p est divisible par N_k.

4. Énoncer une condition nécessaire pour que N_p soit premier.

   Cette condition est-elle suffisante ?

EXERCICE 3 **9 points**

Commun à tous les candidats

On s'intéresse à des courbes servant de modèle à la distribution de la masse salariale d'une entreprise. Les fonctions f associées définies sur l'intervalle $[0 ; 1]$ doivent vérifier les conditions suivantes :

(1) $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$;

(2) f est croissante sur l'intervalle $[0 ; 1]$

(3) Pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0 ; 1]$, $f(x) \leqslant x$.

Le plan est rapporté au repère orthonormal $\mathscr{R} = \left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, unité graphique : 10 cm.

I. Première partie Étude d'un modèle

On appelle g la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par

$$g(x) = x\mathrm{e}^{x-1}.$$

1. Prouver que g vérifie les conditions (1) et (2).
2. Montrer que $g(x) - x = \dfrac{x}{\mathrm{e}}\left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}\right)$ et en déduire que g vérifie la condition (3).
3. Tracer les droites d'équations $y = x$ et $x = 1$ et la courbe représentative de g dans le repère $\mathscr{R}$.

II. Seconde partie Un calcul d'indice

Pour une fonction f vérifiant les conditions (1), (2) (3), on définit un indice I_f égal à l'aire exprimée en unité d'aire, du domaine plan M délimité par les droites d'équations $y = x,\ x = 1$ et la courbe représentative de f.

1. Justifier que $I_f = \displaystyle\int_0^1 \left[x - f(x)\right] \mathrm{d}x$.

2. À l'aide d'une intégration par parties, calculer l'indice I_g, associé à g.

3. On s'intéresse aux fonctions f_n, définies sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par

$$f_n(x) = \frac{2x^n}{1+x}$$

où n est un entier naturel supérieur en égal à 2. On admet que ces fonctions vérifient les conditions (1), (2), (3) et on se propose d'étudier l'évolution de leur indice I_n lorsque n tend vers l'infini.

a. On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \left[x - f_n(x)\right] \mathrm{d}x$ et $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$. Prouver que $I_n = \dfrac{1}{2} - u_n$.

b. Comparer $\dfrac{t^{n+1}}{1+t}$ et $\dfrac{t^n}{1+t}$ sur l'intervalle $[0\,;\,1]$; en déduire que la suite (u_n) est décroissante.

c. Prouver que pour tout réel t appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$,

$$0 \leqslant \frac{t^{n+1}}{1+t} \leqslant t^n.$$

d. En déduire que pourtout entier naturel $n \geqslant 2,\ 0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{2}{n+1}$.

e. Déterminer alors la limite de I_n quand n tend vers l'infini.

Durée : 4 heures

Baccalauréat S France juin 2004

EXERCICE 1 **3 points**

Commun à tous les candidats

On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & u_n + 2n + 3 \quad \text{pour tout entier naturel} \quad n. \end{cases}$$

1. Étudier la monotonie de la suite (u_n).
2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n > n^2$.

   b. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?
3. Conjecturer une expression de u_n, en fonction de n, puis démontrer la propriété ainsi conjecturée.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, i désigne le nombre de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Montrer que $(1+\text{i})^6 = -8\text{i}$.
2. On considère l'équation (E) : $z^2 = -8\text{i}$.

   a. Déduire de **1.** une solution de l'équation (E).

   b. L'équation (E) possède une autre solution ; écrire cette solution sous forme algébrique.
3. Déduire également de **1.** une solution de l'équation (E') $z^3 = -8\text{i}$.
4. On considère le point A d'affixe 2i et la rotation r de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.

   a. Déterminer l'affixe b du point B, image de A par r, ainsi que l'affixe c du point C, image de B par r.

   b. Montrer que b et c sont solutions de (E$'$).
5. a. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ (unité graphique 2 cm), représenter les points A, B et C.

   b. Quelle est la nature de la figure que forment les images de ces solutions ?

   c. Déterminer le centre de gravité de cette figure.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. Montrer que, pour tout entier naturel non nul k et pour tout entier naturel x :

$$(x-1)\left(1+x+x^2+\cdots+x^{k-1}\right) = x^k - 1.$$

   Dans toute la suite de l'exercice, on considère un nombre entier a supérieur ou égal à 2.

2. **a.** Soit n un entier naturel non nul et d un diviseur positif de n : $n = dk$.
Montrer que $a^d - 1$ est un diviseur de $a^n - 1$.

b. Déduire de la question précédente que $2^{2\,004} - 1$ est divisible par 7, par 63 puis par 9.

3. Soient m et n deux entiers naturels non nuls et d leur pgcd.

a. On définit m' et n' par $m = dm'$ et $n = dn'$. En appliquant le théorème de Bezout à m' et n', montrer qu'il existe des entiers relatifs u et v tels que : $mu - nv = d$.

b. On suppose u et v strictement positifs.
Montrer que : $(a^{mu} - 1) - (a^{nv} - 1)\,a^d = a^d - 1$.
Montrer ensuite que $a^d - 1$ est le pgcd de $a^{mu} - 1$ et de $a^{nv} - 1$.

c. Calculer, en utilisant le résultat précédent, le pgcd de $2^{63} - 1$ et de $2^{60} - 1$.

EXERCICE 3 — 4 points

Commun à tous les candidats

Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 point ; une réponse inexacte enlève 1/2 point l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on donne le point S(1 ; −2 ; 0) et le plan P d'équation $x + y - 3z + 4 = 0$.

1. Une représentation paramétrique de la droite D passant par le point S et perpendiculaire au plan P est :

$$\mathrm{A} : \left\{\begin{array}{lcl} x &=& 1+t \\ y &=& 1-2t \\ z &=& -3 \end{array}\right., t \in \mathbb{R} \quad \mathrm{B} : \left\{\begin{array}{lcl} x &=& 2+t \\ y &=& -1+t \\ z &=& 1-3t \end{array}\right., t \in \mathbb{R}$$

$$\mathrm{C} : \left\{\begin{array}{lcl} x &=& 1+t \\ y &=& -2-2t \\ z &=& 3t \end{array}\right., t \in \mathbb{R} \quad \mathrm{D} : \left\{\begin{array}{lcl} x &=& 2+t \\ y &=& -1+t \\ z &=& -3-3t \end{array}\right., t \in \mathbb{R}.$$

2. Les coordonnées du point d'intersection H de la droite D avec le plan P sont :

$$\mathrm{A} : (-4\,;\,0\,;\,0) \quad \mathrm{B} : \left(\frac{6}{5}\,;\,\frac{-9}{5}\,;\,\frac{3}{5}\right) \quad \mathrm{C} : \left(\frac{7}{9}\,;\,\frac{-2}{3}\,;\,\frac{1}{3}\right) \quad \mathrm{D}; \left(\frac{8}{11}\,;\,\frac{-25}{11}\,;\,\frac{9}{11}\right)$$

3. La distance du point S au plan P est égale à :

$$\mathrm{A} : \frac{\sqrt{11}}{3} \qquad \mathrm{B} : \frac{3}{\sqrt{11}} \qquad \mathrm{C} : \frac{9}{\sqrt{11}} \qquad \mathrm{D} : \frac{9}{11}$$

4. On considère la sphère de centre S et de rayon 3. L'intersection de la sphère S et du plan P est égale

A : au point I(1 ; −5 ; 0)

B : au cercle de centre H et de rayon $r = 3\sqrt{\dfrac{10}{11}}$

C : au cercle de centre S et de rayon $r = 2$

D : au cercle de centre H et de rayon $r = \dfrac{3\sqrt{10}}{11}$.

EXERCICE 4 **4 points**

Commun à tous les candidats

On s'intéresse à la durée de vie, exprimée en semaines, d'un composant électronique. On modélise cette situation par une loi de probabilité p de durée de vie sans vieillissement définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$: la probabilité que le composant ne soit plus en état de marche au bout de t semaines est

$$p([0\,;\,t[) = \int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x.$$

Une étude statistique, montrant qu'environ 50 % d'un lot important de ces composants sont encore en état de marche au bout de 200 semaines, permet de poser $p([0\,;\,200[) = 0,5$.

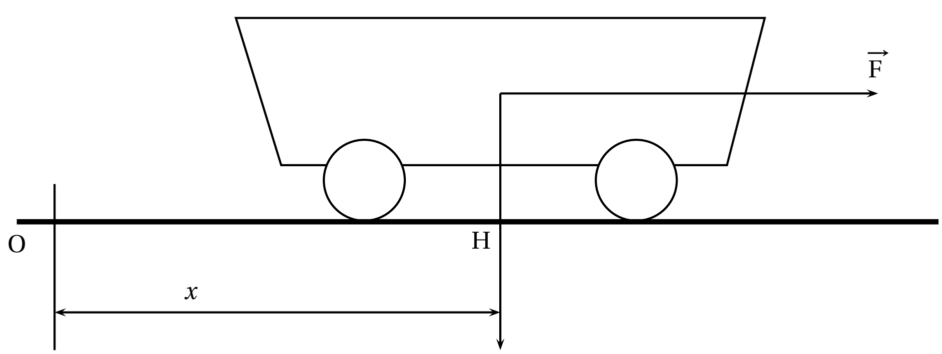
1. Montrer que $\lambda = \dfrac{\ln 2}{200}$.
2. Quelle est la probabilité qu'un de ces composants pris au hasard ait une durée de vie supérieure ? 300 semaines ? On donnera la valeur exacte et une valeur approchée décimale au centième près.
3. On admet que la durée de vie moyenne d_m de ces composants est la limite quand A tend vers $+\infty$ de $\displaystyle\int_0^A \lambda x \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$.

   a. Montrer que $\displaystyle\int_0^A \lambda x \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \dfrac{-\lambda A \mathrm{e}^{-\lambda A} - \mathrm{e}^{-\lambda A} + 1}{\lambda}$.

   b. En déduire d_m on donnera la valeur exacte et une valeur approchée décimale ? la semaine près.

Exercice 5 **4 points**

Commun à tous les candidats



Un chariot de masse 200 kg se déplace sur une voie rectiligne et horizontale. Il est soumis à une force d'entraînement constante $\overrightarrow{F}$ de valeur 50 N. Les forces de frottement sont proportionnelles ? la vitesse et de sens contraire ; le coefficient de proportionnalité a pour valeur absolue 25 N.m^{-1}.s.

La position du chariot est repérée par la distance x, en mètres, du point H ? l'origine O du repère en fonction du temps t, exprimé en secondes. On prendra t dans l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$. Les lois de Newton conduisent à l'équation différentielle du mouvement

$$\text{(E)} \qquad 25x' + 200x'' = 50, \text{ où}$$

x' est la dérivée de x par rapport au temps t,

x'' est la dérivée seconde de x par rapport au temps t.

1. On note $v(t)$ la vitesse du chariot au temps t ; on rappelle que $v(t) = x'(t)$.
   Prouver que x est solution de (E) si et seulement si x' est solution de l'équation différentielle (F) $\quad v' = -\dfrac{1}{8}v + \dfrac{1}{4}$.
   Résoudre l'équation différentielle (F).
2. On suppose que, à l'instant $t = 0$, on a : $x(0) = 0$ et $x'(0) = 0$.

   a. Calculer, pour tout nombre réel t positif, $x'(t)$.

   b. En déduire que l'on a, pour tout nombre réel t positif,
   $x(t) = 2t - 16 + 16\mathrm{e}^{\frac{-t}{8}}$.

3. Calculer $\mathrm{V} = \lim\limits_{t \to +\infty} v(t)$. Pour quelles valeurs de t la vitesse du chariot est-elle inférieure ou égale ? 90 % de sa valeur limite V ?
4. Quelle est la distance parcourue par le chariot au bout de 30 secondes ? On exprimera cette distance en mètres, au décimètre près.

Baccalauréat S Liban juin 2004

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Le personnel d'un très grand hôpital est réparti en trois catégories : les médecins, les soignants (non médecins) et le personnel AT (administratif ou technique).

12 % des personnels sont des médecins et 71 % sont des soignants.

67 % des médecins sont des hommes et 92 % des soignants sont des femmes.

On donnera une valeur approchée de tous les résultats à 10^{-4} près.

1. On interroge au hasard un membre du personnel de cet hôpital.
   - **a.** Quelle est la probabilité d'interroger une femme soignante ?
   - **b.** Quelle est la probabilité d'interroger une femme médecin ?
   - **c.** On sait que 80 % du personnel est féminin. Calculer la probabilité d'interroger une femme AT.

     En déduire la probabilité d'interroger une femme sachant que la personne interrogée fait partie du personnel AT.
2. Tout le personnel de cet hôpital a un temps de trajet domicile-hôpital au plus égal à une heure et on suppose que la durée exacte du trajet est une variable aléatoire uniformément répartie sur $[0 ; 1]$.

   On interroge au hasard un membre du personnel de cet hôpital. Quelle est la probabilité pour que la personne interrogée ait une durée de trajet comprise entre 15 min et 20 min ?
3. Une entreprise souhaite envoyer un courrier publicitaire à 40 personnes qui travaillent dans cet hôpital. Elle a la liste du personnel mais ne connaît pas la fonction de chacun. Elle choisit au hasard 40 noms de la liste (en raison de la taille de la population, on considère qu'il s'agit de 40 tirages successifs indépendants avec remise).

   Quelle est la probabilité que, sur les 40 courriers envoyés, 10 exactement soient reçus par des médecins ?

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté au repère $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On prendra pour unité graphique 2 cm.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$(z-2\text{i})\left(z^2-2z+2\right)=0.$$

   Donner les solutions sous forme algébrique et sous forme exponentielle (justifier les réponses).
2. Soient A et B les points d'affixes respectives $z_\text{A}=1+\text{i}$ et $z_\text{B}=2\text{i}$.

   À tout complexe z différent de A on associe le complexe

$$z'=\frac{z-2\text{i}}{z-1-\text{i}}.$$

   - **a.** Soit (E) l'ensemble des points M d'affixe z tels que z' soit imaginaire pur.

     Montrer que $\text{B} \in (E)$.

     Déterminer et construire l'ensemble (E).

b. Soit (F) l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z'| = 1$.
Déterminer et construire (F).

3. Soit R la rotation de centre $\Omega\left(\dfrac{3}{2}\ ;\ \dfrac{5}{2}\right)$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

a. Calculer l'affixe du point B', image de B par R et l'affixe du point I', image par R du point $\mathrm{I}\left(\dfrac{1}{2}\ ;\ \dfrac{3}{2}\right)$.

b. Quelles sont les images de (E) et (F) par R ?

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$. On prendra 1 cm pour unité graphique. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives

$$z_{\mathrm{A}} = 2+\mathrm{i},\quad z_{\mathrm{B}} = 1+2\mathrm{i},\quad z_{\mathrm{C}} = 6+3\mathrm{i},\quad z_{\mathrm{D}} = -1+6\mathrm{i}.$$

1. Représenter les points A, B, C et D.
2. Montrer qu'il existe une similitude directe f telle que $f(\mathrm{A}) = \mathrm{B}$ et $f(\mathrm{C}) = \mathrm{D}$.
Montrer que cette similitude est une rotation, et préciser ses éléments caractéristiques.
3. Soit J le point d'affixe $3+5\mathrm{i}$.
Montrer que la rotation R de centre J et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ transforme A en D et C en B.
4. On appelle I le point d'affixe $1+\mathrm{i}$, M et N les milieux respectifs de segments [AC] et [BD].
Déterminer, en utilisant les résultats des questions précédentes, la nature du quadrilatère IMJN.
5. On considère les points P et Q tels que les quadrilatères IAPB et ICQD sont des carrés directs.

a. Calculer les affixes z_P et z_Q des points P et Q.

b. Déterminer $\dfrac{\mathrm{I}P}{\mathrm{IA}}$ et $\dfrac{\mathrm{I}Q}{\mathrm{IC}}$ ainsi qu'une mesure des angles $\left(\overrightarrow{\mathrm{IA}},\ \overrightarrow{\mathrm{I}P}\right)$ et $\left(\overrightarrow{\mathrm{IC}},\ \overrightarrow{\mathrm{I}Q}\right)$.
En déduire les éléments caractéristiques de la similitude directe g telle que $g(\mathrm{A}) = P$ et $g(\mathrm{C}) = Q$.

c. En déduire que J est l'image de M par g. Que peut-on en déduire pour J ?

EXERCICE 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

1. Soit x un nombre réel positif ou nul et k un entier strictement supérieur à x.

a. Montrer par récurrence sur n que, pour tout entier n supérieur ou égal à k,

$$\frac{k^n}{n!} \leqslant \frac{k^k}{k!}.$$

b. En déduire que, pour tout entier n supérieur ou égal à k,

$$\frac{x^n}{n!} \leqslant \left(\frac{x}{k}\right)^n \times \frac{k^k}{k!}.$$

c. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x^n}{n!} = 0.$$

2. **a.** Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2,

$$\frac{n^{n-1}}{n!} \geqslant 1.$$

(on pourra écrire $\dfrac{n^{n-1}}{n!}$ comme un produit de $n-1$ facteurs supérieurs ou égaux à 1).

b. En déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty.$$

EXERCICE 4 **7 points**

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x + \ln 4 + \frac{2}{e^x + 1},$$

et $(\mathscr{C})$ sa représentation graphique dans un repère du plan.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$, et sa limite en $-\infty$.
2. Calculer, pour tout réel x, $f(x) + f(-x)$.
   Que peut-on en déduire pour le point $A(0\ ;\ 1 + \ln 4)$?
3. Étudier le sens de variations de la fonction f et dresser son tableau de variations.
4. **a.** Justifier que, pour tout réel m, l'équation $f(x) = m$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$.

   b. Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-1} de la solution a de l'équation $f(x) = 3$.
   Justifier la réponse.

   c. Pour quelle valeur de m le nombre $-a$ est-il la solution de l'équation $f(x) = m$?
5. **a.** Montrer que pour tout réel x, $f(x) = x + 2 + \ln 4 - \dfrac{2e^x}{e^x + 1}$.

   b. Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x + \ln 4$ et la droite (Δ') d'équation $y = x + 2 + \ln 4$ sont des asymptotes de la courbe $(\mathscr{C})$.
   Étudier la position de la courbe $(\mathscr{C})$ par rapport à son asymptote (Δ).
6. **a.** On considère un réel positif α.
   Que représente l'intégrale : $I(\alpha) = \displaystyle\int_0^{\alpha} \left[f(x) - x - \ln 4\right] \mathrm{d}x$?

   b. Montrer que $I(\alpha) = 2\ln\left(\dfrac{2e^{\alpha}}{e^{\alpha} + 1}\right)$. (On pourra utiliser le résultat de la question **5 a**).

   c. Calculer α pour que $I(\alpha) = 1$, puis donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

Baccalauréat S Polynésie juin 2004

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Le laboratoire de physique d'un lycée dispose d'un parc d'oscilloscopes identiques. La durée de vie en années d'un oscilloscope est une variable aléatoire notée X qui suit la « loi de durée de vie sans vieillissement » (ou encore loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$.

Toutes les probabilités seront données à 10^{-3} près.

1. Sachant que $p(X > 10) = 0,286$, montrer qu'une valeur approchée à 10^{-3} près de λ est $0,125$.

   On prendra $0,125$ pour valeur de λ dans la suite de l'exercice.
2. Calculer la probabilité qu'un oscilloscope du modèle étudié ait une durée de vie inférieure à 6 mois.
3. Sachant qu'un appareil a déjà fonctionné huit années, quelle est la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure dix ans ?
4. On considère que la durée de vie d'un oscilloscope est indépendante de celle des autres appareils. Le responsable du laboratoire décide de commander 15 oscilloscopes. Quelle est la probabilité qu'au moins un oscilloscope ait une durée de vie supérieure â 10 ans ?
5. Combien l'établissement devrait-il acheter d'oscilloscopes pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux fonctionne plus de 10 ans soit supérieure à 0,999 ?

   Rappel :

   Loi exponentielle de paramètre λ *sur* $[0\,;\,+\infty[$, *dite aussi loi de durée de vie sans vieillissement* :

   pour $0 \leqslant a \leqslant b,\ p([a\,;\,b]) = \displaystyle\int_a^b \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$ et

   pour $c \geqslant 0,\ p([c\,;\,+\infty[) = 1 - \displaystyle\int_0^c \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidat n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$. On prendra pour unité graphique 1 cm.

1. On désigne par A, B et I les points d'affixes respectives :

$$z_{\mathrm{A}} = 3 + 2\mathrm{i}, \quad z_{\mathrm{B}} = -3 \quad \text{et} \quad z_{\mathrm{I}} = 1 - 2\mathrm{i}.$$

   a. Faire une figure que l'on complétera au cours de l'exercice.

   b. Écrire sous forme algébrique le nombre complexe $Z = \dfrac{z_{\mathrm{I}} - z_{\mathrm{A}}}{z_{\mathrm{I}} - z_{\mathrm{B}}}$.

   Que peut-on en déduire sur la nature du triangle IAB ?

   c. Calculer l'affixe z_C du point C image de I par l'homothétie de centre A et de rapport 2.

   d. Soit D le barycentre du système $\{(\mathrm{A},\ 1)\ ;\ (\mathrm{B},\ -1)\ ;\ (C,\ 1)\}$; calculer l'affixe z_D du point D.

e. Montrer que ABCD est un carré.

2. Déterminer et construire l'ensemble Γ_1 des points M du plan tels que :

$$\left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\right\|.$$

3. On considère l'ensemble Γ_2 des points M du plan tels que

$$\left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = 4\sqrt{5}.$$

a. Montrer que B appartient à Γ_2.

b. Déterminer et construire l'ensemble Γ_2.

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan P est rapporté a un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On prendra pour unité graphique 3 cm.
On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives a, b, c et d telles que

$$\mathrm{a} = 3 \qquad \mathrm{b} = 1 + \frac{2}{3}\mathrm{i} \qquad \mathrm{c} = 3\mathrm{i} \quad \text{et} \quad \mathrm{d} = -\frac{1}{3}\mathrm{i}.$$

1. Représenter les points A, B, C et D.

2. Déterminer l'angle θ et le rapport k de la similitude directe s transformant A en B et C en D.

3. Donner l'écriture complexe de s. En déduire l'affixe du centre I de s.

4. Soit M le point de coordonnées $(x\ ;\ y)$ et $M'(x'\ ;\ y')$ son image par s.
Montrer que : $\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & -\frac{1}{3}y + 1 \\ y' & = & \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} \end{array}\right.$

5. On construit une suite (M_n) de points du plan en posant

$$\left\{\begin{array}{lcl} \mathrm{M}_0 & = & \mathrm{A} \\ \multicolumn{3}{l}{\text{et, pour tout entier naturel } n} \\ M_{n+1} & = & s(M_n) \end{array}\right.$$

Pour tout entier naturel, on note z_n l'affixe du point M_n et on pose $r_n = |z_n - 1|$.

a. Montrer que (r_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

b. Déterminer le plus petit entier naturel k tel que $\mathrm{I}M_k \leqslant 10^{-3}$.

EXERCICE 3 **6 points**
Commun à tous les candidats

1. Pour tout réel k positif ou nul, on considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_k(x) = x + \frac{1 - k\mathrm{e}^x}{1 + k\mathrm{e}^x}.$$

a. Justifier que, pour rout réel k positif ou nul, la fonction f_k est solution de l'équation différentielle :

$$(\mathrm{E}) \qquad : \quad 2y' = (y - x)^2 + 1.$$

b. En déduire le sens de variations de f_k sur $\mathbb{R}$.

2. On note $\mathscr{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Sur l'annexe, on a représenté la droite D d'équation $y = x - 1$, la droite D$'$ d'équation $y = x + 1$ et plusieurs courbes $\mathscr{C}_k$ correspondant à des valeurs particulières de k.

Déterminer le réel k associé à la courbe $\mathscr{C}$ passant par le point O puis celui associé à la courbe $\mathscr{C}'$ passant par le point A de coordonnées $(1 ; 1)$.

3. On remarque que, pour tout x réel, on a :

$$f_k(x) = x - 1 + \frac{2}{1 + k\text{e}^x} \quad (1) \quad \text{et} \quad f_k(x) = x + 1 - \frac{2k\text{e}^x}{1 + k\text{e}^x} \quad (2).$$

En déduire pour tout k strictement positif :

– la position de la courbe $\mathscr{C}_k$ par rapport aux droites D et D$'$.
– les asymptotes de la courbe $\mathscr{C}_k$.

4. Cas particulier : $k = 1$.

a. Justifier que f_1 est impaire.

b. Soit la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \int_0^x f_1(t)\,\text{d}t.$$

Interpréter graphiquement le réel $F(x)$ dans les deux cas : $x > 0$ et $x < 0$.
Déterminer alors la parité de F à l'aide d'une interprétation graphique.

c. Déterminer les variations de F sur $\mathbb{R}$.

d. En utilisant l'égalité (2), calculer explicitement $F(x)$.

EXERCICE 4 **5 points**

Commun à tous les candidats

On considère la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$I_n = \int_0^1 \frac{\text{e}^{-t^2}}{1 + n + t}\,\text{d}t.$$

1. **a.** Déterminer le sens de variations de cette suite.

b. Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, est une suite positive.

c. Montrer que pour tout $t \in [0 ; 1]$ on a $\dfrac{\text{e}^{-t^2}}{1 + t + n} \leqslant \dfrac{1}{1 + n}$ et en déduire que $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n + 1}$.

Que peut-on en conclure quant à la convergence de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

2. On considère f et g deux fonctions définies sur $[0 ; 1]$ par :

$$f(x) = \text{e}^{-x} + x - 1 \qquad \text{et} \qquad g(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \text{e}^{-x}.$$

a. Étudier le sens de variations et le signe de f.

b. En déduire le sens de variations de g sur $[0 ; 1]$.

c. Établir, pour tout x appartenant à $[0 ; 1]$, l'encadrement :

$$1 - x \leqslant \text{e}^{-x} \leqslant 1 - x + \frac{x^2}{2}.$$

d. En déduire un encadrement de e^{-t^2} pour tout t appartenant à $[0\,;\,1]$.

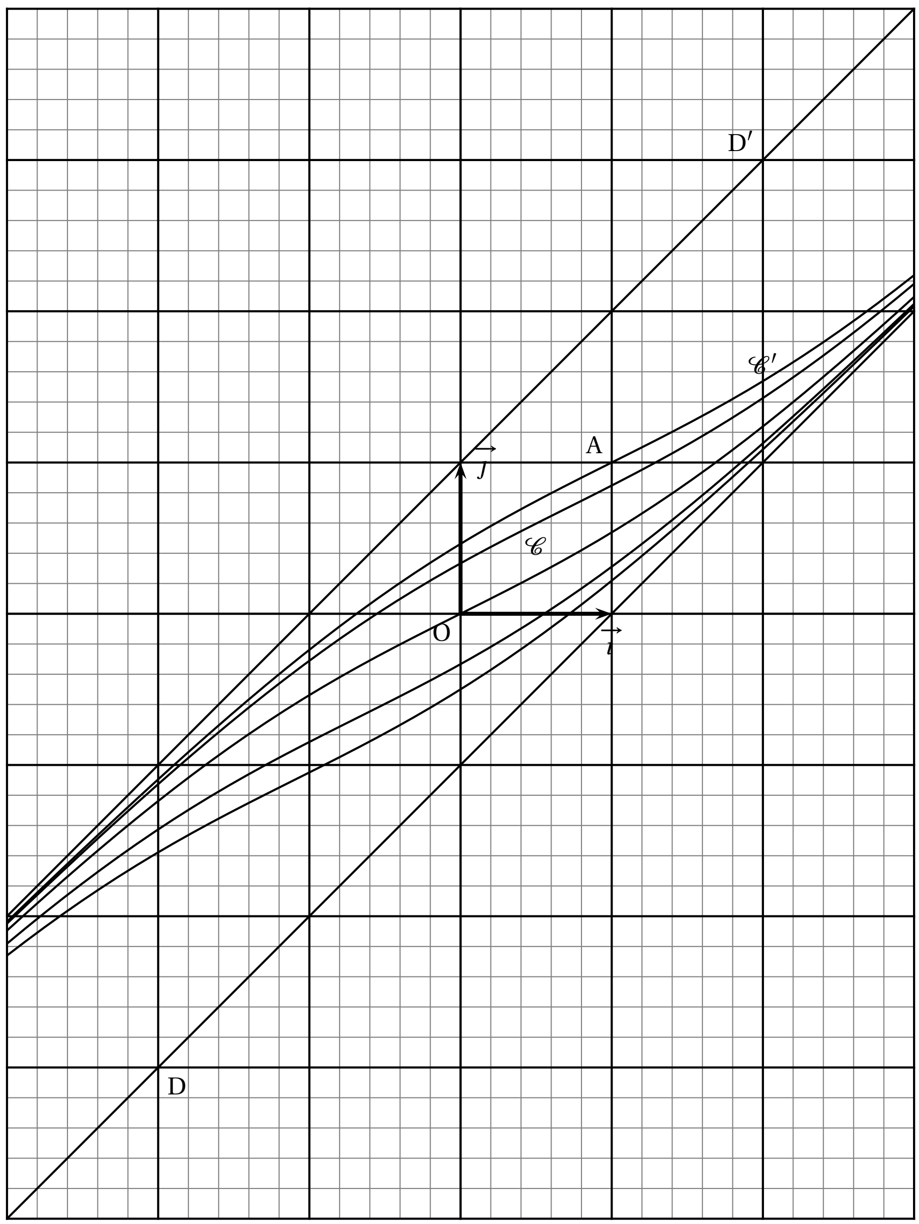
e. Établir l'encadrement :

$$\frac{2}{3(n+2)} \leqslant I_n \leqslant \frac{23}{30(n+1)}$$

f. Donner une valeur de p telle que $I_p \leqslant 10^{-2}$.

Document à rendre avec la copie

Annexe



Baccalauréat S La Réunion juin 2004

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = 1 - x^2\mathrm{e}^{1-x^2}.$$

Son tableau de variations est le suivant :

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

Sa courbe représentative $\mathscr{C}$ et son asymptote Δ, d'équation $y = 1$, sont tracées en annexe, à rendre avec la copie.

A - Lecture graphique

1. k est un nombre réel donné. En utilisant la représentation graphique, préciser en fonction de k le nombre de solutions dans l'intervalle $[0~;~+\infty[$ de l'équation $f(x) = k$.
2. n étant un entier naturel non nul, déterminer les valeurs de n pour lesquelles l'équation $f(x) = \dfrac{1}{n}$ admet deux solutions distinctes.

B - Définition et étude de deux suites

1. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Montrer que l'équation $f(x) = \dfrac{1}{n}$ admet deux solutions u_n et v_n respectivement comprises dans les intervalles $[0~;~1]$ et $[1~;~+\infty[$.
2. Sur la feuille en annexe, construire sur l'axe des abscisses les réels u_n et v_n pour n appartenant à l'ensemble $\{2~;~3~;4\}$.
3. Déterminer le sens de variation des suites (u_n) et (v_n).
4. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
   Procéder de même pour la suite (v_n). En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},~\vec{u},~\vec{v}\right)$; i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

Soient les points A, B et C d'affixes respectives i, $1+\mathrm{i}$ et $-1+\mathrm{i}$.

Soit f l'application qui, à tout point M du plan différent de A, d'affixe z, associe le point M' du plan d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{\mathrm{i}z + 2}{z - \mathrm{i}}.$$

1. **a.** Déterminer les images de B et de C par l'application f.

b. Montrer que, pour tout nombre complexe z différent de i, on a la relation :

$$(z' - \mathrm{i})(z - \mathrm{i}) = 1.$$

c. Soit D le point d'affixe 1 + 2i. Placer les points A, B, C et D sur une figure (unité graphique 4 cm).

Déduire de la question précédente une construction du point D′ image du point D par l' application f.

2. Soit R un nombre réel strictement positif.

Quelle est l'image par l'application f du cercle de centre A et de rayon R ?

3. **a.** Montrer que, si l'affixe du point M est un imaginaire pur différent de i, alors l'affixe du point M' est un imaginaire pur. Que signifie ce résultat pour l'image par l'application f de l'axe imaginaire privé du point A ?

b. Soit $\mathscr{D}$ la droite passant par le point A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$. Déterminer l' image de la droite $\mathscr{D}$ privée du point A par l'application f.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On rappelle la propriété, connue sous le nom de petit théorème de Fermat : « soit p un nombre premier et a un entier naturel premier avec p ; alors $a^{p-1} - 1$ est divisible par p ».

1. Soit p un nombre premier impair.

a. Montrer qu'il existe un entier naturel k, non nul, tel que $2^k \equiv 1 \quad [p]$.

b. Soit k un entier naturel non nul tel que $2^k \equiv 1 \quad [p]$ et soit n un entier naturel. Montrer que, si k divise n, alors $2^n \equiv 1 \quad [p]$.

c. Soit b tel que $2^b \equiv 1 \quad [p]$, b étant le plus petit entier non nul vérifiant cette propriété.

Montrer, en utilisant la division euclidienne de n par b, que si $2^n \equiv 1 \quad [p]$, alors b divise n.

2. Soit q un nombre premier impair et le nombre $A = 2^q - 1$.

On prend pour p un facteur premier de A.

a. Justifier que : $2^q \equiv 1 \quad [p]$.

b. Montrer que p est impair.

c. Soit b tel que $2^b \equiv 1 \quad [p]$, b étant le plus petit entier non nul vérifiant cette propriété.

Montrer, en utilisant **1.** que b divise q. En déduire que $b = q$.

d. Montrer que q divise $p - 1$, puis montrer que $p \equiv 1 \quad [2q]$.

3. Soit $A_1 = 2^{17} - 1$. Voici la liste des nombres premiers inférieurs à 400 et qui sont de la forme $34m + 1$, avec m entier non nul : 103, 137, 239, 307. En déduire que A_1 est premier.

EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte.

Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 1 point ; une réponse inexacte enlève un demi-point ; l'absence de réponse est comptée 0 point.

Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

Première partie

Pour réaliser des étiquettes de publipostage, une entreprise utilise deux banques de données :

B_1, 6 000 adresses, dont 120 sont erronées et 5 880 sont exactes,

B_2, contenant 4 000 adresses, dont 200 sont erronées et 3 800 sont exactes.

1. On prélève au hasard, avec remise, 10 étiquettes parmi les 6 000 réalisées à l'aide de B_1. La probabilité qu'exactement trois de ces étiquettes comportent une adresse erronée est :

$$\text{A} : \frac{\binom{120}{3}+\binom{5\,880}{7}}{\binom{6\,000}{10}} \qquad \text{B} : \frac{3}{120}$$

$$\text{C} : \binom{10}{3}\times\left(\frac{120}{6\,000}\right)^3\times\left(\frac{5\,880}{6\,000}\right)^7 \qquad \text{D} : \binom{10}{3}\times\left(\frac{3}{120}\right)^3\times\left(\frac{7}{5\,880}\right)^7$$

2. Parmi les 10 000 étiquettes, on en choisit une au hasard. Sachant que l'étiquette comporte une adresse exacte, la probabilité qu'elle ait été réalisée à l'aide de B_1 est :

$$\text{A} : 0,98 \quad \text{B} : \frac{0,4\times 0,95}{0,6\times 0,98+0,6\times 0,02} \quad \text{C} : 0,6\times 0,98 \quad \text{D} : \frac{0,6\times 0,98}{0,6\times 0,98+0,4\times 0,95}$$

Deuxième partie

La durée de vie, exprimée en heures, d'un robot jusqu'à ce que survienne la première panne est modélisée par une loi de probabilité p de durée de vie sans vieillissement définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ (loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,000\,5$). Ainsi la probabilité que le robot tombe en panne avant l'instant t est :

$$p([0~;~t[) = \int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x.$$

1. La probabilité qu'un robot ait une durée de vie supérieure à 2 500 heures est :

$$\text{A} : \mathrm{e}^{-\frac{2\,500}{2\,000}} \quad \text{B} : \mathrm{e}^{\frac{5}{4}} \quad \text{C} : 1-\mathrm{e}^{-\frac{2\,500}{2\,000}} \quad \text{D} : \mathrm{e}^{-\frac{2\,000}{2\,500}}$$

2. La durée de vie moyenne d'un robot ménager est donnée par la formule :
$\mathrm{E} = \displaystyle\lim_{t\to+\infty}\int_0^t \lambda x \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x.$

a. L'intégrale $\displaystyle\int_0^t \lambda x\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$ est égale à :

$$\text{A} : \lambda\frac{t^2}{2}\mathrm{e}^{-\lambda t} \quad \text{B} : -t\mathrm{e}^{-\lambda t}-\frac{\mathrm{e}^{-\lambda t}}{\lambda}+\frac{1}{\lambda} \quad \text{C} : \lambda t\mathrm{e}^{-\lambda t}-\lambda\mathrm{e}^{-\lambda t}-\lambda \quad \text{D} : t\mathrm{e}^{-\lambda t}-\frac{\mathrm{e}^{-\lambda t}}{-\lambda}$$

b. La durée de vie moyenne des robots, exprimée en heures, est :

A : 3 500 B : 2 000 C : 2 531,24 D : 3 000

EXERCICE 4 **6 points**

Commun à tous les candidats

On désigne par f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et par f' sa fonction dérivée.

Ces fonctions vérifient les propriétés suivantes :

(1) pour tout nombre réel x, $\left[f'(x)\right]^2-\left[f(x)\right]^2 = 1$,

(2) $f'(0) = 1$,

(3) la fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. **a.** Démontrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) \neq 0$.

   b. Calculer $f(0)$.

2. En dérivant chaque membre de l'égalité de la proposition (1), démontrer que : (4) pour tout nombre réel x, $f''(x) = f(x)$, où f'' désigne la fonction dérivée seconde de la fonction f.

3. On pose : $u = f' + f$ et $v = f' - f$.

   a. Calculer $u(0)$ et $v(0)$.

   b. Démontrer que $u' = u$ et $v' = -v$.

   c. En déduire les fonctions u et v.

   d. En déduire que, pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{\text{e}^x - \text{e}^{-x}}{2}$.

4. **a.** Étudier les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.

   b. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

5. **a.** Soit m un nombre réel. Démontrer que l'équation $f(x) = m$ a une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

   b. Déterminer cette solution lorsque $m = 3$ (on en donnera la valeur exacte puis une valeur approchée décimale à 10^{-2} près).

ANNEXE DE L'EXERCICE 1

À compléter et à rendre avec la copie