Baccalauréat S 2005

L'intégrale de septembre 2004 à juin 2005

Pour un accès direct cliquez sur les liens bleus

Baccalauréat S Antilles–Guyane septembre 2004

EXERCICE 1 **5 points**

Soit f la fonction définie sur $[0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x+2}.$$

Les deux parties peuvent être abordées indépendamment.

Partie A

1. Dresser le tableau des variations de f sur $[0~;~+\infty[$ et déterminer les éventuelles asymptotes de la courbe représentative.
2. **a.** Tracer sur la calculatrice graphique les courbes de la fonction f et de la fonction logarithme népérien ; on notera $\mathscr{L}$ cette dernière. Conjecturer avec ce graphique le nombre de solutions de l'équation

$$f(x) = \ln(x)$$

sur $[1~;~+\infty[$.

b. Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$g(x) = \ln(x) - f(x)$$

est strictement croissante sur $[1~;~+\infty[$.

En déduire que l'équation $f(x) = \ln(x)$ admet une unique solution α sur $[1~;~+\infty[$.

c. Déterminer à 10^{-3} près une valeur approchée de α.

Partie B

1. À l'aide d'une double intégration par parties, déterminer :

$$\mathrm{I} = \int_0^3 x^2\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x.$$

2. On définit le solide $\mathscr{S}$ obtenu par révolution autour l'axe $(\mathrm{O}x)$ de la courbe d'équation $y = f(x)$ pour $0 \leqslant x \leqslant 3$ dans le plan $(x\mathrm{O}y)$ (repère orthonormal d'unité 4 cm). On rappelle que le volume $\mathscr{V}$ du solide est donné par :

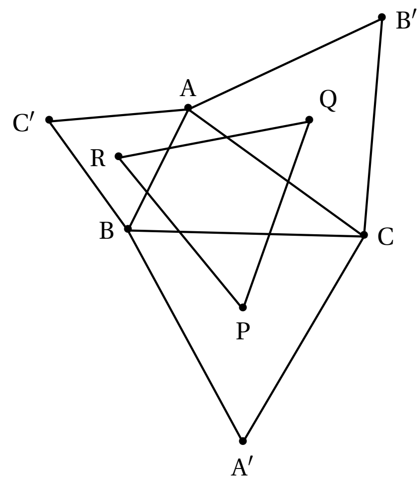
$$\mathscr{V} = \pi\int_0^3 [f(x)]^2\,\mathrm{d}x.$$

a. Exprimer $\mathscr{V}$ en fonction de I.

b. Déterminer alors une valeur approchée à 1 cm^3 près du volume du solide.

EXERCICE 2 **5 points**

Dans le plan orienté muni d'un repère orthonormal direct, on considère ABC un triangle direct sur lequel on construit extérieurement trois triangles équilatéraux BCA$'$, ACB$'$ et ABC$'$. On considère respectivement les points P, Q et R centres de gravités respectifs des triangles B CA$'$, ACB$'$ et ABC$'$.



On note $a,\ b,\ c,\ a',\ b',\ c',\ p,\ q$ et r les affixes respectives des points A, B, C, A′, B′, C′, P, Q et R.

1. **a.** Traduire, avec les affixes des points concernés, que C′ est l'image de A dans une rotation d'angle de mesure dont on précisera le centre.

   b. Montrer que $a' + b' + c' = a + b + c$.

2. En déduire que $p + q + r = a + b + c$.
3. En déduire que les triangles ABC, A′B′C′ et PQR ont même centre de gravité.
4. Montrer que :

$$3(q-p) = (b'-c) + (c-a') + (a-b).$$

   On admettra que, de même :

$$3(r-p) = (a-c) + (b-a') + (c'-b).$$

5. Justifier les égalités suivantes :

$$a-c = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(b'-c)\ ;\ b-a' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(c-a')\ ;\ c'-b = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(a-b).$$

6. Déduire des **questions 4.** et **5.** que le triangle PQR est équilatéral.

EXERCICE 3 (OBLIGATOIRE) **5 points**

$\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ est un repère orthonormal du plan $\mathscr{P}$.
Soit A le point d'affixe 1 ; soit B le point d'affixe -1.
Soit F l'application de $\mathscr{P}$ privé de O dans $\mathscr{P}$ qui, à tout point M distinct de O, d'affixe z, associe le point $M' = F(M)$ d'affixe $z' = \dfrac{-1}{\overline{z}}$.

1. **a.** Soit E le point d'affixe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$, on appelle E′ son image par F. Déterminer l'affixe de E′ sous forme exponentielle, puis sous forme algébrique.

   b. On note $\mathscr{C}_1$ le cercle de centre O et de rayon 1. Déterminer l'image de $\mathscr{C}_1$ par l'application F.

2. **a.** Soit K le point d'affixe $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$ et K′ l'image de K par F. Calculer l'affixe de K′.

   b. Soit $\mathscr{C}_2$ le cercle de centre O et de rayon 2. Déterminer l'image de $\mathscr{C}_2$ par l'application F.

3. On désigne par R un point d'affixe $1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ où $\theta \in]-\pi\ ;\ \pi[$; R appartient au cercle $\mathscr{C}_3$ de centre A et de rayon 1.

   a. Montrer que $z' + 1 = \dfrac{\overline{z} - 1}{\overline{z}}$.
   En déduire que $\left|z'+1\right| = \left|z'\right|$.

b. Si on considère maintenant les points d'affixe $1+\text{e}^{\text{i}\theta}$ où θ décrit l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi[$, montrer que leurs images sont situées sur une droite. On pourra utiliser le résultat de **a.**.

EXERCICE 3 (SPÉCIALITÉ) **5 points**

Pour chacune des six affirmations, dire si elle est vraie ou si elle est fausse, en justifiant le choix effectué.

1. Le PGCD de 2 004 et 4 002 est 6.
2. Si p et q sont deux entiers naturels non nuls, $2^{pq}-1$ est divisible par $2^{p}-1$ et par $2^{q}-1$.
3. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, 2^n-1 n'est jamais divisible par 9.
4. L'ensemble des couples d'entiers solutions de l'équation :

$$24x+35y=9$$

est l'ensemble des couples :

$$(-144+70k\ ;\ 99-24k) \text{ où } k\in\mathbb{Z}.$$

5. Soient A et B deux points distincts du plan ; si on note f l'homothétie de centre A et de rapport 3 et g l'homothétie de centre B et de rapport $\dfrac{1}{3}$ alors $g\circ f$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{\text{AB}}$. .
6. Soit s la similitude d'écriture complexe $z'=\text{i}\overline{z}+(1-\text{i})$, l'ensemble des points invariants de s est une droite.

EXERCICE 4 **5 points**

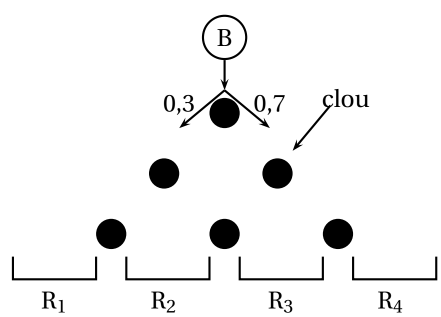
Pour chacune des trois questions, la totalité des points sera donnée si la réponse est correctement justifiée.

Les trois questions sont indépendantes.

1. La probabilité pour un individu d'une population d'être atteint d'une maladie M est égale à 0,003. Un test de dépistage, pour cette maladie, a été réalisé ; avec ce test, on peut dire que
   • si une personne est atteinte de la maladie M, le test est positif dans 50 % des cas ;
   • le test est positif pour 3 % des personnes saines.
   Quelle est à 0,01 près la probabilité d'avoir la maladie M lorsque le test est positif ?

☐ 0,95 ☐ 0,9 ☐ 0,15 ☐ 0,05

2. On considère une planche à clous de ce type :



On lance une boule B du haut de la planche, elle tombe alors dans l'un des quatre récipients notés R$_1$, R$_2$, R$_3$ et R$_4$. À chaque étape, la bille a une probabilité de 0,3 d'aller vers la gauche et 0,7 d'aller vers la droite (gauche et droite

relatives à l'observateur).
On note p_1 la probabilité que la bille tombe dans le bac R_1 ou dans le bac R_3 et p_2 la probabilité que la bille tombe dans le bac R_2 ou dans le bac R_4.
Que valent p_1 et p_2 ?

☐ $p_1 = p_2 = 0,5$ ☐ $p_1 = 0,216$ et $p_2 = 0,784$
☐ $p_1 = 0,468$ et $p_2 = 0,532$ ☐ $p_1 = 0,468$ et $p_2 = 0,432$.

3. Les 1 000 premières décimales de π sont données ici par un ordinateur :
1415926535 8979323846 2643383279 5028841971 6939937510
5820974944 5923078164 0628620899 8628034825 3421170679
8214808651 3233066470 9384460959 0582235725 3594085234
8111745028 4102701930 5211055596 4462294895 4930301964
4288109756 6593344612 8475648233 7867831652 7120190914
5648566923 4603486534 5432664825 3393607260 2491412737
2450700660 6315580574 8815209209 6282925409 1715364367
8925903600 1133053054 8820466525 3841469519 4151160943
3057270365 7595919530 9218611738 1932611793 1051185480
7446297996 2749567355 8857527240 9122793318 3011949129
8336733624 4065664308 6025394946 3952247371 9070217986
0943702770 5392171762 9317675238 4674818467 6691051320
0056812714 5263560827 7857753427 9778900917 3637178721
4684409012 2495343054 6549585371 0507922796 8925892354
2019956112 1290219608 6403441815 9813629774 7713099605
1870721134 9999998372 9780499510 5973173281 6096318599
0244594553 4690830264 2522300253 3446850352 6193110017
1010003137 8387528865 8753320830 1420617177 6691473035
9825349042 8755460731 1595620633 8235378759 3751957781
8577805321 7122600661 3001927876 6111959092 1642019894
En groupant par valeurs entre 0 et 9 ces décimales, on obtient le tableau suivant :

Valeurs	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Occurrences	93	116	102	102	94	97	94	95	101	106

Avec un tableur, on a simulé 1 000 expériences de 1 000 tirages aléatoires d'un chiffre compris entre 0 et 9.

Pour chaque expérience, on a calculé $d^2 = \sum_{k=0}^{k=9} \left(f_k - 0,1\right)^2$ où f_k représente, pour l'expérience, la fréquence observée du chiffre k.
On a alors obtenu une série statistique pour laquelle on a calculé le premier et neuvième décile (d_1 et d_9), le premier et troisième quartile (Q_1 et Q_3) et la médiane (Me) :
$d_1 = 0,000422$; $Q_1 = 0,000582$; Me $= 0,000822$; $Q_3 = 0,001136$; $d_9 = 0,00145$.

En effectuant le calcul de d_2 sur la série des 1 000 premières décimales de π, on obtient :

☐ 0,000 456 ☐ 0,004 56 ☐ 0,000 314

Un statisticien découvrant le tableau et ignorant qu'il s'agit des décimales de π, fait l'hypothèse que la série est issue de tirages aléatoires indépendants suivant une loi équirépartie. Il prend un risque de 10 % de rejeter cette hypothèse quand elle est vraie. Accepte-t-il cette hypothèse ?

☐ Oui ☐ Non ☐ Il ne peut pas conclure.

Durée : 4 heures

Baccalauréat S France septembre 2004

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.
Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

EXERCICE 1 — 4 points

Commun à tous les candidats

1. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x)=\frac{1}{x\left(x^2-1\right)}.$$

a. Déterminer les nombres réels a, b et c tels que l'on ait, pour tout $x>1$:

$$g(x)=\frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x-1}.$$

b. Trouver une primitive G de g sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$.

2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{2x}{\left(x^2-1\right)^2}.$$

Trouver une primitive F de f sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$.

3. En utilisant les résultats obtenus précédemment, calculer :

$$I=\int_2^3\frac{2x}{\left(x^2-1\right)^2}\ln x\,\mathrm{d}x.$$

On donnera le résultat exact sous la forme $p\ln 2+q\ln 3$, avec p et q rationnels.

EXERCICE 2 — 6 points

Commun à tous les candidats

L'exercice comporte une annexe, à rendre avec la copie.

Le but de ce problème est d'étudier, pour x et y éléments distincts de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, les couples solutions de l'équation $x^y=y^x$ (E) et, en particulier, les couples constitués d'entiers.

1. Montrer que l'équation (E) est équivalente à $\dfrac{\ln x}{x}=\dfrac{\ln y}{y}$.

2. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$h(x)=\frac{\ln x}{x}.$$

La courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction h est donnée en annexe ; x_0 est l'abscisse du maximum de la fonction h sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

a. Rappeler la limite de la fonction h en $+\infty$ et déterminer la limite de la fonction h en 0.

b. Calculer $h'(x)$, où h' désigne la fonction dérivée de la fonction h ; retrouver les variations de la fonction h.

Déterminer les valeurs exactes de x_0 et de $h(x_0)$.

c. Déterminer l'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses.

3. Soit λ un élément de l'intervalle $\left]0\,;\,\dfrac{1}{\text{e}}\right[$.

Prouver l'existence d'un unique nombre réel a de l'intervalle $]1\,;\,\text{e}[$ et d'un unique nombre réel b de l'intervalle $]\text{e}\,;\,+\infty[$ tels que $h(a) = h(b) = \lambda$.

Ainsi le couple $(a,\ b)$ est solution de (E).

4. On considère la fonction s qui, à tout nombre réel a de l'intervalle $[1\,;\,\text{e}[$, associe l'unique nombre réel b de l'intervalle $]\text{e}\,;\,+\infty[$ tel que $h(a) = h(b)$ (on ne cherchera pas à exprimer $s(a)$ en fonction de a).

Par lecture graphique uniquement et sans justification, répondre aux questions suivantes

a. Quelle est la limite de s quand a tend vers 1 par valeurs supérieures ?

b. Quelle est la limite de s quand a tend vers e par valeurs inférieures ?

c. Déterminer les variations de la fonction s. Dresser le tableau de variations de s.

5. Déterminer les couples d'entiers distincts solutions de (E).

EXERCICE 3 — 5 points

Commun à tous les candidats

Un récipient contient un gaz constitué de deux sortes de particules : 75 % de particules A et 25 % de particules B.

Les particules sont projetées sur une cible formée de deux compartiments KI et K2.

L'expérience est modélisée de la façon suivante :

- une particule au hasard parmi les particules de type A entre dans K1 avec la probabilité $\dfrac{1}{3}$ et dans K2 avec la probabilité $\dfrac{2}{3}$;
- une particule au hasard parmi les particules de type B entre dans chacun des compartiments avec la probabilité $\dfrac{1}{2}$.

Partie A

1. Soit une particule au hasard.

Déterminer la probabilité de chacun des évènements suivants :

A1 : « la particule isolée est de type A et elle entre dans K1 »,

A2 : « la particule isolée est de type A et elle entre dans K2 »,

B1 : « la particule isolée est de type B et elle entre dans K1 »,

B2 : « la particule isolée est de type B et elle entre dans K2 »,

C1 : « la particule entre dans K1 »,

C2 : « la particule entre dans K2 ».

2. On procède cinq fois de suite et de façon indépendante à l'épreuve décrite en introduction.

Le nombre de particules étant très grand, on admettra que les proportions 75 % et 25 % restent constantes.

Calculer la probabilité de l'évènement E suivant : « il y a exactement deux particules dans K2 ».

Partie B

Un récipient contient le gaz décrit précédemment. Les particules A sont radioactives

et se transforment spontanément en particules B ; chaque particule A donne en se transformant une particule B.
On note $p(t)$ la proportion de particules A dans le gaz. Ainsi, à l'instant $t = 0$, on a $p(0) = 0,75$.
Plus généralement, si t est exprimé en années, on a $p(t) = 0,75\mathrm{e}^{-\lambda t}$, où λ est une constante réelle.
La demi-vie [1] des particules de type A est égale à 5 730 ans.

1. Calculer λ ; on prendra une valeur approchée décimale à 10^{-5} près par défaut.
2. Au bout de combien d'années 10 % des particules de type A se seront-elles transformées en particules de type B ?
3. Déterminer la valeur de t pour laquelle il y aura autant de particules de type A que de particules de type B (on arrondira à l'unité).

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ (unité graphique 1 cm).

1. Résoudre, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation suivante :
$$z^2 - 8z\sqrt{3} + 64 = 0.$$
2. On considère les points A et B qui ont pour affixes respectives les nombres complexes
$$a = 4\sqrt{3} - 4\mathrm{i} \qquad \text{et} \qquad b = 4\sqrt{3} + 4\mathrm{i}.$$
   a. Écrire a et b sous forme exponentielle.
   b. Calculer les distances OA, OB, AB. En déduire la nature du triangle OAB.
3. On désigne par C le point d'affixe $c = -\sqrt{3} + \mathrm{i}$ et par D son image par la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$.
Déterminer l'affixe d du point D.
4. On appelle G le barycentre des trois points pondérés (O ; −1), (D ; + 1), (B ; + 1).
   a. Justifier l'existence de G et montrer que ce point a pour affixe $g = 4\sqrt{3} + 6\mathrm{i}$.
   b. Placer les points A, B, C, D et G sur une figure.
   c. Montrer que les points C, D et G sont alignés.
   d. Démontrer que le quadrilatère OBGD est un parallélogramme.
5. Quelle est la nature du triangle AGC ?

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

L'exercice comporte une annexe, à rendre avec la copie.

A et C sont deux points distincts du plan ; on note Γ le cercle de diamètre [AC] et O le centre de Γ ; B est un point du cercle Γ distinct des points A et C.
Le point D est construit tel que le triangle BCD soit équilatéral direct ; on a donc $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\right) = +\dfrac{\pi}{3} \quad [2\pi]$.

[1] temps au bout duquel le nombre de particules restantes est la moitié du nombre initial.

Le point G est le centre de gravité du triangle BCD.
Les droites (AB) et (CG) se coupent en un point M.

Partie A

1. Placer les points D, G et M sur la figure de la feuille annexe.
2. Montrer que les points O, D et G appartiennent à la médiatrice du segment [BC] et que le point G est le milieu du segment [CM].
3. Déterminer l'angle et le rapport de la similitude directe s de centre C transformant B en M.

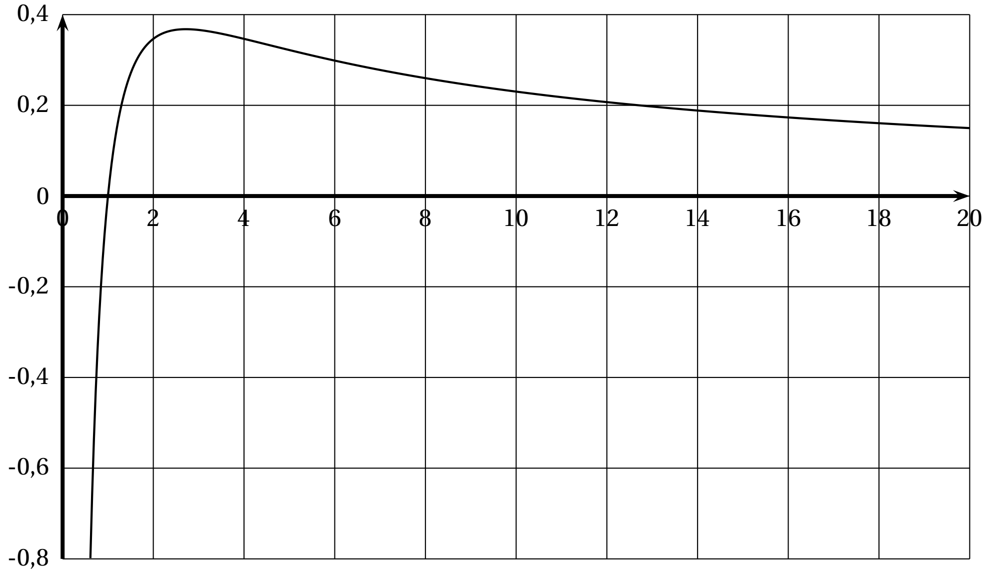
Partie B

Dans cette question, le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$ choisi de telle sorte que les points A et C aient pour affixes respectives -1 et 1.
Soit E le point construit pour que le triangle ACE soit équilatéral direct ; on a donc $\left(\overrightarrow{\text{AC}},\ \overrightarrow{\text{A}E}\right) = +\dfrac{\pi}{3} \quad [2\pi]$.

1. Calculer l'affixe du point E et construire le point E sur la feuille annexe.
2. Soit σ la similitude directe d'expression complexe $z' = \dfrac{3+\text{i}\sqrt{3}}{4}z + \dfrac{1-\text{i}\sqrt{3}}{4}$.
   Déterminer les éléments caractéristiques de σ et en déduire que σ est la similitude réciproque de s.
3. Montrer que l'image E' du point E par σ a pour affixe $-\dfrac{1}{2} + \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et montrer que le point E' appartient au cercle Γ.
4. On note $\mathscr{C}$ le lieu des points M lorsque le point B décrit le cercle Γ privé des points A et C.
   Montrer que le point E appartient à $\mathscr{C}$.
   Soit O$'$ l'image du point O par la similitude s. Démontrer que le point O$'$ est le centre de gravité du triangle ACE.
   En déduire une construction de $\mathscr{C}$.

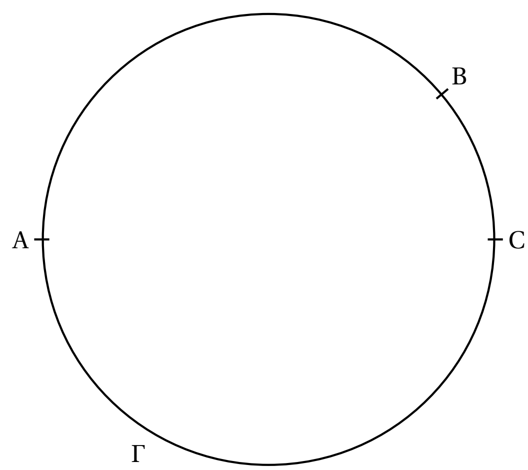
ANNEXE DE L'EXERCICE 2

À rendre avec la copie



Courbe $\mathscr{C}$, obtenue à l'aide d'un traceur de courbes

Annexe spécialité



Durée : 4 heures

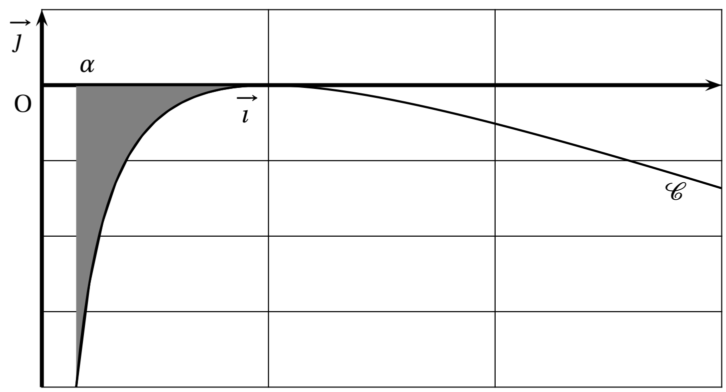
Baccalauréat S Polynésie septembre 2004

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

La courbe $\mathscr{C}$ donnée ci-dessous est la représentation graphique de la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} + 1 - x.$$



1. **a.** Montrer que f est dérivable et que, pour tout x strictement positif, $f'(x)$ est du signe de

$$N(x) = -\left[2\left(x\sqrt{x} - 1\right) + \ln x.\right]$$

   b. Calculer $N(1)$ et déterminer le signe de $N(x)$ en distinguant les cas $0 < x < 1$ et $x > 1$.

   c. En déduire le sens de variation de f sur $]0\ ;\ +\infty[$ et les coordonnées du point de $\mathscr{C}$ d'ordonnée maximale.

2. On note $\mathscr{A}(\alpha)$ l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan grisée sur la figure, où α désigne un réel de $]0\,;1[$.

   a. Exprimer $\mathscr{A}(\alpha)$ en fonction de α (on pourra utiliser une intégration par parties).

   b. Calculer la limite de $\mathscr{A}(\alpha)$ lorsque α tend vers 0. Donner une interprétation graphique de cette limite.

3. On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par son premier terme u_0 élément de $[1\,;2]$ et :

$$\text{pour tout entier naturel} \quad n,\ u_{n+1} = \frac{\ln u_n}{\sqrt{u_n}} + 1.$$

   a. Démontrer, pour tout réel x élément de $[1\,;2]$, la double inégalité $0 \leqslant \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} \leqslant 1$.

   b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n appartient à $[1\,;2]$.

4. En remarquant que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n) + u_n$, déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

5. **a.** Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On note ℓ sa limite.
   b. Déterminer la valeur exacte de ℓ.

EXERCICE 2 **5 points**
(Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)
Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On prendra 2 cm pour unité graphique.
Pour tout point M du plan d'affixe z on considère les points M' et M'' d'affixes respectives

$$z' = z - 2 \qquad \text{et} \qquad z'' = z^2.$$

1. **a.** Déterminer les points M pour lesquels $M'' = M$.
   b. Déterminer les points M pour lesquels $M'' = M'$.
2. Montrer qu'il existe exactement deux points M_1 et M_2 dont les images M_1', M_1'', M_2' et M_2'' appartiennent à l'axe des ordonnées. Montrer que leurs affixes sont conjuguées.
3. On pose $z = x + \text{i}y$ où x et y sont des nombres réels.
   a. Exprimer sous forme algébrique le nombre complexe $\dfrac{z'' - z}{z' - z}$.
   b. En déduire l'ensemble E des points M du plan pour lesquels les points M, M' et M'' sont alignés. Représenter E graphiquement et en couleur.
4. On pose $z = \sqrt{3}\text{e}^{\text{i}\theta}$ où $\theta \in \left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$.
   a. Déterminer l'ensemble Γ des points M d'affixe z ainsi définis et chacun des ensembles Γ' et Γ'' des points M' et M'' associés à M.
   b. Représenter Γ, Γ' et Γ'' sur la figure précédente.
   c. Dans cette question $\theta = \dfrac{\pi}{6}$. Placer le point M_3 obtenu pour cette valeur de θ, et les points M_3' et M_3'' qui lui sont associés. Montrer que le triangle $\text{M}_3\text{M}_3'\text{M}_3''$ est rectangle. Est-il isocèle ?

EXERCICE 2 **5 points**
(Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité)
Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On prendra, sur la figure 1 cm pour unité graphique.
On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $-1 + \text{i}$, $3 + 2\text{i}$ et $\text{i}\sqrt{2}$.

1. On considère la transformation f du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point $M' = f(M)$ d'affixe z' définie par :

$$z' = \frac{1+\text{i}}{\sqrt{2}}\overline{z} - 1 + \text{i}\left(1 + \sqrt{2}\right).$$

   a. Calculer les affixes des points $\text{A}' = f(\text{A})$ et $\text{C}' = f(\text{C})$.
   b. En déduire la nature de f et caractériser cette transformation.
   c. Placer les points A, B et C puis construire le point $\text{B}' = f(\text{B})$.
2. **a.** Donner l'écriture complexe de l'homothétie h de centre A et de rapport $\sqrt{2}$.
   b. Montrer que la composée $g = f \circ h$ a pour écriture complexe $z'' = (1+\text{i})\overline{z} - 1 + 3\text{i}$.

3. **a.** Soit M_0 le point d'affixe 2 - 4 i.
Determiner l'affixe du point $M_0'' = g(M_0)$ puis vérifier que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM_0''}$ sont orthogonaux.

b. On considère un point M d'affixe z. On suppose que la partie réelle x et la partie imaginaire y de z sont des entiers.

Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM''}$ sont orthogonaux si, et seulement si $5x+3y=-2$.

c. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $5x+3y=-2$.

d. En déduire les points M dont les coordonnées sont des entiers appartenant à l'intervalle $[-6\ ;\ 6]$ tels que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM''}$ sont orthogonaux. Placer les points obtenus sur la figure.

EXERCICE 3 **6 points**

Commun à tous les candidats

On donne dans le plan trois points A, B et C distincts non alignés.
Une urne U contient six cartons indiscernables au toucher portant les nombres -2, -1, 0, 1, 2 et 3.
Une urne V contient cinq cartons indiscernables au toucher ; quatre cartons portent le nombre 1 et un carton le nombre -1.
On tire au hasard un carton dans chacune des urnes. Les tirages sont équiprobables. On note a le nombre lu sur le canon de U et b celui lu sur le carton de V.

1. Justifier que les points pondérés (A, a), (B, b) et (C, 4) admettent un barycentre. On le note G.

2. **a.** Déterminer la probabilité de chacun des évènements suivants :
E_1 « G appartient à la droite (BC) » ;
E_2 « G appartient au segment [BC] ».

b. Montrer que la probabilité de l'évènement E_3 : « G est situé à l'intérieur du triangle ABC et n'appartient à aucun des côtés » est égale à $\dfrac{2}{5}$. On pourra faire appel des considérations de signe.

3. Soit n un entier naturel non nul. On répète n fois dans les mêmes conditions l'épreuve qui consiste à tirer un carton dans chacune des urnes U et V puis à considérer le barycentre G de la question **1.**.
On désigne par X la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre de réalisations de l'évènement E_3.

a. Déterminer l'entier n pour que l'espérance de la variable aléatoire X soit égale à 4.

b. Déterminer le plus petit entier n pour que la probabilité d'avoir au moins un des barycentres situé à l'intérieur du triangle ABC soit supérieure ou égale à 0,999.

Baccalauréat S Nouvelle–Calédonie novembre 2004

L'utilisation de la calculatrice est autorisée.

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère l'application f du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = z^2 - 4z.$$

1. Soient A et B les points d'affixes $z_A = 1 - i$ et $z_B = 3 + i$.
   - **a.** Calculer les affixes des points A′ et B′ images des points A et B par f.
   - **b.** On suppose que deux points ont la même image par f. Démontrer qu'ils sont confondus ou que l'un est l'image de l'autre par une symétrie centrale que l'on précisera.
2. Soit I le point d'affixe -3.
   - **a.** Démontrer que OMIM' est un parallélogramme si et seulement si $z^2 - 3z + 3 = 0$.
   - **b.** Résoudre l'équation $z^2 - 3z + 3 = 0$.
3. - **a.** Exprimer $(z' + 4)$ en fonction de $(z - 2)$. En déduire une relation entre $|z' + 4|$ et $|z - 2|$ puis entre $\arg(z' + 4)$ et $\arg(z - 2)$.
   - **b.** On considère les points J et K d'affixes respectives $z_J = 2$ et $z_K = -4$.
     Démontrer que tous les points M du cercle $(\mathscr{C})$ de centre J et de rayon 2 ont leur image M' sur un même cercle que l'on déterminera.
   - **c.** Soit E le point d'affixe $z_E = -4 - 3i$.
     Donner la forme trigonoméétrique de $(z_E + 4)$ et à l'aide du **3. a.** démontrer qu'il existe deux points dont l'image par f est le point E.
     Prééciser sous forme algébrique l'affixe de ces deux points.

EXERCICE 2 **5 points**

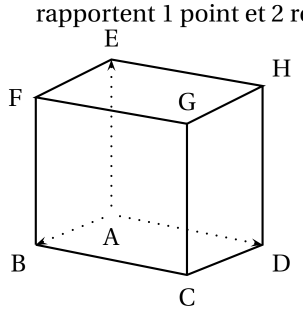
Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (Q.C.M.)

Les réponses à cet exercice sont à inscrire sur la feuille jointe en annexe. Toute réponse ambiguë sera considérée comme une absence de réponse.

Pour chacune des cinq questions une ou plusieurs réponses sont exactes. Le candidat doit inscrire V (vrai) ou F (faux) dans la case correspondante.

Aucune justification n'est demandée. Pour chaque question, 3 réponses correctes rapportent 1 point et 2 réponses correctes rapportent $\frac{1}{2}$ point.



Soit ABCDEFGH un cube de côté 1.
On choisit le repère orthonormal $\left(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$

On appelle I et J les milieux respectifs des segments [EF] et [FG].
L est le barycentre de $\{(A,\ 1)\ ;\ (B,\ 3)\}$.
Soit (π) le plan d'équation $4x-4y+3z-3=0$.

1. Les coordonnées de L sont :
   a. $\left(\dfrac{1}{4}\ ;\ 0\ ;\ 0\right)$ **b.** $\left(\dfrac{3}{4}\ ;\ 0\ ;\ 0\right)$ **c.** $\left(\dfrac{2}{3}\ ;\ 0\ ;\ 0\right)$
2. Le plan (π) est le plan
   a. (GLE) **b.** (LEJ) **c.** (GFA)
3. Le plan parallèle au plan (π) passant par I coupe la droite (FB) en M de coordonnées
   a. $\left(1\ ;\ 0\ ;\ \dfrac{1}{4}\right)$ **b.** $\left(1\ ;\ 0\ ;\ \dfrac{1}{5}\right)$ **c.** $\left(1\ ;\ 0\ ;\ \dfrac{1}{3}\right)$
4. **a.** Les droites (EL) et (FB) sont sécantes en un point N qui est le symétrique de M par rapport à B.
   b. Les droites (EL) et (IM) sont parallèles.
   c. Les droites (EL) et (IM) sont sécantes.
5. Le volume du tétraèdre FIJM est :
   a. $\dfrac{1}{36}$ **b.** $\dfrac{1}{48}$ **c.** $\dfrac{1}{24}$

EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\frac{x}{e^x-x}.$$

On note $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthogonal $\left(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, l'unité graphique est 2 cm sur l'axe des abscisses et 5 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=e^x-x-1$.

1. Étudier les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$. En déduire le signe de g.
2. Justifier que pour tout x, (e^x-x) est strictement positif.

Partie B

1. **a.** Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.
   b. Interpréter graphiquement les résultats précédents.
2. **a.** Calculer $f'(x)$, f' désignant la fonction dérivée de f.
   b. Étudier le sens de variations de f puis dresser son tableau de variations.
3. **a.** Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0.
   b. À l'aide de la **partie A**, étudier la position de la courbe $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite (T).
4. Tracer la droite (T) les asymptotes et la courbe $(\mathscr{C})$.

EXERCICE 3 **5 points**

Exercice de spécialité

Dans cet exercice, a et b désignent des entiers strictement positifs.

1. **a.** Démontrer que s'il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au+bv=1$ alors les nombres a et b sont premiers entre eux.

b. En déduire que si $(a^2+ab-b^2)^2 = 1$, alors a et b sont premiers entre eux.

2. On se propose de déterminer les couples d'entiers strictement positifs $(a\,;\,b)$ tels que $(a^2+ab-b^2)^2 = 1$. Un tel couple sera appelé solution.

a. Déterminer a lorsque $a = b$.

b. Vérifier que $(1\,;\,1)$, $(2\,;\,3)$ et $(5\,;\,8)$ sont trois solutions particuliéres.

c. Montrer que si $(a\,;\,b)$ est solution et si $a < b$, alors $a^2-b^2 < 0$.

3. **a.** Montrer que si $(x\,;\,y)$ est une solution différente de $(1\,;\,1)$ alors $(y-x\,;\,x)$ et $(y\,;\,y+x)$ sont aussi des solutions.

b. Déduire de **2. b.** trois nouvelles solutions.

4. On considère la suite de nombres entiers strictement positifs $(a_n)_n$ définie par $a_0 = a_1 = 1$ et pour tout entier $n, n \geqslant 0,\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.
Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 0,\ (a_n\,;\,a_{n+1})$ est solution.
En déduire que les nombres a_n et a_{n+1} sont premiers entre eux.

EXERCICE 4 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout entier naturel n, par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 3 \\ u_{n+1} & = & \dfrac{u_n+v_n}{2} \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl} v_0 & = & 4 \\ v_{n+1} & = & \dfrac{u_{n+1}+v_n}{2} \end{array}\right.$$

1. Calculer $u_1,\ v_1,\ u_2$ et v_2.

2. Soit la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par : $w_n = v_n - u_n$.

a. Montrer que la suite (w_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$.

b. Exprimer w_n en fonction de n et préciser la limite de la suite (w_n).

3. Après avoir étudié le sens de variation de suites (u_n) et (v_n), démontrer que ces deux suites sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?

4. On considère à préésent la suite (t_n) définie, pour tout entier naturel n, par $t_n = \dfrac{u_n+2v_n}{3}$.

a. Démontrer que la suite (t_n) est constante.

b. En déduire la limite des suites (u_n) et (v_n).

EXERCICE 4 **5 points**

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Dans cet exercice, a et b désignent des entiers strictement positifs.

1. **a.** Démontrer que s'il existe deux entiers relatifs u et v tels que

$$au+bv = 1$$

alors les nombres a et b sont premiers entre eux.

b. En déduire que si $(a^2+ab-b^2)^2 = 1$, alors a et b sont premiers entre eux.

2. On se propose de déterminer les couples d'entiers strictement positifs $(a\,;\,b)$ tels que $(a^2+ab-b^2)^2 = 1$. Un tel couple sera appelé solution.

a. Déterminer a lorsque $a = b$.

b. Vérifier que $(1\,;\,1)$, $(2\,;\,3)$ et $(5\,;\,8)$ sont trois solutions particulières.

c. Montrer que si $(a\,;\,b)$ est solution et si $a \neq b$, alors $a^2-b^2 < 0$.

3. **a.** Montrer que si $(x\ ;\ y)$ est une solution différente de $(1\ ;\ 1)$ alors $(y - x\ ;\ x)$ et $(y\ ;\ y + x)$ sont aussi des solutions.

   b. Déduire de **2. b.** trois nouvelles solutions

4. On considère la suite de nombres entiers strictement positifs $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0 = a_1 = 1$ et pour tout entier $n,\ n \geqslant 0,\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.
   Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 0,\ (a_n\ ;\ a_{n+1})$ est solution.
   En déduire que les nombres a_n et a_{n+1} sont premiers entre eux.

Baccalauréat S Amérique du Sud novembre 2004

EXERCICE 1 **7 points**

Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x}.$$

On note Γ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 10 cm).

Partie A

1. **a.** Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   b. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations.
   c. Construire Γ dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
2. **a.** Montrer que, pour tout réel m de $\left]0\,;\,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right[$, l'équation $f(x) = m$ admet deux solutions.
   b. Dans le cas où $m = \dfrac{1}{4}$, on nomme α et β les solutions (avec $\alpha < \beta$).
   Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.
   c. Résoudre l'équation $f(x) = m$ dans le cas où $m = 0$ et $m = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

Partie B

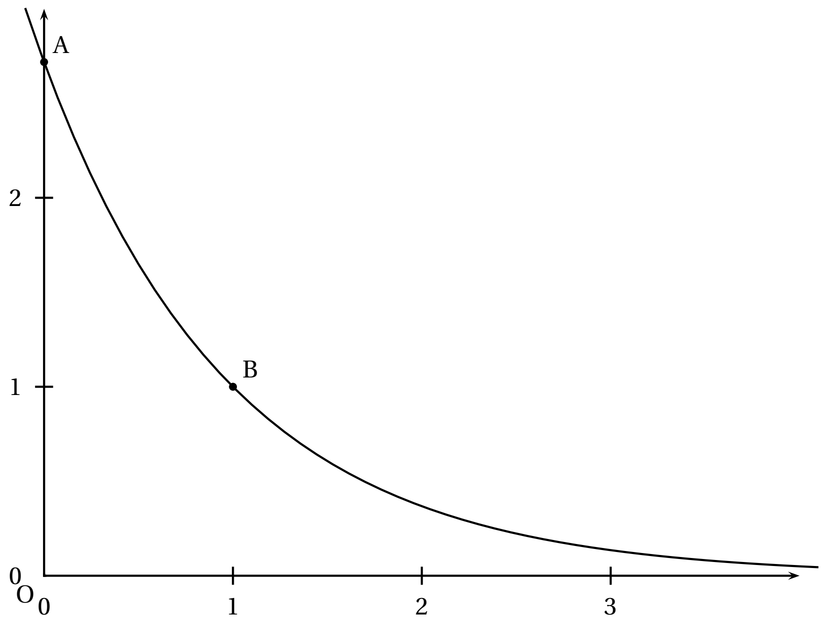
1. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & \alpha \\ u_{n+1} & = & u_n\mathrm{e}^{-u_n}, \text{ pour tout entier naturel } n \end{array}\right.$$

   où α est le réel défini à la question **A. 2. b.**

   a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.
   b. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
   c. La suite (u_n) est-elle convergente ? Si oui, déterminer sa limite.
2. On considère la suite (w_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = \ln u_n$.
   a. Montrer que, pour tout n entier naturel, on a $u_n = w_n - w_{n+1}$.
   b. On pose $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.
   Montrer que $S_n = w_0 - w_{n+1}$.
   c. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.
3. On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme v_0 ($v_0 > 0$) et, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = v_n\mathrm{e}^{-v_n}$.
   Existe-t-il une valeur de v_0 différente de α telle que, pour tout $n \geqslant 1$, on ait $u_n = v_n$?
   Si oui, préciser laquelle.

EXERCICE 2 **3 points**



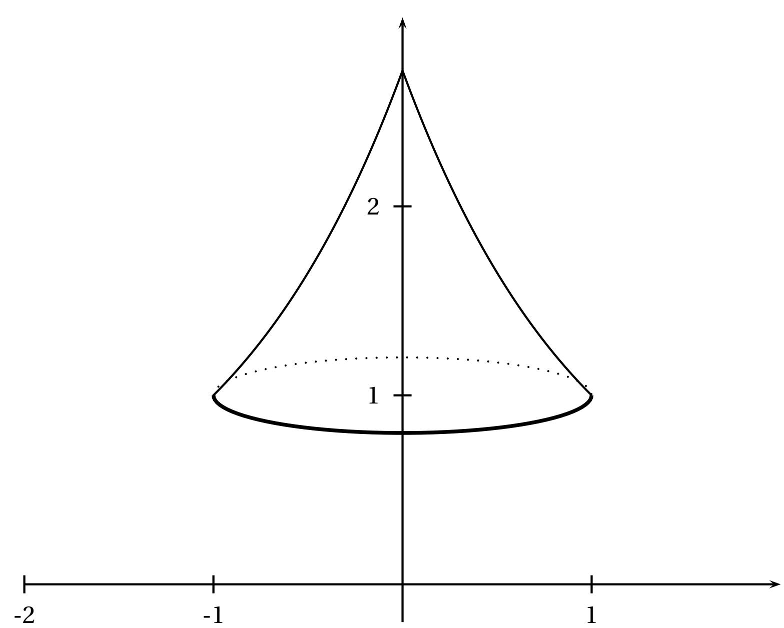
On a représenté ci-dessus, dans un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, la courbe représentative de la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$, solution de l'équation différentielle

$$(E) \quad : \quad y' + y = 0 \quad \text{et telle que} \quad f(0) = \text{e}.$$

1. Déterminer $f(x)$ pour tout x réel.

2. Soit t un réel donné de l'intervalle $[1 ; \text{e}]$.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\text{e}^{1-x} = t$ d'inconnue x.

3. Soit A le point d'abscisse 0 et B le point d'abscisse 1 de la courbe.
On considère le solide obtenu par rotation autour de l'axe des ordonnées de l'arc de courbe $\widehat{\text{AB}}$ comme représenté ci-dessous. On note V son volume.
On admet que $V = \pi \displaystyle\int_1^{\text{e}} (1 - \ln t)^2 \, \text{d}t$.
Calculer V à l'aide de deux intégrations par parties successives.



EXERCICE 3 **5 points**

On note $p_{\text{A}}(\text{B})$ *la probabilité conditionnelle de l'évènement* B *sachant que l'évènement* A *est réalisé.*
Une urne contient 4 boules rouges et 2 boules noires indiscernables au toucher.

1. On effectue au hasard un tirage sans remise de deux boules de l'urne.
   On note A_0 l'évènement; « on n'a obtenu aucune boule noire »;
   On note A_1 l'évènement : « on a obtenu une seule boule noire »;
   On note A_2 l'évènement : « on a obtenu deux boules noires ».
   Calculer les probabilités de A_0, A_1 et A_2.
2. Après ce premier tirage, il reste donc 4 boules dans l'urne.
   On effectue à nouveau au hasard un tirage sans remise de deux boules de l'urne.
   On note B_0 l'évènement : « on n'a obtenu aucune boule noire au tirage n° 2 »
   On note B_1 l'évènement : « on a obtenu une seule boule noire au tirage n° 2 »
   On note B_2 l'évènement : « on a obtenu deux boules noires au tirage n° 2 »

   a. Calculer $p_{\text{A}_0}(\text{B}_0)$, $p_{\text{A}_1}(\text{B}_0)$ et $p_{\text{A}_2}(\text{B}_0)$.
   b. En déduire $p(\text{B}_0)$.
   c. Calculer $p(\text{B}_1)$ et $p(\text{B}_2)$.
   d. On a obtenu une seule boule noire lors de ce second tirage. Quelle est la probabilité d'avoir obtenu une seule boule noire lors du premier ?
3. On considère l'évènement R : « il a fallu exactement les deux tirages pour que les deux boules noires soient extraites de l'une ».
   Montrer que $p(\text{R}) = \dfrac{1}{3}$.

EXERCICE 4 **5 points**

Partie A
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
Pour réaliser la figure, on prendra pour unité graphique 1 cm.
Soit P le point d'affixe p où $p = 10$ et Γ le cercle de diamètre [OP].
On désigne par Ω le centre de Γ.
Soit A, B, C les points d'affixes respectives a, b et c, où $a = 5+5\text{i}$, $b = 1+3\text{i}$ et $c = 8-4\text{i}$.

1. Montrer que A, B et C sont des points du cercle Γ.
2. Soit D le point d'affixe 2 + 2i.
   Montrer que D est le projeté orthogonal de O sur la droite (BC).

Partie B
À tout point M du plan différent de O, d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' tel que

$$z' = \frac{20}{\overline{z}} \quad \text{où } z \text{ désigne le nombre conjugué de } z.$$

1. Montrer que les points O, M et M' sont alignés.
2. Soit Δ la droite d'équation $x = 2$ et M un point de Δ d'affixe z.
   On se propose de définir géométriquement le point M' associé au point M.

   a. Vérifier que $z + \overline{z} = 4$.
   b. Exprimer $z' + \overline{z'}$ en fonction de z et $\overline{z}$ et en déduire que $5\left(z' + \overline{z'}\right) = z'\overline{z'}$.

c. En déduire que M' appartient à l'intersection de la droite (OM) et du cercle Γ.
Placer M' sur la figure.

EXERCICE 4 **5 points**

Exercice de spécialité

Soit A_0 et B_0 deux points du plan orienté tels que $A_0B_0 = 8$. On prendra le centimètre pour unité.

Soit S la similitude de centre A_0, de rapport $\dfrac{1}{2}$ et d'angle $\dfrac{3\pi}{4}$.

On définit une suite de points (B_n) de la façon suivante :

$$\text{pour tout entier naturel } n,\ B_{n+1} = S(B_n).$$

1. Construire B_1, B_2, B_3 et B_4.

2. Montrer que, pour tout entier naturel n, les triangles $A_0B_nB_{n+1}$ et $A_0B_{n+1}B_{n+2}$ sont semblables.

3. On définit la suite (l_n) par : pour tout entier naturel n, $l_n = B_nB_{n+1}$.

a. Montrer que la suite (l_n) est une suite géométrique et préciser sa raison.

b. Exprimer l_n en fonction de n et de l_0.

c. On pose $\Sigma_n = l_0 + l_1 + \cdots + l_n$.
Déterminer la limite de Σ_n lorsque n tend vers $+\infty$.

4. **a.** Résoudre l'équation $3x - 4y = 2$ où x et y sont deux entiers relatifs.

b. Soit Δ la droite perpendiculaire en A_0 à la droite (A_0B_0).
Pour quelles valeurs de l'entier naturel n, B_n appartient-il à Δ ?

∽ Baccalauréat S (obligatoire) Nouvelle Calédonie ∾ mars 2005

EXERCICE 1 **4 points**

Commun tous les candidats

L'exercice comporte 4 questions. Pour chaque question, on propose trois affirmations. Pour chacune d'elles, le candidat doit indiquer si elle est vraie ou fausse en cochant la case correspondante. Aucune justification n'est demandée.

Les réponses à cet exercice sont à inscrire sur la feuille jointe en annexe. Toute réponse ambiguë sera considérée comme une absence de réponse.

Chaque réponse exacte rapporte 0,25 point. Une bonification de 0,25 point est ajoutée chaque fois qu'une question est traitée correctement en entier (c'est- à-dire lorsque les réponses aux 3 affirmations sont exactes). 2 réponses inexactes dans une même question entraînent le retrait de 0,25 point.

L'abstention n'est pas prise en compte, c'est- à-dire ne rapporte ni ne retire aucun point.

Si le total des points de l'exercice est négatif, la note est ramenée â zéro.

Dans l'exercice, le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $\left(O,\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

Q1	Pour tout n entier naturel non nul, pour tout réel θ, $\left(e^{i\theta}\right)^n$ est égal à :	$e^{in\theta}$	☐ Faux ☐ Vrai
		$\cos\left(\theta^n\right)+i\sin\left(\theta^n\right)$	☐ Faux ☐ Vrai
		$\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$	☐ Faux ☐ Vrai
Q2	La partie imaginaire du nombre z est égale à :	$\dfrac{z+\overline{z}}{2}$	☐ Faux ☐ Vrai
		$\dfrac{z-\overline{z}}{2i}$	☐ Faux ☐ Vrai
		$\dfrac{z-\overline{z}}{2}$	☐ Faux ☐ Vrai
Q3	Soit z un complexe tel que $z=x+iy$ (x et y réels). Si z est un imaginaire pur, alors $\lvert z\rvert^2$ est égal à :	y^2	☐ Faux ☐ Vrai
		$-y^2$	☐ Faux ☐ Vrai
		$-z^2$	☐ Faux ☐ Vrai
Q4	A, B et C sont des points d'affixes respectives a, b et c telles que $\dfrac{b-a}{c-a}=i\sqrt{3}$, alors :	BC = 2 AC	☐ Faux ☐ Vrai
		$\left(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$	☐ Faux ☐ Vrai
		$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=CA^2$	☐ Faux ☐ Vrai

EXERCICE 2 **5 points**

Commun tous les candidats

Une compagnie de transport désire optimiser les contrôles afin de limiter l'impact des fraudes et les pertes occasionnées par cette pratique.

Cette compagnie effectue une étude basée sur deux trajets par jour pendant les vingt jours ouvrables d'un mois soit au total quarante trajets. On admet que les contrôles sont indépendants les uns des autres et que la probabilité pour tout voyageur d'être contrôlé est égale à p.

Le prix de chaque trajet est de dix euros, en cas de fraude l'amende est de cent euros.

Claude fraude systématiquement lors des quarante trajets soumis à cette étude.
Soit X_i la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si Claude est contrôlé au i-ème trajet et la valeur 0 sinon. Soit X la variable aléatoire définie par $X = X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_{40}$.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.

2. Dans cette partie on suppose que $p = \dfrac{1}{20}$.

 a. Calculer l'espérance mathématique de X.

 b. Calculer les probabilités $P(X = 0)$, $P(X = 1)$ et $P(X = 2)$.

 c. Calculer à 10^{-4} près la probabilité pour que Claude soit contrôlé au plus deux fois.

3. Soit Z_i la variable aléatoire qui prend pour valeur le gain algébrique réalisé par le fraudeur.
Justifier l'égalité $Z = 400 - 100X$ puis calculer l'espérance mathématique de Z pour $p = \dfrac{1}{5}$.

4. On désire maintenant déterminer p afin que la probabilité que Claude subisse au moins trois contrôles soit supérieure à 99 %.

 a. Démontrer que $P(X \leqslant 2) = (1-p)^{38}\left(741p^2 + 38p + 1\right)$.

 b. Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,1]$ par : $f(x) = (1-x)^{38}\left(741x^2 + 38x + 1\right)$.
 Montrer que f est strictement décroissante sur $[0\,;\,1]$ et qu'il existe un unique réel x_0 appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$ tel que $f(x_0) = 0,01$. Déterminer l'entier naturel n tel que $\dfrac{n}{100} < x_0 < \dfrac{n+1}{100}$.

 c. En déduire la valeur minimale qu'il faut attribuer à p afin que la probabilité que Claude subisse au moins trois contrôles soit supérieure ou égale à 99 %.
 (On exprimera p en fonction de x_0).

EXERCICE 3 — 6 points

Commun à tous les candidats

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
Soit f la fonction définie sur $]-1\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = x^2 - 2,2x + 2,2\ln(x+1)$

1. Faire apparaître sur l'écran de la calculatrice graphique la courbe représentative de cette fonction dans la fenêtre $-2 \leqslant x \leqslant 4$, $\quad -5 \leqslant y \leqslant 5$.
Reproduire sur la copie l'allure de la courbe obtenue grâce à la calculatrice.

2. D'après cette représentation graphique, que pourrait-on conjecturer :

 a. Sur les variations de la fonction f ?

 b. Sur le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$?

3. On se propose maintenant d'étudier la fonction f

 a. Étudier le sens de variation de la fonction f

 b. Étudier les limites de la fonction f en -1 et en $+\infty$, puis dresser le tableau de variations de f.

 c. Déduire de cette étude, en précisant le raisonnement, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.

 d. Les résultats aux questions **3. a.** et **3. c.** confirment-ils les conjectures émises à la question **2.** ?

4. On veut représenter, sur l'écran d'une calculatrice, la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[-0,1\ ;\ 0,2]$, de façon à visualiser les résultats de la question **3.**.

a. Quelles valeurs extrêmes de l'ordonnée y proposez-vous pour mettre en évidence les résultats de la question **3. c.** dans la fenêtre de votre calculatrice ?

b. À l'aide de la calculatrice déterminer une valeur approchée par défaut à 10^{-2} près de la plus grande solution α de l'équation $f(x) = 0$.

5. Soit F la fonction définie sur $]-1\ ;\ +\infty[$ par

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 1,1x^2 - 2,2x + 2,2(x+1)\ln(x+1).$$

a. Démontrer que F est une primitive de f sur $]-1\ ;\ +\infty[$.

b. Interpréter graphiquement l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x$.

c. Calculer $\displaystyle\int_0^{\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x$ et exprimer le résultat sous la forme $b\alpha^3 + c\alpha^2$ (b et c réels).

EXERCICE 4 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

Étant donnés deux points distincts A_0 et B_0 d'une droite, on définit les points :

A_1 milieu du segment $[A_0\,B_0]$ et B_1 barycentre de $\{(A_0,\ 1)\ ;\ B_0,\ 2)\}$.

Puis, pour tout entier naturel n, A_{n+1} milieu du segment $[A_nB_n]$ et B_{n+1} barycentre de $\{(A_n,\ 1)\ ;\ B_n,\ 2)\}$.

1. Placer les points A_1 , B_1, A_2 et B_2 pour $A_0B_0 = 12$ cm.

Quelle conjecture peut-on faire sur les points A_n et B_n quand n devient très grand ?

2. On munit la droite (A_0B_0) du repère $\left(A_0\ ;\ \overrightarrow{\imath}\right)$ avec $\overrightarrow{\imath} = \frac{1}{12}\overrightarrow{A_0B_0}$. Soit u_n et v_n les abscisses respectives des points A_n et B_n. Justifier que pour tout entier naturel n strictement positif, on a

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}.$$

Partie B

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 0$; $v_0 = 12$;

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}.$$

1. Démontrer que la suite (w_n) définie par $w_n = v_n - u_n$ est une suite géométrique convergente et que tous ses termes sont positifs.

2. Montrer que la suite (u_n) est croissante puis que la suite (v_n) est décroissante.

3. Déduire des deux questions précédentes que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et ont la même limite.

4. On considère la suite (t_n) définie par $t_n = 2u_n + 3v_n$.

Montrer qu'elle est constante.

Partie C

À partir des résultats obtenus dans les **parties A et B**, préciser la position limite des points A_n et B_n quand n tend vers plus l'infini.

Baccalauréat S Pondichéry 31 mars 2005

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f, définie sur $[1\ ;\ +\infty[$ par

$$f(t) = \frac{\mathrm{e}^t}{t}.$$

1. **a.** Justifier la continuité de f sur $[1\ ;\ +\infty[$.

   b. Montrer que f est croissante sur $[1\ ;\ +\infty[$.

2. **Restitution organisée de connaissances**

   On pourra raisonner en s'appuyant sur le graphique fourni.

   Pour tout réel x_0 de $[1\ ;\ +\infty[$, on note $\mathscr{A}(x_0)$ l'aire du domaine délimité par la courbe représentant f dans un repère orthogonal, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = x_0$.

   On se propose de démontrer que la fonction ainsi définie sur $[1\ ;\ +\infty[$ est une primitive de f.

   a. Que vaut $\mathscr{A}(1)$?

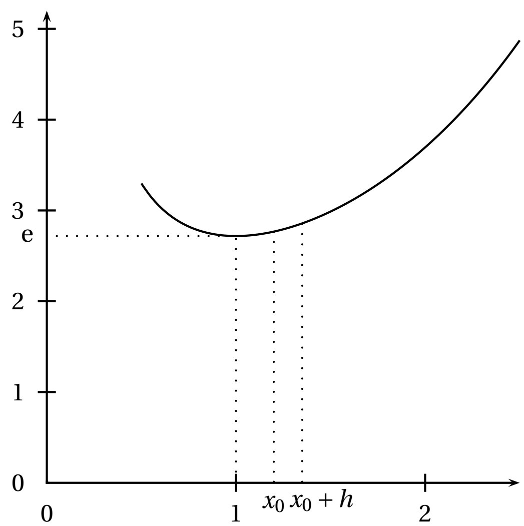
   b. Soit x_0 un réel quelconque de $[1\ ;\ +\infty[$ et h un réel strictement positif. Justifier l'encadrement suivant :

   $$f(x_0) \leqslant \frac{\mathscr{A}(x_0+h) - \mathscr{A}(x_0)}{h} \leqslant f(x_0+h).$$

   c. Lorsque $x_0 > 1$, quel encadrement peut-on obtenir pour $h < 0$ et tel que $x_0 + h \geqslant 1$?

   d. En déduire la dérivabilité en x_0 de la fonction $\mathscr{A}$ ainsi que le nombre dérivé en x_0 de la fonction $\mathscr{A}$.

   e. Conclure.



EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

On désigne par I le point d'affixe $z_{\mathrm{I}} = 1$, par A le point d'affixe $z_{\mathrm{A}} = 1 - 2\mathrm{i}$, par B le point d'affixe $-2 + 2\mathrm{i}$ et par $(\mathscr{C})$ le cercle de diamètre [AB].

On fera une figure que l'on complètera avec les différents éléments intervenant dans l'exercice. On prendra pour unité graphique 2 cm.

1. Déterminer le centre Ω du cercle $(\mathscr{C})$ et calculer son rayon.
2. Soit D le point d'affixe $z_{\text{D}} = \dfrac{3+9\text{i}}{4+2\text{i}}$.
   Écrire z_{D} sous forme algébrique puis démontrer que D est un point du cercle $(\mathscr{C})$.
3. Sur le cercle $(\mathscr{C})$, on considère le point E, d'affixe z_{E}, tel qu'une mesure en radians de $\left(\overrightarrow{\Omega \text{I}}, \overrightarrow{\Omega \text{E}}\right)$ est $\dfrac{\pi}{4}$.

   a. Préciser le module et un argument de $z_{\text{E}} + \dfrac{1}{2}$.

   b. En déduire que $z_{\text{E}} = \dfrac{5\sqrt{2}-2}{4} + \dfrac{5\sqrt{2}}{4}\text{i}$.
4. Soit r l'application du plan P dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' + \frac{1}{2} = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}\left(z + \frac{1}{2}\right).$$

   a. Déterminer la nature de r et ses éléments caractéristiques.

   b. Soit K le point d'affixe $z_{\text{K}} = 2$.
   Déterminer par le calcul l'image de K par r. Comment peut-on retrouver géométriquement ce résultat ?

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté a un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On considère l'application f qui au point M d'affixe z fait correspondre le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{3+4\text{i}}{5}\overline{z} + \frac{1-2\text{i}}{5}.$$

1. On note x et x', y et y' les parties réelles et les parties imaginaires de z et z'.
   Démontrer que : $\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & \dfrac{3x+4y+1}{5} \\ y' & = & \dfrac{4x-3y-2}{5}\end{array}\right.$
2. **a.** Déterminer l'ensemble des points invariants par f.

   b. Quelle est la nature de l'application f ?
3. Déterminer l'ensemble D des points M d'affixe z tels que z' soit réel.
4. On cherche à déterminer les points de D dont les coordonnées sont entières.

   a. Donner une solution particulière $(x_0,\ y_0)$ appartenant a $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $4x - 3y = 2$.

   b. Determiner l'ensemble des solutions appartenant à $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $4x - 3y = 2$.
5. On considère les points M d'affixe $z = x + \text{i}y$ tels que $x = 1$ et $y \in \mathbb{Z}$. Le point $M' = f(M)$ a pour affixe z'.
   Déterminer les entiers y tels que $\text{Re}(z')$ et $\text{lm}(z')$ soient entiers (on pourra utiliser les congruences modulo 5).

EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

L'espace E est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. On considère les points A, B et C de coordonnées respectives $(1~;~0~;~2)$, $(1~;~1~;~4)$ et $(-1~;~1~;~1)$.

1. **a.** Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

   b. Soit $\overrightarrow{n}$ le vecteur de coordonnées $(3\ ;\ 4\ ;\ -2)$.
   Vérifier que le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}$.
   En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

2. Soient P_1 et P_2 les plans d'équations respectives $2x + y + 2z + 1 = 0$ et $x - 2y + 6z = 0$.

   a. Montrer que les plans P_1 et P_2 sont sécants selon une droite D dont on déterminera un système d'équations paramétriques.

   b. La droite D et le plan (ABC) sont-ils sécants ou bien parallèles ?

3. Soit t un réel positif quelconque. On considère le barycentre G des points A, B et C affectés des coefficients respectifs 1, 2 et t.

   a. Justifier l'existence du point G pour tout réel positif t.
   Soit I le barycentre des points A et B affectés des coefficients respectifs 1 et 2. Déterminer les coordonnées du point I.
   Exprimer le vecteur $\overrightarrow{\text{I}G}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{\text{IC}}$.

   b. Montrer que l'ensemble des points G lorsque t décrit l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls est le segment [IC] privé du point C.
   Pour quelle valeur de t, le milieu J du segment [IC] coïncide-t-il avec G ?

EXERCICE 4 — 6 points

Commun à tous les candidats

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \dfrac{n^{10}}{2^n}$. On définit ainsi une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Prouver, pour tout entier naturel n non nul, l'équivalence suivante :

$$u_{n+1} \leqslant 0,95 u_n \quad \text{si et seulement si} \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{10} \leqslant 1,9.$$

2. On considère la fonction f définie sur $[1\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{10}.$$

   a. Étudier le sens de variation et la limite en $+\infty$ de la fonction f.

   b. Montrer qu'il existe dans l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$ un unique nombre réel α tel que $f(\alpha) = 1,9$.

   c. Déterminer l'entier naturel n_0 tel que $n_0 - 1 \leqslant \alpha \leqslant n_0$.

   d. Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 16, on a :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{10} \leqslant 1,9.$$

3. **a.** Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) à partir du rang 16.

   b. Que peut-on en déduire pour la suite ?

4. En utilisant un raisonnement par récurrence, prouver, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 16, l'encadrement :

$$0 \leqslant u_n \leqslant 0,95^{n-16} u_{16}.$$

   En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Baccalauréat S Amérique du Nord
1^{er} juin 2005

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Pour chacune des quatre questions de ce QCM, une seule des quatre propositions est exacte.

Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse inexacte enlève 0,5 point. L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point. Si le total est négatif, la note de l'exercice est ramenée à 0.

1. Dans le plan complexe, on donne les points A, B et C d'affixes respectives $-2+3\text{i}$, $-3-\text{i}$ et $2,08+1,98\text{i}$. Le triangle ABC est :

   (a) : isocèle et non rectangle **(b)** : rectangle et non isocèle
   (c) : rectangle et isocèle **(d)** : ni rectangle ni isocèle

2. À tout nombre complexe $z \neq -2$, on associe le nombre complexe z' défini par : $z' = \dfrac{z-4\text{i}}{z+2}$.

   L'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z'| = 1$ est :

   (a) : un cercle de rayon 1 **(b)** : une droite
   (c) : une droite privée d'un point **(d)** : un cercle privé d'un point

3. Les notations sont les mêmes qu' à la question 2.

   L'ensemble des points M d'affixe z tels que z' est un réel est :

   (a) : un cercle **(b)** : une droite
   (c) : une droite privée d'un point **(d)** : un cercle privé d'un point

4. Dans le plan complexe, on donne le point D d'affixe i. L'écriture complexe de la rotation de centre D et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$ est :

   (a) : $z' = \left(\dfrac{1}{2} - \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)z - \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\text{i}$ **(b)** : $z' = \left(-\dfrac{1}{2} + \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)z - \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\text{i}$
   (c) : $z' = \left(\dfrac{1}{2} - \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)z - \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\text{i}$ **(d)** $z' = \left(\dfrac{1}{2} - \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)z + \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\text{i}$

EXERCICE 2 **6 points**

Le graphique de l'annexe sera complété et remis avec la copie.

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;2]$ par

$$f(x) = \frac{2x+1}{x+1}.$$

1. Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0\,;2]$. Montrer que si $x \in [1\,;\,2]$ alors $f(x) \in [1\,;\,2]$.
2. (u_n) et (v_n) sont deux suites définies sur $\mathbb{N}$ par :

   $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

   $v_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = f(v_n)$.

   a. Le graphique donné en annexe représente la fonction f sur l'intervalle $[0\,;2]$.

   Construire sur l'axe des abscisses les trois premiers termes de chacune des suites (u_n) et (v_n) en laissant apparents tous les traits de construction.

À partir de ce graphique, que peut-on conjecturer concernant le sens de variation et la convergence des suites (u_n) et (v_n) ?

b. Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que :
Pour tout entier naturel n, $1 \leqslant v_n \leqslant 2$.
Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} \leqslant v_n$.
On admettra que l'on peut démontrer de la même façon que :
Pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_n \leqslant 2$.
Pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1}$.

c. Montrer que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{v_n - u_n}{(v_n+1)(u_n+1)}$.
En déduire que pour tout entier naturel n, $v_n - u_n \geqslant 0$ et
$v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{4}(v_n - u_n)$.

d. Montrer que pour tout entier naturel n, $v_n - u_n \leqslant \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$.

e. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers un même réel α.
Déterminer la valeur exacte de α.

EXERCICE 3 **5 points**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = (x-1)\left(2 - \mathrm{e}^{-x}\right).$$

Sa courbe représentative $\mathscr{C}$ est tracée dans le repère orthonormal ci-dessous (unité graphique 2 cm).

1. **a.** Étudier la limite de f en $+\infty$.

b. Montrer que la droite Δ d'équation $y = 2x - 2$ est asymptote à $\mathscr{C}$.

c. Étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et Δ.

a. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = x\mathrm{e}^{-x} + 2\left(1 - \mathrm{e}^{-x}\right)$.

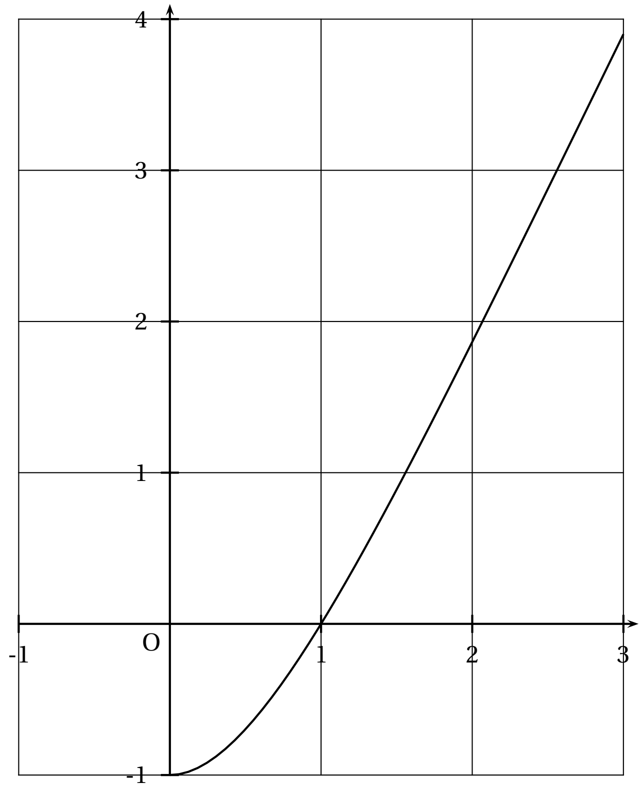
b. En déduire que, pour tout réel x strictement positif, $f'(x) > 0$.

c. Préciser la valeur de $f'(0)$, puis établir le tableau de variations de f.

2. À l'aide d'une intégration par parties, calculer l'aire, exprimée en cm^2, du domaine plan limité par la courbe $\mathscr{C}$, la droite Δ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$.

3. **a.** Déterminer le point A de $\mathscr{C}$ où la tangente à $\mathscr{C}$ est parallèle à Δ.

b. Calculer la distance, exprimée en cm, du point A à la droite Δ.



EXERCICE 4 **5 points**

On dispose d'un dé cubique équilibré dont une face porte le numéro 1, deux faces portent le numéro 2 et trois faces portent le numéro 3.

On dispose également d'une urne contenant dix boules indiscernables au toucher, portant les lettres L, O, G, A, R, I, T, H, M, E (soit quatre voyelles et six consonnes).

Un joueur fait une partie en deux étapes :

Première étape : il jette le dé et note le numéro obtenu.

Deuxième étape :

- si le dé indique 1, il tire au hasard une boule de l'urne. Il gagne la partie si cette boule porte une voyelle et il perd dans le cas contraire.
- si le dé indique 2, il tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne. Il gagne la partie si chacune de ces deux boules porte une voyelle et il perd dans le cas contraire.
- si le dé indique 3, il tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne. Il gagne la partie si chacune de ces trois boules porte une voyelle et il perd dans le cas contraire.

À la fin de chaque partie, il remet dans l'urne la ou les boules tirée(s).

On définit les évènements suivants :

D_1 : « le dé indique 1 » D_2 : « le dé indique 2 »

D_3 : « le dé indique 3 » G : « la partie est gagnée ».

A et B étant deux évènements tels que $p(A) \neq 0$, on note $p_A(B)$ la probabilité de B sachant que A est réalisé.

1. **a.** Déterminer les probabilités $p_{D_1}(G)$, $p_{D_2}(G)$, et $p_{D_3}(G)$

   b. Montrer alors que $p(G) = \dfrac{23}{180}$.

2. Un joueur a gagné la partie. Calculer la probabilité qu'il ait obtenu le numéro 1 avec le dé.

3. Un joueur fait six parties. Calculer la probabilité qu'il en gagne exactement deux et en donner une valeur arrondie à 10^{-2} près.

Quel nombre minimal de parties un joueur doit-il faire pour que la probabilité d'en gagner au moins une soit supérieure à 0,9 ?

EXERCICE 4 **5 points**

Enseignement de spécialité

La figure jointe en annexe sera complétée au cours de l'exercice et remise avec la copie. On y laissera apparents les traits de construction.

Dans le plan orienté, on donne le triangle ABC tel que AB = 2, AC= $1+\sqrt{5}$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

1. **a.** *Démonstration de cours* : démontrer qu'il existe une seule similitude directe S transformant B en A et A en C.

   b. Déterminer le rapport et une mesure de l'angle de S.

2. On appelle Ω le centre de S. Montrer que Ω appartient au cercle de diamètre [AB] et à la droite (BC). Construire le point Ω.

3. On note D l'image du point C par la similitude S.

   a. Démontrer l'alignement des points A, Ω et D ainsi que le parallélisme des droites (CD) et (AB). Construire le point D.

   b. Montrer que CD = $3+\sqrt{5}$.

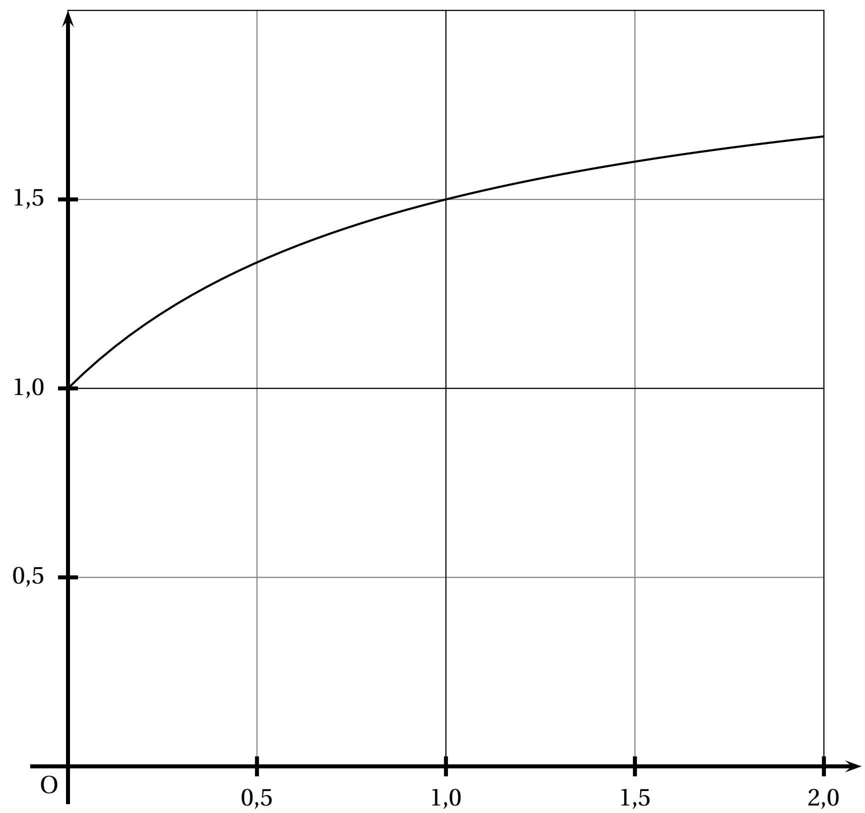
4. Soit E le projeté orthogonal du point B sur la droite (CD).

   a. Expliquer la construction de l'image F du point E par S et placer F sur la figure.

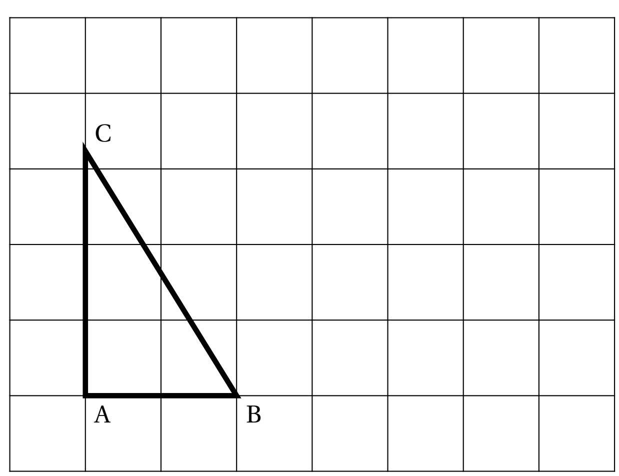
   b. Quelle est la nature du quadrilatère BFDE ?

Cette page sera remise avec la copie à la fin de l'épreuve

Annexe : exercice 2



Annexe : exercice de spécialité



Baccalauréat S Antilles – Guyane juin 2005

EXERCICE 1 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

$\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ est un repère orthonormal du plan $\mathscr{P}$.

Soit A le point d'affixe 1 ; soit B le point d'affixe -1.

Soit F l'application de $\mathscr{P}$ privé de O dans $\mathscr{P}$ qui à tout point M d'affixe z distinct de O associe le point $M' = F(M)$ d'affixe $z' = \dfrac{-1}{\overline{z}}$.

1. **a.** Soit E le point d'affixe $\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}$; on appelle E' son image par F. Déterminer l'affixe de E' sous forme exponentielle, puis sous forme algébrique.

   b. On note $\mathscr{C}_1$ le cercle de centre O et de rayon 1. Déterminer l'image de $\mathscr{C}_1$ par l'application F.

2. **a.** Soit K le point d'affixe $2\text{e}^{\text{i}\frac{5\pi}{6}}$ et K' l'image de K par F.
   Calculer l'affixe de K'.

   b. Soit $\mathscr{C}_2$ le cercle de centre O et de rayon 2. Déterminer l'image de $\mathscr{C}_2$ par l'application F.

3. On désigne par R un point d'affixe $1+\text{e}^{\text{i}\theta}$ où $\theta \in]-\pi~;~\pi[$. R appartient au cercle $\mathscr{C}_3$ de centre A et de rayon 1.

   a. Montrer que $z' + 1 = \dfrac{\overline{z}-1}{\overline{z}}$.
   En déduire que : $\left|z'+1\right| = \left|z'\right|$.

   b. Si on considère maintenant les points d'affixe $1+\text{e}^{\text{i}\theta}$ où $\theta \in]-\pi~;~\pi[$, montrer que leurs images sont situées sur une droite. On pourra utiliser le résultat du **a.**.

EXERCICE 1 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. **a.** Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel non nul n le reste dans la division euclidienne par 9 de 7^n.

   b. Démontrer alors que $(2005)^{2005} \equiv 7~(9)$.

2. **a.** Démontrer que pour tout entier naturel non nul n : $(10)^n \equiv 1~(9)$.

   b. On désigne par N un entier naturel écrit en base dix, on appelle S la somme de ses chiffres.
   Démontrer la relation suivante : $N \equiv S~(9)$.

   c. En déduire que N est divisible par 9 si et seulement si S est divisible par 9.

3. On suppose que $A = (2005)^{2005}$; on désigne par :
   - B la somme des chiffres de A ;
   - C la somme des chiffres de B ;
   - D la somme des chiffres de C.

   a. Démontrer la relation suivante : $A \equiv D~(9)$.

   b. Sachant que $2\,005 < 10\,000$, démontrer que A s'écrit en numération décimale avec au plus 8020 chiffres. En déduire que $B \leqslant 72\,180$.

   c. Démontrer que $C \leqslant 45$.

   d. En étudiant la liste des entiers inférieurs à 45, déterminer un majorant de D plus petit que 15.

e. Démontrer que $D = 7$.

EXERCICE 2 **6 points**

Commun à tous les candidats

1. Démontrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout x de $[0\,;\,1]$:

$$\frac{1}{n} - \frac{x}{n^2} \leqslant \frac{1}{x+n} \leqslant \frac{1}{n}.$$

2. **a.** Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x+n}\,\mathrm{d}x$.

b. Déduire en utilisant **1.**, que :

$$\text{pour } n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} \leqslant \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \quad (1)$$

$$\text{puis que} \quad \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}.$$

3. On appelle U la suite définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$U(n) = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} - \ln(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n).$$

Démontrer que U est décroissante (on pourra utiliser **2. b.**.)

4. On désigne par V la suite de terme général :

$$V(n) = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n+1).$$

Démontrer que V est croissante.

5. Démontrer que U et V convergent vers une limite commune notée γ.
Déterminer une valeur approchée de γ à 10^{-2} près par la méthode de votre choix.

EXERCICE 3 **3 points**

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples constitué de six questions ; chacune comporte trois réponses, une seule est exacte. On notera sur la copie uniquement la lettre correspondant â la réponse choisie.

Un lecteur d'une bibliothèque est passionné de romans policiers et de biographies.
Cette bibliothèque lui propose 150 romans policiers et 50 biographies.
40 % des écrivains de romans policiers sont français et 70 % des écrivains de biographies sont français.
Le lecteur choisit un livre au hasard parmi les 200 ouvrages.

1. La probabilité que le lecteur choisisse un roman policier est :

a. $0,4$ **b.** $0,75$ **c.** $\dfrac{1}{150}$

2. Le lecteur ayant choisi un roman policier, la probabilité que l'auteur soit français est :

   a. $0,3$ **b.** $0,8$ **c.** $0,4$

3. La probabilité que Ie lecteur choisisse un roman policier français est

   a. $1,15$ **b.** $0,4$ **c.** $0,3$

4. La probabilité que le lecteur choisisse un livre d'un écrivain français est :

   a. $0,9$ **b.** $0,7$ **c.** $0,475$

5. La probabilité que le lecteur ait choisi un roman policier sachant que l'écrivain est français est :

   a. $\dfrac{4}{150}$ **b.** $\dfrac{12}{19}$ **c.** $0,3$

6. Le lecteur est venu 20 fois à la bibliothèque ; la probabilité qu'il ait choisi au moins un roman policier est :

   a. $1-(0,25)^{20}$ **b.** $20\times 0,75$ **c.** $0,75\times(0,25)^{20}$

EXERCICE 4 — 6 points

Commun à tous les candidats

A. Soit [KL] un segment de l'espace ; on note I son milieu. On appelle plan médiateur de [KL] le plan perpendiculaire en I à la droite (KL).
Démontrer que le plan médiateur de [KL] est l'ensemble des points de l'espace équidistants de K et L.

B. Ici l'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$; on considère les points

$$\text{A}(4\,;\,0\,;\,-3),\quad \text{B}(2\,;\,2\,;\,2),\quad \text{C}(3\,;\,-3\,;\,-1),\quad \text{D}(0\,;\,0\,;\,-3).$$

1. Démontrer que le plan médiateur de [AB] a pour équation
   $4x-4y-10z-13=0$.

   On admet pour la suite que les plans médiateurs de [BC] et [CD] ont respectivement pour équations $2x-10y-6z-7=0$ et $3x-3y+2z-5=0$.
2. Démontrer, en résolvant un système d'équations linéaires, que ces trois plans ont un unique point commun E dont on donnera les coordonnées.
3. En utilisant la **partie A** montrer que les points A, B, C et D sont sur une sphère de centre E. Quel est le rayon de cette sphère ?

Baccalauréat S Asie juin 2005

EXERCICE 1 **3 points**

Commun à tous les candidats

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. On appelle $\mathcal{D}$ la droite d'équations paramétriques : $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 1+2t \\ y &=& 2-t \\ z &=& -3-t \end{array}\right.$ et $\mathcal{P}$ le plan d'équation cartésienne $x+2y-3z-1=0$.

Dans chacune des lignes du tableau ci-dessous, une seule affirmation est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la ligne et la lettre correspondant à l'affirmation choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 0,5 *point ; une réponse inexacte enlève* 0,25 *point ; l'absence de réponse est comptée* 0 *point. Si le total est négatif, la note est ramenée à* 0.

Numéro de la ligne	Affirmation A	Affirmation B	Affirmation C
1.	Le point M de coordonnées $(-1 ; 3 ; 2)$ appartient à $\mathcal{D}$	Le point N de coordonnées $(2 ; -1 ; -1)$ appartient à $\mathcal{D}$	Le point R de coordonnées $(3 ; 1 ; -4)$ appartient à $\mathcal{D}$
2.	Le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(1 ; 2 ; -3)$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$	Le vecteur $\vec{v}$ de coordonnées $(-2 ; 1 ; 1)$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$	Le vecteur $\vec{w}$ de coordonnées $(3 ; 1 ; -4)$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$
3.	$\mathcal{D}$ est incluse dans $\mathcal{P}$	$\mathcal{D}$ est strictement parallèle à $\mathcal{P}$	$\mathcal{D}$ est sécante à $\mathcal{P}$
4.	Le point G de coordonnées $(1 ; 3 ; -2)$ appartient à $\mathcal{P}$	Le point G de coordonnées $(1 ; 3 ; 2)$ appartient à $\mathcal{P}$	Le point G de coordonnées $(1 ; 3 ; -1)$ appartient à $\mathcal{P}$
5.	Le plan Q_1 d'équation cartésienne $x+2y-3z+1=0$ est perpendiculaire à $\mathcal{P}$	Le plan Q_2 d'équation cartésienne $4x-5y-2z+3=0$ est perpendiculaire à $\mathcal{P}$	Le plan Q_3 d'équation cartésienne $-3x+2y-z-1=0$ est perpendiculaire à $\mathcal{P}$
6.	La distance du point T de coordonnées $(-1 ; -3 ; 2)$ plan $\mathcal{P}$ est : $\sqrt{14}$	La distance du point T de coordonnées $(-1 ; -3 ; 2)$ au plan $\mathcal{P}$ est : 14	La distance du point T de coordonnées $(-1 ; -3 ; 2)$ au plan $\mathcal{P}$ est : $2\sqrt{3}$

EXERCICE 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

Une association organise une loterie pour laquelle une participation m exprimée en euros est demandée.

Un joueur doit tirer simultanément au hasard, deux boules dans une urne contenant 2 boules vertes et 3 boules jaunes.

Si le joueur obtient deux boules de couleurs différentes, il a perdu.

Si le joueur obtient deux boules jaunes, il est remboursé de sa participation m.

Si le joueur obtient 2 boules vertes, il peut continuer le jeu qui consiste à faire tourner une roue où sont inscrits des gains répartis comme suit :

- sur $\dfrac{1}{8}$ de la roue le gain est de 100 €,
- sur $\dfrac{1}{4}$ de la roue le gain est de 20 €,
- sur le reste le joueur est remboursé de sa participation m.

On appelle V l'évènement « le joueur a obtenu 2 boules vertes ».

On appelle J l'évènement « le joueur a obtenu 2 boules jaunes ».

On appelle R l'évènement « le joueur est remboursé de sa participation et ne gagne rien ».

1. Quelques calculs.

a. Calculer les probabilités $P(\text{V})$ et $P(\text{J})$ des évènements respectifs V et J.

b. On note $P_{\text{V}}(\text{R})$ la probabilité pour le joueur d'être remboursé sachant qu'il a obtenu deux boules vertes. Déterminer $P_{\text{V}}(\text{R})$ puis $P(\text{R} \cap \text{V})$.

c. Calculer $P(\text{R})$.

d. Calculer la probabilité de gagner les 100 €, puis la probabilité de gagner les 20 € de la roue.

2. On appelle X la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur c'est-à-dire la différence entre les sommes éventuellement perçues et la participation initiale m.

a. Donner les valeurs prises par la variable aléatoire X.

b. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X et vérifier que $p(X = -m)$ est 0,6.

c. Démontrer que l'espérance mathématique de la variable aléatoire X est $\text{E}(X) = \dfrac{140 - 51m}{80}$.

d. L'organisateur veut fixer la participation m à une valeur entière en euro. Quelle valeur minimale faut-il donner à m pour que l'organisateur puisse espérer ne pas perdre d'argent ?

3. Un joueur se présente et décide de jouer 4 fois, quels que soient les résultats obtenus.

Calculer la probabilité qu'il perde au moins une fois sa mise.

4. On voudrait qu'un joueur ait plus d'une chance sur deux d'être remboursé de sa mise ou de gagner quand il joue une seule fois. On note G cet évènement. Pour cela on garde deux boules vertes dans l'urne mais on modifie le nombre de boules jaunes. On appelle n le nombre de boules jaunes, on suppose $n \geqslant 1$. Calculer la valeur minimale de n pour que la condition précédente soit vérifiée.

EXERCICE 3 **5 points**

Réservé aux candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ (unité graphique 1 cm).

On considère dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation (E) d'inconnue z suivante :

$$z^3 + (-8 + \text{i})z^2 + (17 - 8\text{i})z + 17\text{i} = 0.$$

I. Résolution de l'équation (E).

1. Montrer que $-\text{i}$ est solution de (E).

2. Déterminer les nombres réels a, b, c tels que :

$$z^3 + (-8 + \text{i})z^2 + (17 - 8\text{i})z + 17\text{i} = (z + \text{i})\left(az^2 + bz + c\right).$$

3. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes.

II. On appelle A, B et C les points d'affixes respectives $4 + \text{i}$, $4 - \text{i}$, $-\text{i}$.

1. Placer les points sur une figure que l'on complétera dans la suite de l'exercice.

2. Le point Ω est le point d'affixe 2. On appelle S l'image de A par la rotation de centre Ω et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{2}$. Calculer l'affixe de S.

3. Démontrer que les points B, A, S, C appartiennent à un même cercle $\mathscr{C}$ dont on déterminera le centre et le rayon. Tracer $\mathscr{C}$.

4. À tout point M d'affixe $z \neq 2$, on associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{\text{i}z + 10 - 2\text{i}}{z - 2}$.

 a. Déterminer les affixes des points A', B', C' associés respectivement aux points A, B et C.

 b. Vérifier que A', B', C' appartiennent à un cercle $\mathscr{C}'$ de centre P, d'affixe i. Déterminer son rayon et tracer $\mathscr{C}'$.

 c. Pour tout nombre complexe $z \neq 2$, exprimer $|z' - \text{i}|$ en fonction de z.

 d. Soit M un point d'affixe z appartenant au cercle $\mathscr{C}$. Démontrer que $|z' - \text{i}| = 2\sqrt{5}$.

 e. En déduire à quel ensemble appartiennent les points M' associés aux points M du cercle $\mathscr{C}$.

EXERCICE 3 **5 points**

Réservé aux candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Le but de cet exercice est d'étudier les similitudes directes qui transforment l'ensemble S_1 des sommets d'un carré $\mathscr{C}_1$ donné en l'ensemble S_2 des sommets d'un carré $\mathscr{C}_2$ donné.

Le plan complexe est rapporte à un repère orthonormal direct $\mathscr{R} = \left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, unité graphique 2 cm.

On considère les points A, B, C, D, E, F, G, H d'affixes respectives

$$-\frac{\text{i}}{2},\quad 1 - \frac{\text{i}}{2},\quad 1 + \frac{\text{i}}{2},\quad \frac{\text{i}}{2},\quad 1 - \text{i},\quad 3 - \text{i},\quad 3 + \text{i},\quad 1 + \text{i}.$$

$\mathscr{C}_1$ est le carré de sommets A, B, C, D et de centre O_1, $\mathscr{C}_2$ est le carré de sommet E, F G, H de centre O_2. S_1 est donc l'ensemble {A, B, C, D} et S_2 l'ensemble {E, F, G, H}.

1. Placer tous les points dans le repère $\mathscr{R}$, construire les carrés $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.
2. Soit h l'homothétie de centre Ω d'affixe -1 et de rapport 2. Donner l'écriture complexe de h et prouver que h transforme S_1 en S_2.
3. Soit s une similitude directe qui transforme S_1 en S_2 et soit g la transformation $g = h^{-1} \circ s$.

 a. Quel est le rapport de la similitude s ?

 b. Prouver que g est une isométrie qui laisse S_1 globalement invariant.

 c. Démontrer que $g(\text{O}_1) = \text{O}_1$.

 d. En déduire que g est l'une des transformations suivantes : l'identité, la rotation r_1 de centre O_1 et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, la rotation r_2 de centre O_1 et d'angle π, la rotation r_3 de centre O_1 et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

 e. En déduire les quatre similitudes directes qui transforment S_1 en S_2.

4. Étude des centres de ces similitudes.

 a. Déterminer les écritures complexes de $h \circ r_1$, $h \circ r_2$, $h \circ r_3$.

 b. En déduire les centres Ω_1, Ω_2, Ω_3 de ces similitudes et les placer sur le dessin.

EXERCICE 4 **7 points**

Commun à tous les candidats

On s'intéresse dans cet exercice à une suite de nombres rationnels qui converge vers e^2.

On définit, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, l'intégrale

$$I_n = \int_0^2 \frac{1}{n!}(2 - x)^n \text{e}^x \, \text{d}x.$$

1. Calculer I_1.

2. Établir que pour tout entier naturel $n \geqslant 1,\ 0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{2^n}{n!}\left(\mathrm{e}^2 - 1\right)$.

3. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1,\ I_{n+1} = I_n - \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}$.

4. Démontrer par récurrence que $\mathrm{e}^2 = 1 + \dfrac{2}{1!} + \dfrac{2^2}{2!} + \cdots + \dfrac{2^n}{n!} + I_n$.

5. On pose, pour tout entier naturel $n \geqslant 1,\ u_n = \dfrac{2^n}{n!}$.

  a. Calculer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et prouver que pour tout entier naturel $n \geqslant 3,\ u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}u_n$.

  b. En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 3,\ 0 \leqslant u_n \leqslant u_3\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-3}$.

6. En déduire la limite de la suite (u_n) puis celle de la suite (I_n).

7. Justifier enfin que :

$$\mathrm{e}^2 = \lim_{n \to +\infty}\left(1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \cdots + \frac{2^n}{n!}\right).$$

Baccalauréat S Centres étrangers juin 2005

EXERCICE 1 **3 points**

Commun à tous les candidats

Une entreprise confie à une société de sondage par téléphone une enquête sur la qualité de ses produits.

On admet que lors du premier appel téléphonique, la probabilité que le correspondant ne décroche pas est 0,4 et que s'il décroche, la probabilité pour qu'il réponde au questionnaire est 0,3.

On pourra construire un arbre pondéré.

1. On note :

   • D_1 l'évènement : « la personne décroche au premier appel » ;

   • R_1 l'évènement « la personne répond au questionnaire lors du premier appel ».

   Calculer la probabilité de l'évènement R_1.

2. Lorsqu'une personne ne décroche pas au premier appel, on la contacte une seconde fois. La probabilité pour que le correspondant ne décroche pas la seconde fois est 0,3 et la probabilité pour qu'il réponde au questionnaire sachant qu'il décroche est 0,2. Si une personne ne décroche pas lors du second appel, on ne tente plus de la contacter.

   On note :

   - D_2 l'évènement : « la personne décroche au second appel ».
   - R_2 l'évènement : « la personne répond au questionnaire lors du second appel ».
   - R l'évènement : « la personne répond au questionnaire ».

   Montrer que la probabilité de l'évènement R est 0,236.

3. Sachant qu'une personne a répondu au questionnaire, calculer la probabilité pour que la réponse ait été donnée lors du premier appel. (on donnera la réponse arrondie au millième)

4. Un enquêteur a une liste de 25 personnes à contacter. Les sondages auprès des personnes d'une même liste sont indépendants. Quelle est la probabilité pour que 20 % des personnes répondent au questionnaire ? (on donnera la réponse arrondie au millième)

EXERCICE 2 **5 points**

Réservé aux candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ unité graphique 8 cm.

On appelle A le point d'affixe -1 et B le point d'affixe 1.

On appelle $\mathcal{E}$ l'ensemble des points du plan distincts de A, O et B.

À tout point M d'affixe z appartenant à l'ensemble $\mathcal{E}$, on associe le point N d'affixe z^2 et le point P d'affixe z^3.

1. Prouver que les points M, N et P sont deux à deux distincts.

2. On se propose dans cette question de déterminer l'ensemble $\mathcal{C}$ des points M appartenant à $\mathcal{E}$ tels que le triangle MNP soit rectangle en P.

   a. En utilisant le théorème de Pythagore, démontrer que MNP est rectangle en P si et seulement si $|z+1|^2+|z|^2=1$.

   b. Démontrer que $|z+1|^2+|z|^2=1$ équivaut à $\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(\overline{z+\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{4}$.

c. En déduire l'ensemble $\mathscr{C}$ cherché.

3. Soit M un point de $\mathscr{E}$ et z son affixe, On désigne par r le module de z et α l'argument de z, $\alpha \in]-\pi\ ;\ \pi]$.

a. Démontrer que l'ensemble $\mathscr{F}$ des points M de $\mathscr{E}$ tels que l'affixe de P soit un réel strictement positif est la réunion de trois demi-droites (éventuellement privées de points).

b. Représenter les ensembles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{F}$ dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$.

c. Déterminer les affixes des points M de $\mathscr{E}$ tels que le triangle MNP soit rectangle en P, l'affixe de P étant un réel strictement positif.

EXERCICE 2 — 5 points

Réservé aux candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Partie A

Soit N un entier naturel, impair non premier.
On suppose que $N = a^2 - b^2$ où a et b sont deux entiers naturels.

1. Montrer que a et b n'ont pas la même parité.
2. Montrer que N peut s'écrire comme produit de deux entiers naturels p et q.
3. Quelle est la parité de p et de q ?

Partie B

On admet que 250 507 n'est pas premier.
On se propose de chercher des couples d'entiers naturels $(a\ ;\ b)$ vérifiant la relation

$$(\mathrm{E}) :\quad a^2 - 250\,507 = b^2.$$

1. Soit X un entier naturel.

a. Donner dans un tableau, les restes possibles de X modulo 9 ; puis ceux de X^2 modulo 9.

b. Sachant que $a^2 - 250\,507 = b^2$, déterminer les restes possibles modulo 9 de $a^2 - 250\,507$; en déduire les restes possibles module 9 de a^2.

c. Montrer que les restes possibles modulo 9 de a sont 1 et 8.

2. Justifier que si le couple $(a\ ;\ b)$ vérifie la relation (E), alors $a \geqslant 501$. Montrer qu'il n'existe pas de solution du type $(501\ ;\ b)$.

3. On suppose que le couple $(a\ ;\ b)$ vérifie la relation (E).

a. Démontrer que a est congru à 503 ou à 505 modulo 9.

b. Déterminer le plus petit entier naturel k tel que le couple $(505 + 9k\ ;\ b)$ soit solution de (E), puis donner le couple solution correspondant.

Partie C

1. Déduire des parties précédentes une écriture de 250 507 en un produit deux facteurs.
2. Les deux facteurs sont-ils premiers entre eux ?
3. Cette écriture est-elle unique ?

EXERCICE 3 — 5 points

Commun à tous les candidats

Soit ABCD un tétraèdre tel que ABC, ABD et ACD soient trois triangles isocèles rectangles en A avec AB = AC = AD = a. On appelle A_1 le centre de gravité du triangle BCD.

1. Montrer que la droite (AA_1) est orthogonale au plan (BCD).
$\left(\text{On pourra par exemple calculer } \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{CD} \text{ et } \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{BC}.\right)$

2. En exprimant de deux façons différentes le volume du tétraèdre ABCD, calculer la longueur du segment $[AA_1]$.

3. On appelle G l'isobarycentre du tétraèdre ABCD et I le milieu de [BC].

- **a.** Montrer que G appartient au segment $[AA_1]$ et déterminer la longueur AG.
- **b.** Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que

$$\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right\| = 2\left\|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\|.$$

4. Soit H le symétrique de A par rapport à G.

- **a.** Démontrer que $4\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA}$.
- **b.** Démontrer l'égalité $HC^2 - HD^2 = \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{BA}$.
- **c.** En déduire que HC = HD.

On rappelle que le volume d'une pyramide de hauteur h et d'aire de base associée b est

$$V = \frac{1}{3}bh.$$

EXERCICE 4 **7 points**

Commun à tous les candidats

I. Première partie

On appelle f et g les deux fonctions définies sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \ln(1+x) - x \quad \text{et} \quad g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}.$$

1. Étudier les variations de f et de g sur $[0\,;\,+\infty[$.

2. En déduire que pour tout $x \geqslant 0$, $x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.

II. Deuxième partie

On se propose d'étudier la suite (u_n) de nombres réels définie par :

$$u_1 = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = u_n\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right).$$

1. Montrer par récurrence que $u_n > 0$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

$$\ln u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \cdots + \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right).$$

3. On pose $S_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^3} + \cdots + \dfrac{1}{2^n}$ et $T_n = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4^2} + \dfrac{1}{4^3} + \cdots + \dfrac{1}{4^n}$.
À l'aide de la première partie, montrer que :

$$S_n - \frac{1}{2}T_n \leqslant \ln u_n \leqslant S_n.$$

4. Caiculer S_n et T_n en fonction de n. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$.

5. Étude de la convergence de la suite (u_n).

- **a.** Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

b. En déduire que (u_n) est convergente. Soit ℓ sa limite.

c. On admet le résultat suivant : si deux suites (v_n) et (w_n) sont convergentes et telles que $v_n \leqslant w_n$ pour tout n entier naturel, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.

Montrer alors que $\dfrac{5}{6} \leqslant \ln \ell \leqslant 1$ et en déduire, un encadrement de ℓ.

Baccalauréat S France juin 2005

Exercice 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Cet exercice constitue une restitution organisée de connaissances.

Partie A : question de cours

On suppose connus les résultats suivants :

(1) deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes lorsque : l'une est croissante, l'autre est décroissante et $u_n - v_n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$;

(2) si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes telles que (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante, alors pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, on a $u_n \leqslant v_n$;

(3) toute suite croissante et majorée est convergente ; toute suite décroissante et minorée est convergente.

Démontrer alors la proposition suivante :

« Deux suites adjacentes sont convergentes et elles ont la même limite ».

Partie B

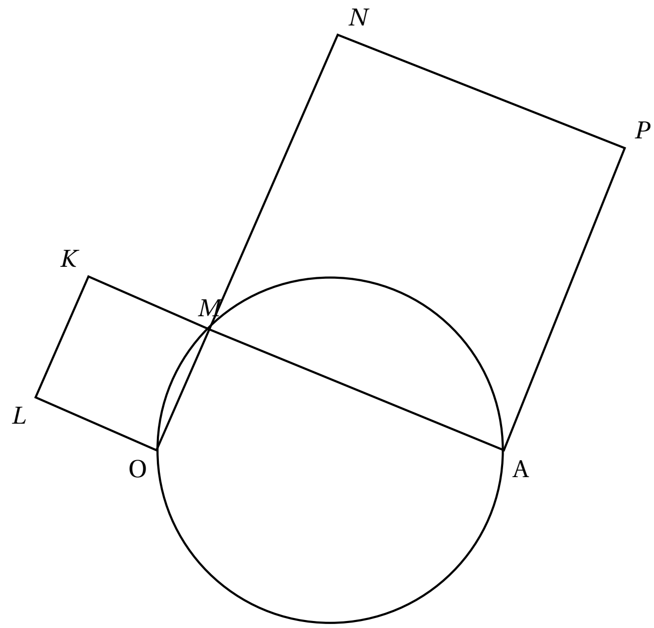
On considère une suite (u_n), définie sur $\mathbb{N}$ dont aucun terme n'est nul. On définit alors la suite (v_n) sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{-2}{u_n}$.

Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse et proposer une démonstration pour la réponse indiquée. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à fournir un contre exemple. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

1. Si (u_n) est convergente, alors (v_n) est convergente.
2. Si (u_n) est minorée par 2, alors (v_n) est minorée par -1.
3. Si (u_n) est décroissante, alors (v_n) est croissante.
4. Si (u_n) est divergente, alors (v_n) converge vers zéro.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité



Dans le plan orienté, on considère les points O et A fixés et distincts, le cercle $\mathscr{C}$ de diamètre [OA], un point M variable appartenant au cercle $\mathscr{C}$, et distinct des points O et A, ainsi que les carrés de sens direct $MAPN$ et MKLO. La figure est représentée ci-dessus.

Le but de l'exercice est de mettre en évidence quelques éléments invariants de la figure et de montrer que le point N appartient à un cercle à déterminer.

On munit le plan complexe d'un repère orthonormal direct de sorte que les affixes des points O et A soient respectivement 0 et 1.

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$. On note $k,\ l,\ m,\ n$ et p les affixes respectives des points $K,\ L,\ M,\ N$ et P.

1. Démontrer que, quel que soit le point M choisi sur le cercle $\mathscr{C}$, on a $\left|m - \dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{1}{2}$.
2. Établir les relations suivantes : $l = \mathrm{i}m$ et $p = -\mathrm{i}m + 1 + \mathrm{i}$. On admettra que l'on a également $n = (1-\mathrm{i})m + \mathrm{i}$ et $k = (1+\mathrm{i})m$.
3. **a.** Démontrer que le milieu Ω du segment [PL] est un point indépendant de la position du point M sur le cercle $\mathscr{C}$.

   b. Démontrer que le point Ω appartient au cercle $\mathscr{C}$ et préciser sa position sur ce cercle.
4. **a.** Calculer la distance KN et démontrer que cette distance est constante.

   b. Quelle est la nature du triangle ΩNK ?
5. Démontrer que le point N appartient à un cercle fixe, indépendant du point M, dont on déterminera le centre et le rayon.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le but de l'exercice est d'étudier quelques propriétés de la figure donnée en annexe. Cette annexe sera à rendre avec la copie.

On munit le plan d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. Le quadrilatère MNPQ est un quadrilatère non croisé et de sens direct. Les triangles MRN, NSP, PTQ et QUM sont des triangles rectangles isocèles, extérieurs au quadrilatère MNPQ et de sens direct (les sommets des angles droits étant respectivement les points R, S, T et U).

Partie A

On désigne par m, n, p et q, les affixes respectives des points M, N, P et Q.

1. Soit f la similitude directe de centre M qui transforme N en R.

   a. Déterminer le rapport et l'angle de la similitude f.

   b. On désigne par r l'affixe du point R. Démontrer que $r = \dfrac{1+\text{i}}{2}m + \dfrac{1-\text{i}}{2}n$, où i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$ (on pourra éventuellement utiliser l'écriture complexe de la similitude f).

   On admettra que l'on a également les résultats $s = \dfrac{1+\text{i}}{2}n + \dfrac{1-\text{i}}{2}p$, $t = \dfrac{1+\text{i}}{2}p + \dfrac{1-\text{i}}{2}q$ et $u = \dfrac{1+\text{i}}{2}q + \dfrac{1-\text{i}}{2}m$, où s, t et u désignent les affixes respectives des points S, T et U.

2. Démontrer que les quadruplets (M, N, P, Q) et (R, S, T, U) ont le même isobarycentre.

3. a. Démontrer l'égalité $u - s = \text{i}(t - r)$.

   b. Que peut-on en déduire pour les longueurs des segments [RT] et [SU], d'une part, et pour les droites (RT) et (SU), d'autre part ?

Partie B

Cette partie sera traitée sans utilisation des nombres complexes.

1. Démontrer, en utilisant les résultats établis dans la **partie A**, qu'il existe une unique rotation g qui transforme R en S et T en U.

2. Décrire comment construire géométriquement le point Ω, centre de la rotation g. Réaliser cette construction sur la figure de l'annexe.

EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

Pour les questions 1 *et* 2, *on donnera les résultats sous forme de fraction et sous forme décimale approchée par défaut à* 10^{-3} *près.*

Un enfant joue avec 20 billes : 13 rouges et 7 vertes. Il met 10 rouges et 3 vertes dans une boîte cubique et 3 rouges et 4 vertes dans une boîte cylindrique.

1. Dans un premier jeu, il choisit simultanément trois billes au hasard dans la boîte cubique et il regarde combien de billes rouges il a choisies. On appelle X la variable aléatoire correspondant au nombre de billes rouges choisies.

   a. Déterminer la loi de probabilité de X.

   b. Calculer l'espérance mathématique de X.

2. Un deuxième jeu est organisé de telle sorte que l'enfant choisisse d'abord au hasard une des deux boîtes, puis qu'il prenne alors une bille, toujours au hasard, dans la boîte choisie. On considère les évènements suivants :

   C1 : « L'enfant choisit la boîte cubique »,

C2 : « L'enfant choisit la boîte cylindrique »,
R : « L'enfant prend une bille rouge »,
V : « L'enfant prend une bille verte ».

a. Représenter par un arbre pondéré la situation correspondant à ce deuxième jeu.

b. Calculer la probabilité de l'évènement R.

c. Sachant que l'enfant a choisi une bille rouge, quelle est la probabilité qu'elle provienne de la boîte cubique ?

3. L'enfant reproduit n fois de suite son deuxième jeu, en remettant à chaque fois la bille tirée à sa place.

a. Exprimer, en fonction de n, la probabilité p_n que l'enfant ait pris au moins une bille rouge au cours de ses n choix.

b. Calculer la plus petite valeur de n pour laquelle $p_n \geqslant 0,99$.

EXERCICE 4 **6 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{3\mathrm{e}^{\frac{x}{4}}}{2 + \mathrm{e}^{\frac{x}{4}}}.$$

a. Démontrer que $f(x) = \dfrac{3}{1 + 2\mathrm{e}^{-\frac{x}{4}}}$.

b. Étudier les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.

c. Étudier les variations de la fonction f.

Partie B

1. On a étudié en laboratoire l'évolution d'une population de petits rongeurs. La taille de la population, au temps t, est notée $g(t)$. On définit ainsi une fonction g de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$. La variable réelle t désigne le temps, exprimé en années. L'unité choisie pour $g(t)$ est la centaine d'individus. Le modèle utilisé pour décrire cette évolution consiste à prendre pour g une solution, sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, de l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}_1)\, y' = \frac{y}{4}.$$

a. Résoudre l'équation différentielle (E_1).

b. Déterminer l'expression de $g(t)$ lorsque, à la date $t = 0$, la population comprend 100 rongeurs, c'est- à-dire $g(0) = 1$.

c. Après combien d'années la population dépassera-t-elle 300 rongeurs pour la première fois ?

2. En réalité, dans un secteur observé d'une région donnée, un prédateur empêche une telle croissance en tuant une certaine quantité de rongeurs. On note $u(t)$ le nombre des rongeurs vivants au temps t (exprimé en années) dans cette région, et on admet que la fonction u, ainsi définie, satisfait aux conditions :

$$(\mathrm{E}_2) \left\{ \begin{array}{lcl} u'(t) & = & \dfrac{u(t)}{4} - \dfrac{[u(t)]^2}{12} \text{ pour tout nombre réel } t \text{ positif ou nul,} \\ u(0) & = & 1. \end{array} \right.$$

où u' désigne la fonction dérivée de la fonction u.

a. On suppose que, pour tout réel positif t, on a $u(t) > 0$. On considère, sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$, la fonction h définie par $h = \dfrac{1}{u}$. Démontrer que la fonction u satisfait aux conditions (E_2) si et seulement si la fonction h satisfait aux conditions

$$(E_3)\left\{\begin{array}{lcl} h'(t) & = & -\dfrac{1}{4}h(t) + \dfrac{1}{12} \text{ pour tout nombre réel } t \text{ positif ou nul,}\\ h(0) & = & 1. \end{array}\right.$$

où h' désigne la fonction dérivée de la fonction h.

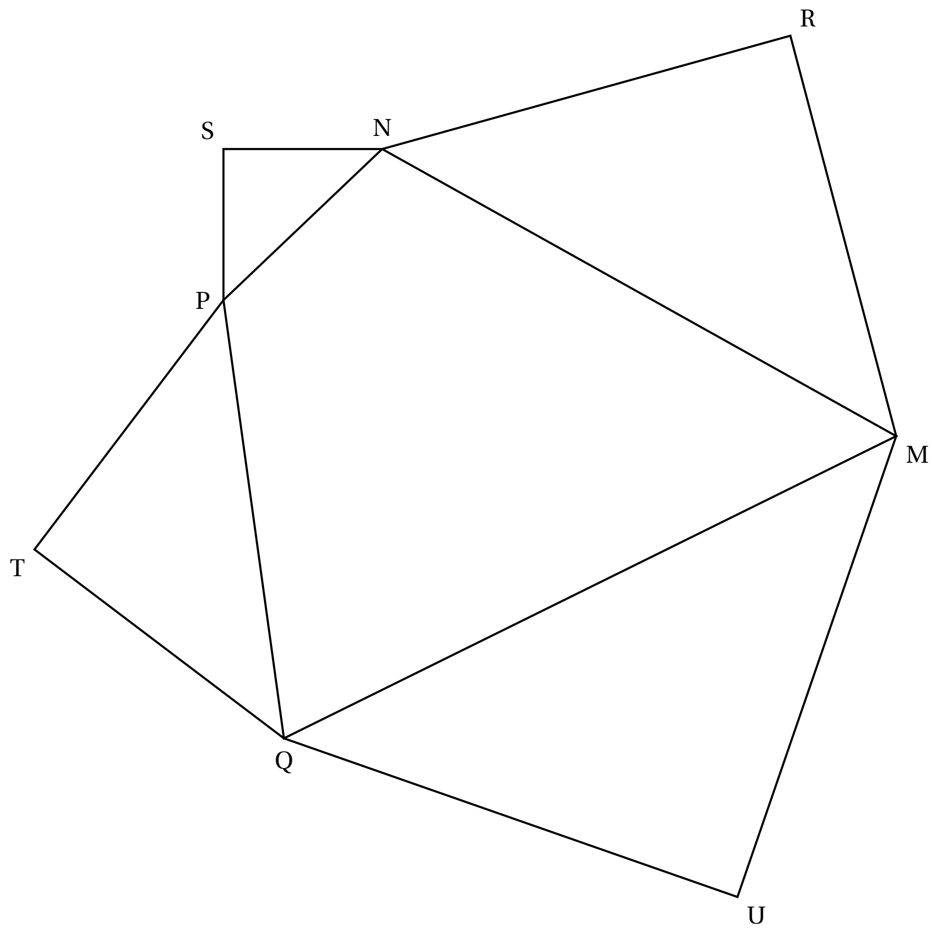
b. Donner les solutions de l'équation différentielle $y' = -\dfrac{1}{4}y + \dfrac{1}{12}$ et en déduire l'expression de la fonction h, puis celle de la fonction u.

c. Dans ce modèle, comment se comporte la taille de la population étudiée lorsque t tend vers $+\infty$?

ANNEXE

À rendre avec la copie

Figure de l'exercice 2 de spécialité



Baccalauréat S La Réunion juin 2005

Exercice 1 **4 points**

Commun à tous les candidats
Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes et sont notées sur un point chacune.
Pour chaque question, il y a exactement deux propositions correctes. Le candidat doit indiquer sur sa copie les deux propositions vraies. Aucune justification n'est demandée.
Chaque réponse exacte rapporte 0,5 *point, chaque réponse fausse enlève* 0,25 point.
Donner trois propositions ou plus d'une question, ou bien n'en donner aucune, ne rapporte aucun point.
Si, par application de ce barème, le total des points de l'exercice est négatif, il est ramené à zéro.

1. Les suites suivantes sont convergentes :

$$\textbf{a. } \left(\frac{2^n}{n^{2005}}\right)_{n>0} \quad \textbf{b. } \left(\frac{2n+(-1)^n\sqrt{n}}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}} \quad \textbf{c. } \left(n\sin\frac{1}{n}\right)_{n>0} \quad \textbf{d. } \left(\frac{\sqrt{n}}{\ln n}\right)_{n>1}$$

2. On considère trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) ayant, pour tout entier naturel n, les propriétés suivantes : $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = -1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(w_n) = 1$.

   Alors :

   a. $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n) = 0$.

   b. La suite (u_n) est minorée.

   c. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $-1 \leqslant v_n \leqslant 1$.

   d. On ne sait pas dire si la suite (v_n) a une limite ou non.

3. Une suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 &= 1,5 \\ u_{n+1} &= 2u_n - 1 \text{ pour tout entier naturel } n. \end{cases}$

   a. La suite (u_n) converge vers 1, abscisse du point d'intersection des droites d'équations $y = x$ et $y = 2x - 1$.

   b. La suite (v_n), définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 1$, est géométrique.

   c. La suite (v_n) est majorée.

   d. La suite (w_n), définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = \ln(u_n - 1)$, est arithmétique.

4. Deux suites (x_n) et (y_n) sont définies pour $n > 0$ par les relations :

$$x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \text{ et } y_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}.$$

   a. Les suites (x_n) et (y_n) sont toutes les deux croissantes.

   b. $x_3 = \dfrac{19}{20}$ et $y_3 = \dfrac{37}{60}$.

   c. Les suites (x_n) et (y_n) ne sont pas majorées.

   d. Les suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n 'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

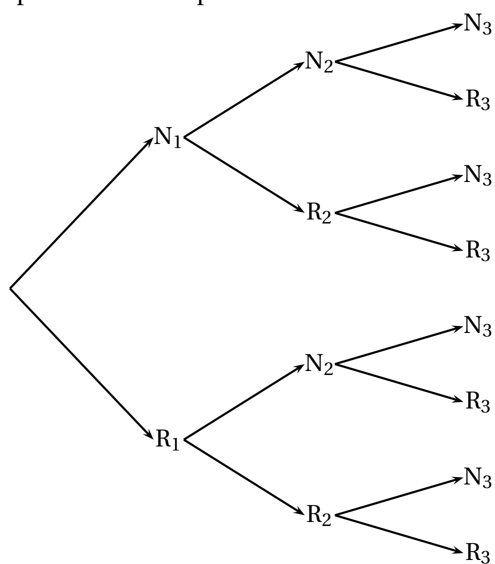
On considère trois urnes U_1, U_2, et U_3.

L'urne U_1 contient deux boules noires et trois boules rouges ; l'urne U_2 contient une boule noire et quatre boules rouges ; l'urne U_3 contient trois boules noires et quatre boules rouges.

Une expérience consiste à tirer au hasard une boule de U_1 et une boule de U_2, à les mettre dans U_3, puis à tirer au hasard une boule de U_3.

Pour i prenant les valeurs 1, 2 et 3, on désigne par N_i, (respectivement R_i) l'évènement « on tire une boule noire de l'urne U_i » (respectivement « on tire une boule rouge de l'urne U_i »).

1. Reproduire et compléter l'arbre de probabilités suivant :



2. **a.** Calculer la probabilité des évènements $N_1 \cap N_2 \cap N_3$, et $N_1 \cap R_2 \cap N_3$.

   b. En déduire la probabilité de l'évènement $N_1 \cap N_3$.

   c. Calculer de façon analogue la probabilité de l'évènement $R_1 \cap N_3$.
3. Déduire de la question précédente la probabilité de l'évènement N_3.
4. Les évènements N_1 et N_3 sont-ils indépendants ?
5. Sachant que la boule tirée dans U_3 est noire, quelle est la probabilité que la boule tirée de U_1 soit rouge ?

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Dans cet exercice, on pourra utiliser le résultat suivant :

« Étant donnés deux entiers naturels a et b non nuls, si $\text{PGCD}(a\ ;\ b) = 1$ alors $\text{PGCD}(a^2\ ;\ b^2) = 1$ ».

Une suite (S_n) est définie pour $n > 0$ par $S_n = \sum_{p=1}^{n} p^3$. On se propose de calculer, pour tout entier naturel non nul n, le plus grand commun diviseur de S_n et S_{n+1}.

1. Démontrer que, pour tout $n > 0$, on a : $S_n = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$.
2. Étude du cas où n est pair. Soit k l'entier naturel non nul tel que $n = 2k$.

   a. Démontrer que $\text{PGCD}(S_{2k}\ ;\ S_{2k+1}) = (2k+1)^2\text{PGCD}\big(k^2\ ;\ (k+1)^2\big)$.

   b. Calculer PGCD $(k\ ;\ k+1)$.

   c. Calculer $\text{PGCD}(S_{2k}\ ;\ S_{2k+1})$.

3. Étude du cas où n est impair. Soit k l'entier naturel non nul tel que $n = 2k+1$.
   a. Démontrer que les entiers $2k+1$ et $2k+3$ sont premiers entre eux.
   b. Calculer PGCD$(S_{2k+1}\ ;\ S_{2k+2})$.
4. Déduire des questions précédentes qu'il existe une unique valeur de n, que l'on déterminera, pour laquelle S_n et S_{n+1} sont premiers entre eux.

EXERCICE 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

On se propose de démontrer qu'il existe une seule fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant la condition :

$$(\text{C}) \quad \left\{\begin{array}{lcl} f(-x)f'(x) & = & 1 \text{ pour tout nombre réel } x,\\ f(0) & = & -4 \end{array}\right.$$

(où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f) et de trouver cette fonction.

1. On suppose qu'il existe une fonction f satisfaisant la condition (C) et on considère alors la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(-x)f(x)$.
   a. Démontrer que la fonction f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
   b. Calculer la fonction dérivée de la fonction g.
   c. En déduire que la fonction g est constante et déterminer sa valeur.
   d. On considère l'équation différentielle (E) $y' = \dfrac{1}{16}y$. Montrer que la fonction f est solution de cette équation et qu'elle vérifie $f(0) = -4$.
2. **Question de cours**
   a. On sait que la fonction $x \longmapsto \text{e}^{\frac{x}{16}}$ est solution de l'équation différentielle (E). Démontrer alors que l'ensemble des solutions de l'équation (E) est l'ensemble des fonctions, définies sur $\mathbb{R}$, de la forme $x \longmapsto K\text{e}^{\frac{x}{16}}$, où K est un nombre réel quelconque
   b. Démontrer qu'il existe une unique solution de l'équation différentielle (E) prenant la valeur -4 en 0.
3. Déduire des questions précédentes qu'il existe une seule fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ satisfaisant la condition (C) et préciser quelle est cette fonction.

EXERCICE 4 **4 points**

Commun à tous les candidats

On appelle hauteur d'un tétraèdre toute droite contenant l'un des sommets de ce tétraèdre et perpendiculaire au plan de la face opposée à ce sommet.
Un tétraèdre est orthocentrique si ses quatre hauteurs sont concourantes.

Partie A

On considère un tétraèdre ABCD et on note H le projeté orthogonal du point A sur le plan (BCD).
Démontrer que, si les hauteurs du tétraèdre ABCD issues des points A et B sont concourantes, alors la droite (BH) est une hauteur du triangle BCD.

Partie B

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ on donne les points A$(3\ ;\ 2\ ;\ -1)$, B$(-6\ ;\ 1\ ;\ 1)$, C$(4\ ;-3\ ;\ 3)$ et D$(-1\ ;\ -5\ ;\ -1)$.

1. a. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (BCD) est :
   $-2x - 3y + 4z - 13 = 0$.

b. Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur le plan (BCD).

c. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CD}$.

d. Le tétraèdre ABCD est-il orthocentrique ?

2. On définit les points I(1 ; 0 ; 0), J(0 ; 1 ; 0), K(0 ; 0 ; 1). Le tétraèdre OIJK est-il orthocentrique ?

EXERCICE 5 **3 points**

Commun à tous les candidats

L'exercice comporte une annexe à rendre avec la copie.

On considère les fonctions f et g définies, sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, par

$$f(x) = \ln(x+1) \quad \text{et} \quad g(x) = e^x - 1.$$

On désigne par $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. Ces courbes sont tracées sur la feuille annexe, dont le candidat disposera comme il le jugera utile ; cette annexe sera à joindre à la copie, avec les éventuels ajouts effectués par le candidat,

1. Vérifier que les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont une tangente commune au point O(0 ; 0). Préciser la position de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à cette tangente.

2. Démontrer que les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

3. Soit a un nombre réel strictement positif. On se propose de calculer de deux façons différentes le nombre $I(a) = \displaystyle\int_0^a \ln(x+1)\,dx$.

a. En utilisant des considérations d'aires, démontrer que

$$I(a) = a\ln(a+1) - \int_0^{\ln(a+1)} \left(e^x - 1\right)\,dx.$$

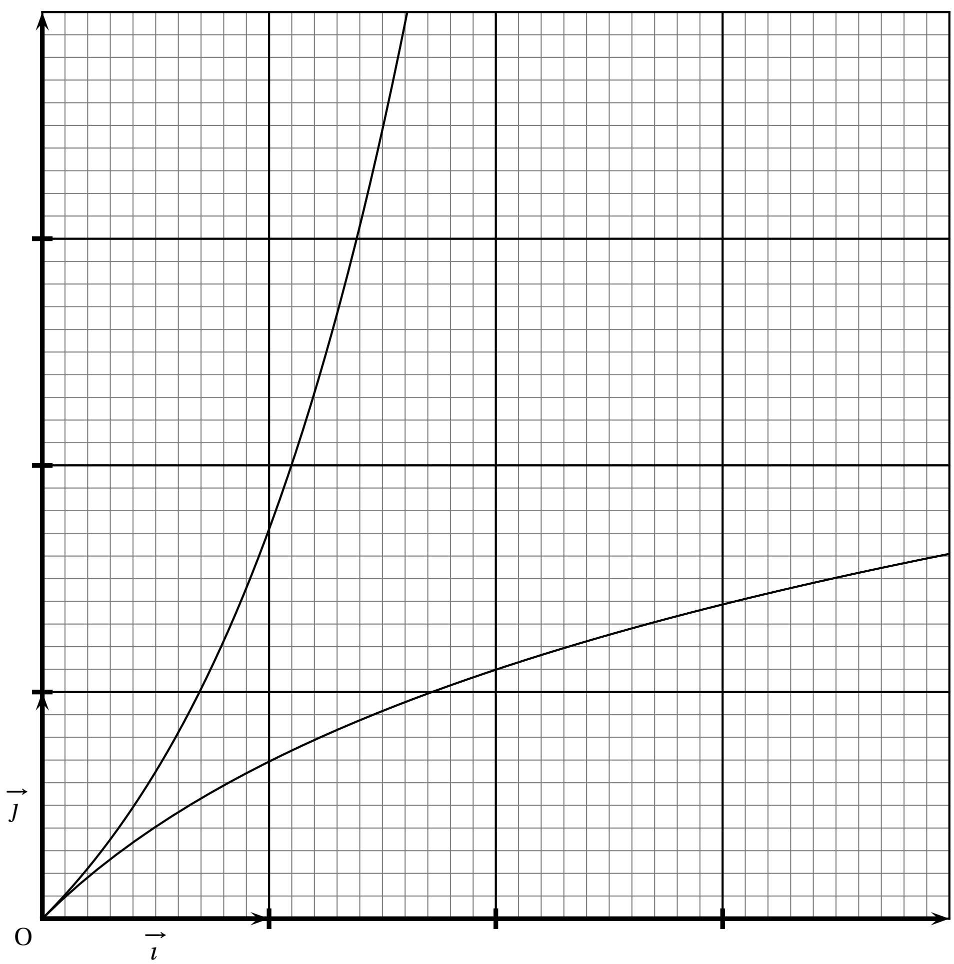
b. En déduire la valeur de $I(a)$.

c. Retrouver la valeur de $I(a)$ en effectuant une intégration par parties.

ANNEXE

À rendre avec la copie

Courbes de l'exercice 5



∽ Baccalauréat S Liban juin 2005 ∾

EXERCICE 1 **4 points**

Pour chacune des huit affirmations (entre guillemets) ci -dessous, préciser si elle est vraie ou fausse.

Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la mention « vrai » ou « faux ».

Une réponse correcte rapporte 0,5 point, une réponse incorrecte enlève 0,25 point, l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de points.

Un éventuel total négatif sera ramené à zéro.

1. « Si a est un nombre réel quelconque et f une fonction définie et strictement décroissante sur $[a\,;\,+\infty[$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$. »
2. Soient f et g deux fonctions définies sur $[0\,;\,+\infty[$, g ne s'annulant pas :

   « Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = -1$ ».
3. « Si f est une fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ telle que $0 \leqslant f(x) \leqslant \sqrt{x}$ sur $[0\,;\,+\infty[$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ »
4. On considère un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ du plan.

   « Si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ alors la droite d'équation $x = 0$ est asymptote à la courbe représentative de f dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ ».
5. « La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(x^2 + 3x + 1\right)\mathrm{e}^x$ est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' - y = (2x+3)\mathrm{e}^x$ ».
6. Soient A, B, C trois points du plan. On appelle I le barycentre des points A et B affectés respectivement des coefficients 3 et -2.

   « Si G est le barycentre des points A, B et C affectés respectivement des coefficients $3, -2$ et 1 alors G est le milieu du segment [CI] ».
7. Soient A, B, C trois points du plan et G le barycentre de A, B et C affectés respectivement des coefficients 3, -2 et 1

   « L'ensemble des points M du plan tels que $\|3\overrightarrow{M\mathrm{A}} - 2\overrightarrow{M\mathrm{B}} + \overrightarrow{M\mathrm{C}}\| = 1$ est le cercle de centre G et de rayon 1 ».
8. Soient A et B deux points distincts du plan. On désigne par M un point quelconque du plan.

   « Le produit scalaire $\overrightarrow{M\mathrm{A}} \cdot \overrightarrow{M\mathrm{B}}$ est nul si et seulement si $M = \mathrm{A}$ ou $M = \mathrm{B}$ ».

EXERCICE 2 **3 points**

Un fabricant d'écrans plasma teste une première fois ses appareils à la sortie de la chaîne de fabrication.

Si le test est positif (c'est- à-dire si l'écran fonctionne correctement), l'écran est acheminé chez le client. Sinon l'écran retourne en usine où il est réparé puis testé une seconde fois. Si ce deuxième test est positif, l'écran est acheminé chez le client, sinon il est détruit.

Une étude statistique a permis de montrer que le test est positif pour 70 % des écrans neufs sortis directement des chaînes de fabrication, mais que parmi les écrans réparés, seulement 65 % d'entre eux passent le second test avec succès.

On note T_1 l'évènement : « le premier test est positif ».

On note C l'évènement : « l'écran est acheminé chez le client ».

1. On choisit un écran au hasard à la sortie de la chaîne de fabrication.

   Déterminer les probabilités des évènements T_1, et C.

2. La fabrication d'un écran revient à 1 000 € au fabricant si l'écran n'est testé qu'une fois.

   Cela lui coûte 50 € de plus si l'écran doit être testé une seconde fois.

   Un écran est facturé a euros (a étant un réel positif) au client.

   On introduit la variable aléatoire X qui, à chaque écran fabriqué, associe le « gain » (éventuellement négatif) réalisé par le fabricant.

   a. Déterminer la loi de probabilité de X en fonction de a.

   b. Exprimer l'espérance de X en fonction de a.

   c. À partir de quelle valeur de a, l'entreprise peut-elle espérer réaliser des bénéfices ?

EXERCICE 3 **8 points**

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\text{pour tout entier naturel } n \text{ non nul, } u_n = \int_0^1 (1-t)^n \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que la fonction $f\ :\ t \longmapsto (2-t)\mathrm{e}^t$ est une primitive de $g\ :\ t \longmapsto (1-t)\mathrm{e}^t$ sur $[0\ ;\ 1]$.

   En déduire la valeur de u_1.

2. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout n non nul,

$$u_{n+1} = (n+1)u_n - 1 \quad \text{(R)}$$

Partie B

On regarde d'abord ce qu'affichent deux calculatrices différentes pour les valeurs approchées des 25 premiers termes de la suite (u_n) en utilisant pour le calcul la relation de récurrence (R) ci-dessus.

Voici les résultats affichés par ces deux calculatrices :

Valeur de n	Valeur de u_n affichée par la première calculatrice	Valeur de u_n affichée par le deuxième calculatrice
1	7,1828182845E−01	7,1828182846E−01
2	4,3656365691E−01	4,3656365692E−01
3	3,0969097075E−01	3,0969097076E−01
4	2,3876388301E−01	2,3876388304E−01
5	1,9381941508E−01	1,9381941520E−01
6	1,6291649051E−01	1,6291649120E−01
7	1,4041543358E−01	1,4041543840E−01
8	1,2332346869E−01	1,2332350720E−01
9	1,0991121828E−01	1,0991156480E−01
10	9,9112182825E−02	9,9115648000E−01
11	9,0234011080E−02	9,0272128000E−02
12	8,2808132963E−02	8,3265536000E−02
13	7,6505728522E−02	8,2451968000E−02
14	7,1080199309E−02	1,5432755200E−01
15	6,6202989636E−02	1,3149132800E+00
16	5,9247834186E−02	2,0038612480E+01
17	7,2131811612E−03	3,3965641216E+02
18	−8,7016273909E−01	6,1128154189E+03
19	−1,7533092042E+01	1,1614249296E+05
20	−3,5166184085E+02	2,3228488592E+06
21	−7,3858986580E+03	4,8779825043E+07
22	−1,6249077047E+05	1,0731561499E+09
23	−3,7372887209E+06	2,4682591448E+10
24	−8,9694930302E+07	5,9238219474E+11
25	−2,2423732585E+09	1,4809554869E+13

Quelle conjecture peut-on faire sur la convergence de la suite (u_n) quand on examine les résultats obtenus avec la première calculatrice ? Et avec les résultats obtenus avec la deuxième calculatrice ?

Partie C

Dans cette partie on se propose d'étudier la suite (u_n) à partir de la définition :

$$\text{pour tout entier naturel } n \text{ non nul, } u_n = \int_0^1 (1-t)^n \text{e}^t \,\text{d}t.$$

1. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $u_n \geqslant 0$.

2. **a.** Montrer que pour tout réel t de l'intervalle $[0 ; 1]$ et pour tout entier naturel non nul n

$$(1-t)^n \text{e}^t \leqslant \text{e} \times (1-t)^n.$$

b. En déduire que pour tout n non nul, $u_n \leqslant \dfrac{\text{e}}{n+1}$.

3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Partie D

Dans cette partie, on se propose d'exploiter la relation de récurrence (R) vérifiée par la suite (u_n).

$$u_{n+1} = (n+1)u_n - 1$$

Étant donné un réel a, on considère la suite (v_n) définie par :

$$v_1 = a \quad \text{et pour tout entier naturel non nul } n,\ v_{n+1} = (n+1)v_n - 1.$$

1. En utilisant le raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier naturel non nul n, $v_n = u_n + (n!)(a+2-\mathrm{e})$ où $n!$ désigne le produit des n premiers entiers naturels non nuls.
2. Étudier le comportement de la suite (v_n) à l'infini suivant les valeurs de a.
(On rappelle que $\lim\limits_{n\to+\infty} n! = +\infty$.)
3. En déduire une raison susceptible d'expliquer les résultats affichés par les deux calculatrices.

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. Unité graphique : 0,5cm.
On note j le nombre complexe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$.
On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 8$, $b = 6\mathrm{j}$ et $c = 8\mathrm{j}^2$.
Soit A' l'image de B par la rotation de centre C et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.
Soit B' l'image de C par la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.
Soit C' l'image de A par la rotation de centre B et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

1. Placer les points A, B, C, A', B' et C' dans le repère donné.
2. On appelle a', b' et c' les affixes respectives des points A', B' et C'.
   a. Calculera'. On vérifiera que a' est un nombre réel.
   b. Montrer que $b' = 16\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\Pi}{3}}$.
   En déduire que O est un point de la droite $(\mathrm{B}B')$.
   c. On admet que $c' = 7 + 7\mathrm{i}\sqrt{3}$.
   Montrer que les droites $(\mathrm{A}A')$, $(\mathrm{B}B')$ et $(\mathrm{C}C')$ sont concourantes en O.
3. On se propose désormais de montrer que la distance $M\mathrm{A} + M\mathrm{B} + M\mathrm{C}$ est minimale lorsque $M = \mathrm{O}$.
   a. Calculer la distance OA + OB + OC.
   b. Montrer que $\mathrm{j}^3 = 1$ et que $1 + \mathrm{j} + \mathrm{j}^2 = 0$.
   c. On considère un point M quelconque d'affixe z du plan complexe.
   On rappelle que $a = 8$, $b = 6\mathrm{j}$ et $c = 8\mathrm{j}^2$.
   Déduire des questions précédentes les égalités suivantes :
   $$\left|(a-z) + (b-z)\mathrm{j}^2 + (c-z)\mathrm{j}\right| = \left|a + b\mathrm{j}^2 + c\mathrm{j}\right| = 22.$$
   d. On admet que, quels que soient les nombres complexes z, z' et z'' :
   $$\left|z + z' + z''\right| \leqslant |z| + \left|z'\right| + \left|z''\right|.$$
   Montrer que $M\mathrm{A} + M\mathrm{B} + M\mathrm{C}$ est minimale lorsque $M = \mathrm{O}$.

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. On considère l'équation (E) :

$$109x - 226y = 1$$

où x et y sont des entiers relatifs.

a. Déterminer le pgcd de 109 et 226. Que peut-on en conclure pour l'équation (E) ?

b. Montrer que l'ensemble de solutions de (E) est l'ensemble des couples de la forme $(141 + 226k,\ 68 + 109k)$, où k appartient à $\mathbb{Z}$.

En déduire qu'il existe un unique entier naturel non nul d inférieur ou égal à 226 et un unique entier naturel non nul e tels que $109d = 1 + 226e$. (On précisera les valeurs des entiers d et e.)

2. Démontrer que 227 est un nombre premier.

3. On note A l'ensemble des 227 entiers naturels a tels que $a \leqslant 226$.

On considère les deux fonctions f et g de A dans A définies de la manière suivante :

à tout entier a de A, f associe le reste de la division euclidienne de a^{109} par 227.

à tout entier a de A, g associe le reste de la division euclidienne de a^{141} par 227.

a. Vérifier que $g[f(0)] = 0$.

On rappelle le résultat suivant appelé petit théorème de Fermat :

Si p est un nombre premier et a un entier non divisible par p alors $a^{p-1} \equiv 1$ modulo p.

b. Montrer que, quel que soit l'entier non nul a de A, $a^{226} \equiv 1 \quad [\text{modulo } 227]$.

c. En utilisant **1. b.**, en déduire que, quel que soit l'entier non nul a de A. $g[f(a)] = a$.

Que peut-on dire de $f[(g(a)] = a$?

Baccalauréat S Polynésie 9 juin 2005

Exercice 1 **3 points**

Une usine d'horlogerie fabrique une série de montres.
Au cours de la fabrication peuvent apparaître deux types de défauts, désignés par a et b.
2 % des montres fabriquées présentent le défaut a et 10 % le défaut b.
Une montre est tirée au hasard dans la production. On définit les évènements suivants :

A : « la montre tirée présente le défaut a » ;
B : « la montre tirée présente le défaut b » ;
C : « la montre tirée ne présente aucun des deux défauts » ;
D : « la montre tirée présente un et un seul des deux défauts ».

On suppose que les évènements A et B sont indépendants.

1. Montrer que la probabilité de l'évènement C est égale à 0,882.
2. Calculer la probabilité de l'évènement D.
3. Au cours de la fabrication, on prélève au hasard successivement cinq montres.

   On considère que le nombre de montres fabriquées est assez grand pour que l'on puisse supposer que les tirages se font avec remise et sont indépendants.

   Soit X la variable aléatoire qui, à chaque prélèvement de cinq montres, associe le nombre de montres ne présentant aucun des deux défauts a et b.

   On définit l'évènement E : « quatre montres au moins n'ont aucun défaut ».

   Calculer la probabilité de l'évènement E. On en donnera une valeur approchée à 10^{-3} près.

Exercice 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Pour chacune des cinq questions, une seule des trois propositions est exacte.

Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 1 *point ; une réponse inexacte enlève* 0,5 *point ; l'absence de réponse est comptée* 0 *point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.*

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On considère les points A(3 ; 1 ; 3) et B(−6 ; 2 ; 1).
Le plan $\mathscr{P}$ admet pour équation cartésienne $x + 2y + 2z = 5$.

1. L'ensemble des points M de l'espace tels que $\left\|4\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right\| = 2$ est :

   a. un plan de l'espace **b.** une sphère **c.** l'ensemble vide.

2. Les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathscr{P}$ sont :

   a. $\left(\frac{11}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\right)$ **b.** $\left(\frac{8}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\ ;\ \frac{7}{3}\right)$ **c.** $\left(\frac{7}{3}\ ;\ -\frac{1}{3}\ ;\ \frac{5}{3}\right)$.

3. La sphère de centre B et de rayon 1 :

   a. coupe le plan $\mathscr{P}$ suivant un cercle ;

   b. est tangente au plan $\mathscr{P}$;

   c. ne coupe pas le plan $\mathscr{P}$.

4. On considère la droite $\mathscr{D}$ de l'espace passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}\,(1\,;\,2\,;\,-1)$ et la droite $\mathscr{D}'$ d'équations paramétriques $\left\{\begin{array}{l c l} x & = & 3+2t\\ y & = & 3+t\\ z & = & t\end{array}\right. \quad (t \in \mathbb{R})$.

   Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont :

   a. coplanaires et parallèles **b.** coplanaires et sécantes **c.** non coplanaires.

5. L'ensemble des points M de l'espace équidistants des points A et B est :

   a. la droite d'équations paramétriques $\left\{\begin{array}{l c l} x & = & -\frac{3}{2}-t\\ y & = & \frac{3}{2}-7t\\ z & = & 2+t\end{array}\right. \quad (t \in \mathbb{R})$.

   b. le plan d'équation cartésienne $9x - y + 2z + 11 = 0$.

   c. le plan d'équation cartésienne $x + 7y - z - 7 = 0$.

Exercice 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par

$$\left\{\begin{array}{l c l} u_0 & = & 14\\ u_{n+1} & = & 5u_n - 6 \text{ pour tout entier naturel } n\end{array}\right.$$

1. Calculer $u_1,\ u_2,\ u_3$ et u_4.
   Quelle conjecture peut-on émettre concernant les deux derniers chiffres de u_n ?
2. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+2} \equiv u_n \pmod 4$.
   En déduire que pour tout entier naturel k, $u_{2k} \equiv 2 \pmod 4$ et $u_{2k+1} \equiv 0 \pmod 4$.
3. **a.** Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $2u_n = 5^{n+2} + 3$.

   b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $2u_n \equiv 28 \pmod{100}$.
4. Déterminer les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de u_n suivant les valeurs de n.
5. Montrer que le PGCD de deux termes consécutifs de la suite (u_n) est constant. Préciser sa valeur.

Exercice 3 **7 points**

La page annexe sera à compléter et à remettre avec la copie à la fin de l'épreuve.

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x + \ln x.$$

On nomme Γ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ du plan.

1. **a.** Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son intervalle de définition.

   b. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

2. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel n, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution dans $]0\ ;\ +\infty[$.
   On note α_n cette solution. On a donc : pour tout entier naturel n, $\alpha_n + \ln \alpha_n = n$.

   b. Sur la page annexe, on a tracé Γ dans le repère $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
   Placer les nombres α_0, α_1, α_2, α_3, α_4 et α_5 sur l'axe des abscisses en laissant apparents les traits de construction.

   c. Préciser la valeur de α_1.

   d. Démontrer que la suite (α_n) est strictement croissante.

3. **a.** Déterminer une équation de la tangente Δ à la courbe Γ au point A d'abscisse 1.

   b. Étudier les variations de la fonction h définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

   $$h(x) = \ln x - x + 1.$$

   En déduire la position de la courbe Γ par rapport à Δ.

   c. Tracer Δ sur le graphique de la page annexe. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $\dfrac{n+1}{2} \leqslant \alpha_n$.

4. Déterminer la limite de la suite (α_n).

Partie B

On considère une fonction g continue, strictement croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$ et telle que $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.
On admet que l'on peut, comme on l'a fait dans la **partie A**, définir sur $\mathbb{N}$ une suite $\left(\beta_n\right)$ de réels tels que $g\left(\beta_n\right) = n$, et que cette suite est strictement croissante.

1. Démonstration de cours :
   Prérequis : définition d'une suite tendant vers $+\infty$.
   « *Une suite tend vers $+\infty$ si, pour tout réel A, tous les termes de la suite sont, à partir d'un certain rang, supérieurs à A* ».
   Démontrer le théorème suivant : *une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.*

2. Montrer que la suite $\left(\beta_n\right)$ tend vers $+\infty$.

Exercice 4 **5 points**

Le plan complexe est rapporté a un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$. Unité graphique : 2 cm.

1. On rappelle que, pour tous nombres complexes a et b,
   $a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$.
   Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $z^3 = 8$.

2. On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives a, b et c définies par :

   $$a = 2, \quad b = -1 + \text{i}\sqrt{3} \quad \text{et} \quad c = -1 - \text{i}\sqrt{3}.$$

   On appelle r la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ et r' la rotation de centre A et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.
   On pose $\text{B}' = r'(\text{B})$ et $\text{C}' = r(\text{C})$ et on note b' et c' les affixes respectives de B′ et C′.

   a. Placer les points A, B et C dans le repère $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
   Dans la suite de l'exercice, on complètera cette figure.

b. Montrer que $b' = 2 + \sqrt{3} + 3\text{i}$.

c. Montrer que b' et c' sont des nombres conjugués.

3. On appelle M, N, P et Q les milieux respectifs des segments [CB], [BB′], [B′C′] et [C′C]. On note $m,\ n,\ p$ et q leurs affixes.

a. Montrer que l'affixe n du point N est égale à $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\left(1+\text{i}\sqrt{3}\right)$.
En déduire que les points O, N et C sont alignés,

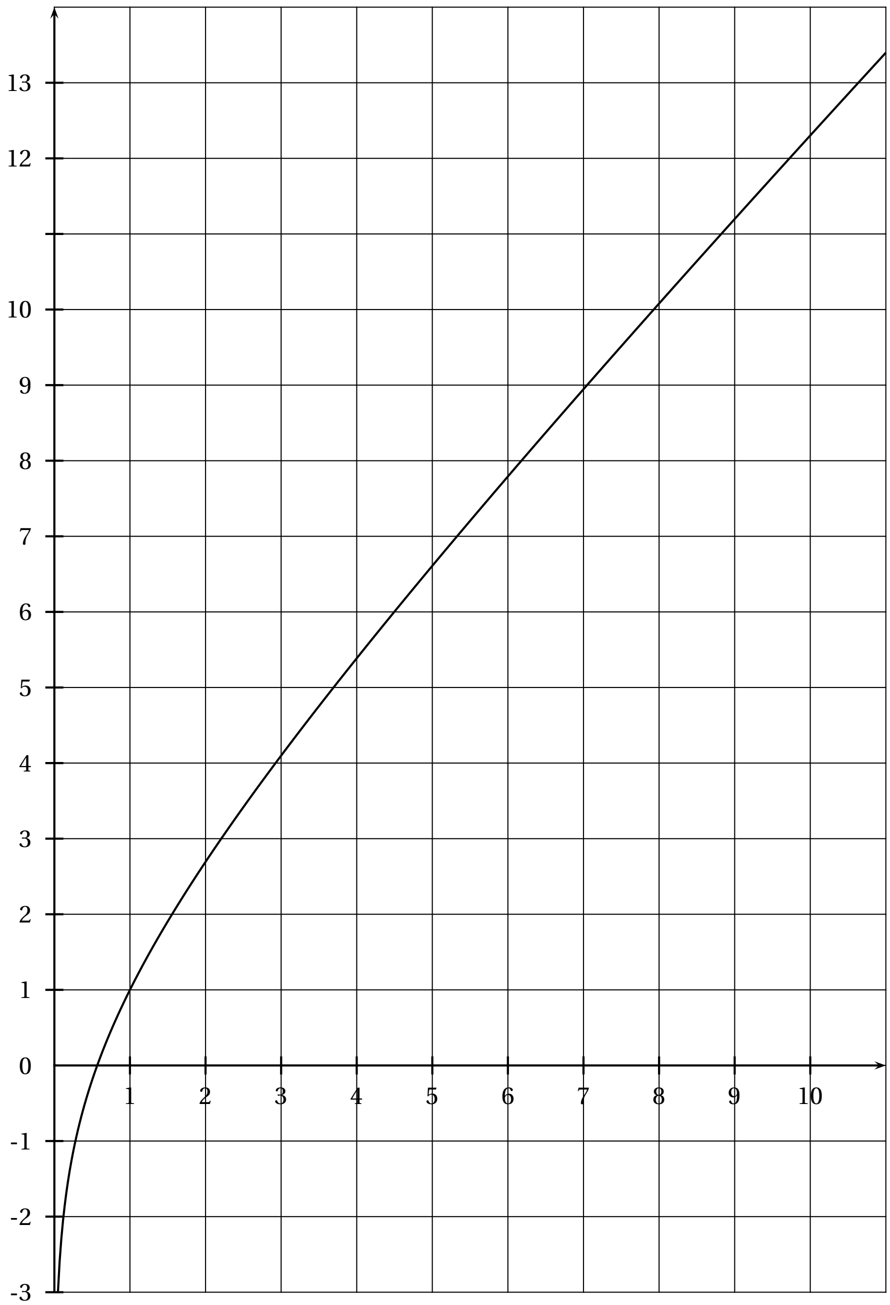
b. Montrer que $n+1 = \text{i}(q+1)$. Que peut-on en déduire pour le triangle MNQ ?

c. Montrer que le quadrilatère MNPQ est un carré.

Page annexe

Cette page sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve

Exercice 3



Baccalauréat S Pondichéry 31 mars 2005

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f, définie sur $[1 ; +\infty[$ par

$$f(t) = \frac{\mathrm{e}^t}{t}.$$

1. **a.** Justifier la continuité de f sur $[1 ; +\infty[$.

   b. Montrer que f est croissante sur $[1 ; +\infty[$.

2. **Restitution organisée de connaissances**

   On pourra raisonner en s'appuyant sur le graphique fourni.

   Pour tout réel x_0 de $[1 ; +\infty[$, on note $\mathscr{A}(x_0)$ l'aire du domaine délimité par la courbe représentant f dans un repère orthogonal, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = x_0$.

   On se propose de démontrer que la fonction ainsi définie sur $[1 ; +\infty[$ est une primitive de f.

   a. Que vaut $\mathscr{A}(1)$?

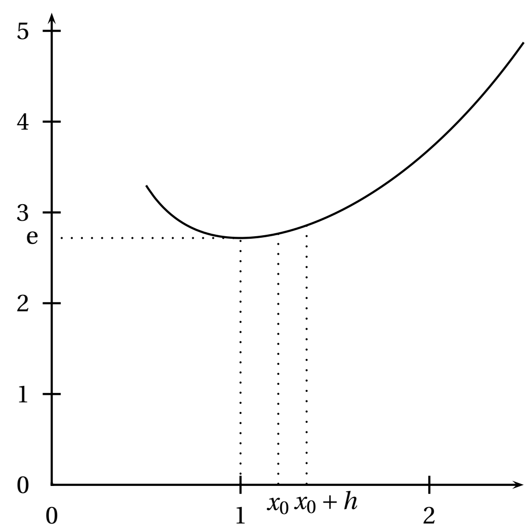
   b. Soit x_0 un réel quelconque de $[1 ; +\infty[$ et h un réel strictement positif. Justifier l'encadrement suivant :

   $$f(x_0) \leqslant \frac{\mathscr{A}(x_0 + h) - \mathscr{A}(x_0)}{h} \leqslant f(x_0 + h).$$

   c. Lorsque $x_0 > 1$, quel encadrement peut-on obtenir pour $h < 0$ et tel que $x_0 + h \geqslant 1$?

   d. En déduire la dérivabilité en x_0 de la fonction $\mathscr{A}$ ainsi que le nombre dérivé en x_0 de la fonction $\mathscr{A}$.

   e. Conclure.



EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

On désigne par I le point d'affixe $z_{\mathrm{I}} = 1$, par A le point d'affixe $z_{\mathrm{A}} = 1 - 2\mathrm{i}$, par B le point d'affixe $-2 + 2\mathrm{i}$ et par $(\mathscr{C})$ le cercle de diamètre [AB].

On fera une figure que l'on complètera avec les différents éléments intervenant dans l'exercice. On prendra pour unité graphique 2 cm.

1. Déterminer le centre Ω du cercle $(\mathscr{C})$ et calculer son rayon.

2. Soit D le point d'affixe $z_D = \dfrac{3+9i}{4+2i}$.
Écrire z_D sous forme algébrique puis démontrer que D est un point du cercle $(\mathscr{C})$.

3. Sur le cercle $(\mathscr{C})$, on considère le point E, d'affixe z_E, tel qu'une mesure en radians de $\left(\overrightarrow{\Omega I}, \overrightarrow{\Omega E}\right)$ est $\dfrac{\pi}{4}$.

a. Préciser le module et un argument de $z_E + \dfrac{1}{2}$.

b. En déduire que $z_E = \dfrac{5\sqrt{2}-2}{4} + \dfrac{5\sqrt{2}}{4}i$.

4. Soit r l'application du plan P dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' + \frac{1}{2} = e^{i\frac{\pi}{4}}\left(z + \frac{1}{2}\right).$$

a. Déterminer la nature de r et ses éléments caractéristiques.

b. Soit K le point d'affixe $z_K = 2$.
Déterminer par le calcul l'image de K par r. Comment peut-on retrouver géométriquement ce résultat ?

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté a un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On considère l'application f qui au point M d'affixe z fait correspondre le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{3+4i}{5}\overline{z} + \frac{1-2i}{5}.$$

1. On note x et x', y et y' les parties réelles et les parties imaginaires de z et z'.
Démontrer que : $\begin{cases} x' &= \dfrac{3x+4y+1}{5} \\ y' &= \dfrac{4x-3y-2}{5} \end{cases}$

2. **a.** Déterminer l'ensemble des points invariants par f.

b. Quelle est la nature de l'application f ?

3. Déterminer l'ensemble D des points M d'affixe z tels que z' soit réel.

4. On cherche à déterminer les points de D dont les coordonnées sont entières.

a. Donner une solution particulière $(x_0,\ y_0)$ appartenant a $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $4x - 3y = 2$.

b. Determiner l'ensemble des solutions appartenant à $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $4x - 3y = 2$.

5. On considère les points M d'affixe $z = x + iy$ tels que $x = 1$ et $y \in \mathbb{Z}$. Le point $M' = f(M)$ a pour affixe z'.
Déterminer les entiers y tels que $\text{Re}(z')$ et $\text{lm}(z')$ soient entiers (on pourra utiliser les congruences modulo 5).

EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

L'espace E est rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. On considère les points A, B et C de coordonnées respectives $(1 ; 0 ; 2)$, $(1 ; 1 ; 4)$ et $(-1 ; 1 ; 1)$.

1. **a.** Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

   b. Soit $\overrightarrow{n}$ le vecteur de coordonnées $(3\ ;\ 4\ ;\ -2)$.
   Vérifier que le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}$.
   En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

2. Soient P_1 et P_2 les plans d'équations respectives $2x + y + 2z + 1 = 0$ et $x - 2y + 6z = 0$.

   a. Montrer que les plans P_1 et P_2 sont sécants selon une droite D dont on déterminera un système d'équations paramétriques.

   b. La droite D et le plan (ABC) sont-ils sécants ou bien parallèles ?

3. Soit t un réel positif quelconque. On considère le barycentre G des points A, B et C affectés des coefficients respectifs 1, 2 et t.

   a. Justifier l'existence du point G pour tout réel positif t.
   Soit I le barycentre des points A et B affectés des coefficients respectifs 1 et 2. Déterminer les coordonnées du point I.
   Exprimer le vecteur $\overrightarrow{\text{I}G}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{\text{IC}}$.

   b. Montrer que l'ensemble des points G lorsque t décrit l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls est le segment [IC] privé du point C.
   Pour quelle valeur de t, le milieu J du segment [IC] coïncide-t-il avec G ?

EXERCICE 4 **6 points**

Commun à tous les candidats

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \dfrac{n^{10}}{2^n}$. On définit ainsi une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Prouver, pour tout entier naturel n non nul, l'équivalence suivante :

$$u_{n+1} \leqslant 0,95u_n \quad \text{si et seulement si} \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{10} \leqslant 1,9.$$

2. On considère la fonction f définie sur $[1\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{10}.$$

   a. Étudier le sens de variation et la limite en $+\infty$ de la fonction f.

   b. Montrer qu'il existe dans l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$ un unique nombre réel α tel que $f(\alpha) = 1,9$.

   c. Déterminer l'entier naturel n_0 tel que $n_0 - 1 \leqslant \alpha \leqslant n_0$.

   d. Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 16, on a :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{10} \leqslant 1,9.$$

3. **a.** Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) à partir du rang 16.

   b. Que peut-on en déduire pour la suite ?

4. En utilisant un raisonnement par récurrence, prouver, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 16, l'encadrement :

$$0 \leqslant u_n \leqslant 0,95^{n-16}u_{16}.$$

   En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.