Baccalauréat S 2006

L'intégrale de septembre 2005 à juin 2006

Pour un accès direct cliquez sur les liens bleus

Baccalauréat S Antilles-Guyane septembre 2005

Exercice 1 **5 points**

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + n - 1$.

1. **a.** Démontrer que pour tout $n \geqslant 3,\ u_n \geqslant 0$.
   b. En déduire que pour tout $n \geqslant 4,\ u_n \geqslant n - 2$.
   c. En déduire la limite de la suite (u_n).
2. On définit ia suite (v_n) par $v_n = 4u_n - 8n + 24$.
   a. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique décroissante dont on donnera la raison et le premier terme.
   b. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 7\left(\dfrac{1}{2}\right)^n + 2n - 6$.
   c. Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = x_n + y_n$ où (x_n) est une suite géométrique et (y_n) une suite arithmétique dont on précisera pour chacune le premier terme et la raison.
   d. En déduire l'expression de $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ en fonction de n.

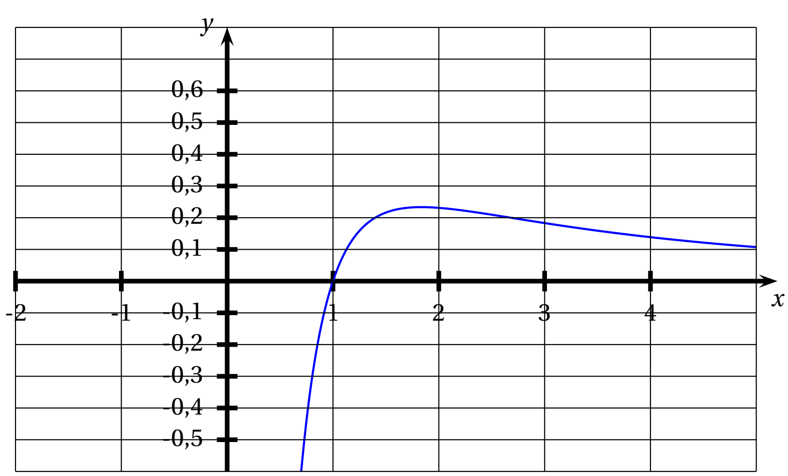
Exercice 2 **4 points**

Soit f la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{2\ln x}{x^2 + x}.$$

1. Montrer que pour tout $x > 1$, $\dfrac{\ln x}{x^2} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{\ln x}{x}$.
2. **a.** Calculer $\mathrm{I} = \displaystyle\int_2^4 \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$ et $\mathrm{J} = \displaystyle\int_2^4 \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$ (on pourra utiliser une intégration par parties pour cette dernière).
   b. En déduire un encadrement de $\mathrm{K} = \displaystyle\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.
3. La figure ci-dessous représente la courbe représentative de f (unités graphiques : en abscisse 1 cm pour 1 unité, en ordonnées 4 cm pour 1 unité). On considère l'ensemble des points $M(x\ ;\ y)$ tels que :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 2 & \leqslant & x & \leqslant & 4 \\ 0 & \leqslant & y & \leqslant & f(x) \end{array}\right. \quad \text{et on note } \mathscr{A} \text{ son aire.}$$



À l'aide de l'encadrement trouvé au 2 b, donner un encadrement de $\mathscr{A}$ en cm^2.

EXERCICE 3 **4 points**

Soit $\mathscr{P}$ le plan complexe rapporté au repère $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ (unité graphique : 4 cm). Soit A le point d'affixe 1. On note f l'application de $\mathscr{P}$ privé de A dans $\mathscr{P}$ qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que

$$z' = \frac{1}{z-1}.$$

1. **a.** Soit B le point d'affixe $b = 4 + \text{i}\sqrt{3}$. Déterminer la forme algébrique et la forme exponentielle de l'affixe b' de B$'$.

   b. Déterminer les affixes des points ayant pour image par f leur symétrique par rapport à O.

2. **a.** Exprimer $\left|z'\right|$ et $\arg\left(z'\right)$ en fonction de $|z-1|$ et $\arg(z-1)$.

   b. Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre A et de rayon r. On suppose que M est un point de $\mathscr{C}$. Déterminer $\left|z'\right|$.
   En déduire que M' appartient à un cercle $\mathscr{C}'$ dont on précisera le centre et le rayon.

   c. Placer un point M quelconque sur le cercle de centre A et de rayon $\frac{1}{2}$ et construire son image M'. (On laissera les traits de construction,)

EXERCICE 4 **4 points**

On modélise le temps d'attente entre deux clients à un guichet comme une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle de paramètre λ. La probabilité pour un client d'attendre moins de t min est définie par :

$$p(X \leqslant t) = \int_0^t \lambda \text{e}^{-\lambda x}\,\text{d}x.$$

Le temps moyen d'attente est donné par :

$$\lim_{t \to +\infty} \int_0^t \lambda x \text{e}^{-\lambda x}\,\text{d}x.$$

1. **a.** À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_0^t \lambda x \text{e}^{-\lambda x}\,\text{d}x$ en fonction de t.

   b. En déduire que le temps moyen est $\frac{1}{\lambda}$.

2. Le temps moyen d'attente étant de 5 min, quelle est la probabilité d'attendre plus de 10 min ? plus de 5 min ?
3. Quelle est la probabilité d'attendre encore au moins 5 min, sachant qu'on a déjà attendu 10 min ? Comment expliquez-vous ce résultat ?

EXERCICE 5 **4 points**

Pour cet exercice, vous recopierez pour chaque question, votre réponse.
Chaque réponse juste rapporte 1 *point. Une absence de réponse n'est pas sanctionnée.*
Il sera retiré 0,5 *point par réponse fausse.*
La note finale de l'exercice ne pourra pas être inférieure à zéro.

Soit $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ un repère orthonormal.

1. La droite passant par A(1 ; 2 ; −4) et B(−3 ; 4 ; 1) et la droite représentée par
$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& -11-4t \\ y &=& 8+2t \\ z &=& 11+5t \end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R} \text{ sont :}$$
☐ sécantes ☐ strictement parallèles ☐ confondues ☐ non coplanaires

2. Soient le plan $\mathscr{P}$ d'équation $2x+3y-z+4=0$ et la droite $\mathscr{D}$ représentée par
$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& t \\ y &=& t \\ z &=& 8+t \end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R}$$
☐ $\mathscr{P}$ et $\mathscr{D}$ sont sécants. ☐ $\mathscr{P}$ et $\mathscr{D}$ sont strictement parallèles.

☐ $\mathscr{D}$ est incluse dans $\mathscr{P}$. ☐ Aucune de ces possibilités n'est vraie.

3. La distance du point A(1 ; 2 ; −4) au plan d'équation $2x+3y-z+4=0$ est :
☐ $\dfrac{8\sqrt{14}}{7}$ ☐ 16 ☐ $8\sqrt{14}$ ☐ $\dfrac{8}{7}$

4. Soient le point B(−3 ; 4 ; 1) et la sphère $\mathscr{S}$ d'équation $x^2+y^2+z^2=16$;
☐ B est à l'intérieur de $\mathscr{S}$ ☐ B est à l'extérieur de $\mathscr{S}$
☐ B est sur $\mathscr{S}$ ☐ On ne sait pas.

Durée : 4 heures

ᔕ Baccalauréat S France septembre 2005 ᔕ

EXERCICE 1 **7 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

La fonction f est définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = (20x+10)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormai $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique 1 cm).

1. Étudier la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations.
3. Établir que l'équation $f(x) = 10$ admet une unique solution strictement positive α dans l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$. Donner une valeur décimale approchée à 10^{-3} près de α.
4. Tracer la courbe $\mathscr{C}$.
5. Calculer l'intégrale $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Partie B

On note $y(t)$ la valeur, en degrés Celsius, de la température d'une réaction chimique à l'instant t, t étant exprimé en heures. La valeur initiale, à l'instant $t = 0$, est $y(0) = 10$.

On admet que la fonction qui, à tout réel t appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ associe $y(t)$, est solution de l'équation différentielle (E) : $y' + \dfrac{1}{2}y = 20\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$.

1. Vérifier que la fonction f étudiée dans la **partie A** est solution de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
2. On se propose de démontrer que cette fonction f est l'unique solution de l'équation différentielle (E), définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, qui prend la valeur 10 à l'instant 0.
   a. On note g une solution quelconque de l'équation différentielle (E), définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ vérifiant $g(0) = 10$. Démontrer que la fonction $g - f$ est solution, sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, de l'équation différentielle :
   (E$'$) $y' + \dfrac{1}{2}y = 0$.
   b. Résoudre l'équation différentielle (E$'$).
   c. Conclure.
3. Au bout de combien de temps la température de cette réaction chimique redescent-elle à sa valeur initiale ? Le résultat sera arrondi à la minute.
4. La valeur θ en degrés Celsius de la température moyenne à cette réaction chimique durant les trois premières heures est la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ 3]$.
   Calculer la valeur exacte de θ, puis donner la valeur approchée décimale de θ arrondie au degré.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.

Chaque réponse exacte rapporte 1 *point, chaque réponse fausse enlève* 0,5 *point. Une absence de réponse est comptée* 0 *point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.*

Aucune justification n'est demandée.

1. Soit z le nombre complexe de module $\sqrt{2}$ et d'argument $\dfrac{\pi}{3}$. On a alors :

A : $z^{14} = -128\sqrt{3} - 128\text{i}$. C : $z^{14} = -64 + 64\text{i}\sqrt{3}$.
B : $z^{14} = 64 - 64\text{i}$. D : $z^{14} = -128 + 128\text{i}\sqrt{3}$

2. On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal, le point S d'affixe 3 et le point T d'affixe 4i. Soit (E) l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z-3| = |3-4\text{i}|$.
A : (E) est la médiatrice du segment [ST] ;
B : (E) est la droite (ST) ;
C : (E) est le cercle de centre Ω d'affixe $3-4\text{i}$, et de rayon 3 ;
D : (E) est le cercle de centre S et de rayon 5.

3. On considère un hexagone régulier ABCDEF, dont les côtés sont de longueur 1. Le produit scalaire $\overrightarrow{\text{AC}} \cdot \overrightarrow{\text{CF}}$ est égal à :

A : $\sqrt{3}$ B : -3 C : $-\sqrt{3}$ D ; $\dfrac{3}{2}$.

4. Une fonction g est définie sur l'intervalle $]-\infty\,;\,0]$ par $g(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-2x}}{x-3}$; soit Γ sa courbe représentative dans un repère du plan.

A : Γ admet une asymptote d'équation $y = -1$.
B : Γ n'admet pas d'asymptote.
C : Γ admet une asymptote d'équation $y = x$.
D : Γ admet une asymptote d'équation $y = 1$.

5. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \displaystyle\int_0^x \text{e}^{-t^2}\,\text{d}t$. La fonction f'', dérivée seconde de la fonction f sur $\mathbb{R}$, est définie par :

A : $f''(x) = \displaystyle\int_0^x -2t\text{e}^{-t^2}\,\text{d}t$. C : $f''(x) = -2x\text{e}^{-x^2}$.
B : $f''(x) = \displaystyle\int_0^x -2x\text{e}^{-x^2}\,\text{d}x$. D : $f''(x) = \text{e}^{-x^2}$.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.

Chaque réponse exacte rapporte 1 *point. Chaque réponse fausse enlève* 0,5 *point. Une absence de réponse est comptée* 0 *point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro. Aucune justification n'est demandée.*

1. On considère dans l'ensemble des entiers relatifs l'équation :

$$x^2 - x + 4 \equiv 0 \quad (\text{modulo } 6).$$

A : toutes les solutions sont des entiers pairs.

B : il n'y a aucune solution.

C : les solutions vérifient $x \equiv 2 \quad (\text{modulo } 6)$.

D : les solutions vérifient $x \equiv 2 \quad (\text{modulo } 6)$ ou $x \equiv 5 \quad (\text{modulo } 6)$.

2. On se propose de résoudre l'équation (E) : $24x + 34y = 2$, où x et y sont des entiers relatifs.

A : Les solutions de (E) sont toutes de la forme : $(x\,;y) = (34k - 7\,; 5 - 24k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

B : L'équation (E) n'a aucune solution.

C : Les solutions de (E) sont toutes de la forme : $(x\,;\ y) = (17k - 7\,; 5 - 12k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

D : Les solutions de (E) sont toutes de la forme : $(x\,;\ y) = (-7k\,; 5k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

3. On considère les deux nombres $n = 1\,789$ et $p = 1\,789^{2\,005}$. On a alors :

A : $n \equiv 4 \quad (\text{modulo } 17)$ et $p \equiv 0 \quad (\text{modulo } 17)$.

B : p est un nombre premier.

C : $p \equiv 4 \quad (\text{modulo } 17)$.

D : $p \equiv 1 \quad (\text{modulo } 17)$.

4. On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal, les points A et B d'affixes respectives a et b. Le triangle MAB est rectangle isocèle direct d'hypoténuse [AB] si et seulement si le point M d'affixe z est tel que :

A : $z = \dfrac{b - \mathrm{i}a}{1 - \mathrm{i}}$. C : $a - z = \mathrm{i}(b - z)$.

B : $z - a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}(b - a)$. D : $b - z = \dfrac{\pi}{2}(a - z)$.

5. On considère dans le plan orienté deux points distincts A et B ; on note I le milieu du segment [AB]. Soit f la similitude directe de centre A, de rapport 2 et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$; soit g la similitude directe de centre A, de rapport $\dfrac{1}{2}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$; soit h la symétrie centrale de centre 1.

A : $h \circ g \circ f$ transforme A en B et c'est une rotation.

B : $h \circ g \circ f$ est la réflexion ayant pour axe la médiatrice du segment [AB].

C : $h \circ g \circ f$ n'est pas une similitude.

D : $h \circ g \circ f$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

L'espace est muni d'un repère orthononnal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.

1. On considère le plan $\mathscr{P}$ passant par le point B(1 ; −2 ; 1) et de vecteur normal $\vec{n}\,(-2\,;\,1\,;\,5)$ et le plan $\mathscr{R}$ d'équation cartésienne $x + 2y - 7 = 0$.

   a. Démontrer que les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{R}$ sont perpendiculaires.

   b. Démontrer que l'intersection des plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{R}$ est la droite Δ passant par le point C(−1 ; 4 ; −1) et de vecteur directeur $\vec{u}\,(2\,;\,-1\,;\,1)$.

   c. Soit le point A(5 ; −2 ; −1). Calculer la distance du point A au plan $\mathscr{P}$, puis la distance du point A au plan $\mathscr{R}$.

   d. Déterminer la distance du point A à la droite Δ.

2. **a.** Soit, pour tout nombre réel t, le point M_t de coordonnées $(1 + 2t\,;\,3 - t\,;\,t)$.
   Déterminer en fonction de t la longueur AM_t. On note $\varphi(t)$ cette longueur. On définit ainsi une fonction φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

b. Étudier le sens de variations de la fonction φ sur $\mathbb{R}$; préciser son minimum.

c. Interpréter géométriquement la valeur de ce minimum.

EXERCICE 4 **3 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

On dispose d'un dé en forme de tétraèdre régulier, possédant une face bleue, deux faces rouges et une face verte ; on suppose le dé parfaitement équilibré.
Une partie consiste à effectuer deux lancers sucessifs et indépendants de ce dé. À chaque lancer on note la couleur de la face cachée.
On considère les évènements suivants :
E est l'évènement « à l'issue d'une partie, les deux faces notées sont vertes »,
F est l'évènement « à l'issue d une partie, les deux faces notées sont de la même couleur ».

1. Calculer les probabilités des évènements E et F ainsi que la probabilité de E sachant F.
2. On effectue dix parties identiques et indépendantes.
Calculer la probabilité d'obtenir au moins deux fois l'évènement F au cours de ces dix parties (on en donnera une valeur approchée décimale à 10^{-3} près).

Partie B

On souhaite savoir si le dé utilisé peut être considéré comme parfaitement équilibré.
Pour cela on numérote de 1 à 4 les quatre faces de ce dé, puis on lance, ce dé 160 fois en notant le nombre n_i de fois où chaque face est cachée ; on obtient les résultats suivants :

face i	1	2	3	4
effectif n_i	30	48	46	32

On note f_i la fréquence relative à la face n_i et d^2_{obs} le réel $\displaystyle\sum_{i=1}^{4}\left(f_i-\frac{1}{4}\right)^2$.

On simule ensuite 1 000 fois l'expérience consistant à tirer un chiffre au hasard 160 fois parmi l'ensemble (1 ; 2 ; 3 ; 4) puis, pour chaque simulation, on calcule

$d^2=\displaystyle\sum_{i=1}^{4}\left(F_i-\frac{1}{4}\right)^2$, où F_i est la fréquence d'apparition du nombre i. Le 9$^{\text{e}}$ décile de la série statistique des 1 000 valeurs de d^2 est égal à 0,009 8.
Au vu de l'expérience réalisée et au risque de 10 %, peut-on considérer le dé comme parfaitement équilibré ?

Durée : 4 heures

Baccalauréat S Polynésie septembre 2005

EXERCICE 1 **5 points**

On étudie le mouvement aléatoire d'une puce. Cette puce se déplace sur trois cases notées A, B et C.

À l'instant 0, la puce est en A.

Pour tout entier naturel n :

- si à l'instant n la puce est en A, alors à l'instant $(n+1)$, elle est :
  soit en B avec une probabilité égale à $\frac{1}{3}$;
  soit en C avec une probabilité égale à $\frac{2}{3}$.
- si à l'instant n la puce est en B, alors à l'instant $(n+1)$, elle est :
  soit en C, soit en A de façon équiprobable
- si à l'instant n la puce est en C, alors elle y reste.

On note A_n (respectivement $B_n,\ C_n$) l'évènement « à l'instant n la puce est en A » (respectivement en B, en C).

On note a_n (respectivement $b_n,\ c_n$) la probabilité de l'évènement A_n, (respectivement $B_n,\ C_n$).

On a donc : $a_0 = 1,\ b_0 = c_0 = 0$.

Pour traiter l'exercice, on pourra s'aider d'arbres pondérés.

1. Calculer $a_k,\ b_k$ et c_k pour k entier naturel tel que $1 \leqslant k \leqslant 3$.
2. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel n,
$$a_n + b_n + c_n = 1 \text{ et } \left\{\begin{array}{lcl} a_{n+1} & = & \frac{1}{2}b_n \\ b_{n+1} & = & = \frac{1}{3}a_n \end{array}\right.$$
   b. Montrer que, pour tout entier naturel n, $a_{n+2} = \frac{1}{6}a_n$.

   c. En déduire que, pour tout entier naturel p,
$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{2p} = \left(\frac{1}{6}\right)^p & \text{et} & a_{2p+1} = 0 \\ b_{2p} = 0 & \text{et} & b_{2p+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^p \end{array}\right. .$$
3. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$.
   On admet que $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = 0$. Quelle est la limite de c_n lorsque n tend vers $+\infty$?

EXERCICE 2 **7 points**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$ (unité graphique : 1 cm).

Partie A

Dans le repère $\left(\text{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$, on considère la courbe $\mathscr{H}$ d'équation $y^2 - x^2 = 16$.

1. Montrer que $\mathscr{H}$ est la réunion de deux courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ où $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2+16}$ et où $\mathscr{C}'$ est l'image de $\mathscr{C}$ par une transformation simple que l'on précisera.

2. Étudier la fonction f (limites aux bornes de l'ensemble de définition et sens de variation).

   a. Montrer que la droite d'équation $y = x$ est une asymptote de $\mathscr{C}$.

b. Tracer $\mathscr{H}$ dans le repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.
On nomme A et B les points de la courbe d'abscisses respectives -3 et 3.
On considère le domaine $\mathscr{D}$ du plan constitué des points $M(x\ ;\ y)$ vérifiant :

$$-3 \leqslant x \leqslant 3 \text{ et } \sqrt{x^2+16} \leqslant y \leqslant 5.$$

Hachurer le domaine $\mathscr{D}$ et exprimer l'aire de $\mathscr{D}$ à l'aide d'une intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer.

Partie B
On appelle r la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{4}$.

1. **a.** Donner l'écriture complexe de r.

b. On désigne par x' et y' les coordonnées du point M', image du point $M(x\ ;\ y)$ du plan.

Vérifier que $\begin{cases} x' &= \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x+y) \\ y' &= \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-x+y) \end{cases}$

Déterminer les coordonnées des points A$'$ et B$'$, images respectives de A et B par la rotation r. Placer les points A$'$ et B$'$ dans le repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.

2. Soit $\mathscr{H}'$ l'hyperbole d'équation $xy = 8$.

a. Tracer $\mathscr{H}'$ dans le repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.

b. Montrer que $\mathscr{H}'$ est l'image de $\mathscr{H}$ par la rotation r.

3. Soit $\mathscr{D}'$ l'image de $\mathscr{D}$ par la rotation r. On admet que $\mathscr{D}'$ est l'ensemble des points $M(x\ ;\ y)$ du plan vérifiant $\sqrt{2} \leqslant x \leqslant 4\sqrt{2}$ et $\dfrac{8}{x} \leqslant y \leqslant 5\sqrt{2} - x$.

a. Hachurer $\mathscr{D}'$.

b. Calculer l'aire de $\mathscr{D}'$,exprimée en cm^2.
En déduire une valeur approchée à 10^{-3} près de l'aire de $\mathscr{D}$.

EXERCICE 3 **3 points**

Pour chacune des 3 *questions, une seule des trois propositions est exacte.*
Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte 1 *point ; une réponse inexacte enlève* 0,5 *point ; l'absence de réponse est comptée* 0 *point.*
Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.
Dans tout l'exercice, le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.

1. Le point M est situé sur le cercle de centre A$(-2\ ;\ 5)$ et de rayon $\sqrt{3}$. Son affixe z vérifie :

a. $|z-2+5\text{i}|^2 = 3$;

b. $|z+2-5\text{i}|^2 = 3$;

c. $|z-2+5\text{i}| = 3$.

2. On considère trois points A, B et C d'affixes respectives a, b et c, deux à deux distincts et tels que le triangle ABC n'est pas équilatéral. Le point M est un point dont l'affixe z est telle que les nombres complexes $\dfrac{z-b}{c-a}$ et $\dfrac{z-c}{b-a}$ sont imaginaires purs.

a. M est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC ;

b. M appartient aux cercles de diamètres respectifs [AC] et [AB] ;

c. M est l'orthocentre du triangle ABC.

3. Soit A et B les points d'affixes respectives 1 + i et 5 + 4i, et C un point du cercle de diamètre [AB]. On appelle G l'isobarycentre des points A, B et C et on note z_G son affixe.

a. $|z_G - 3 - 2,5\mathrm{i}| = \dfrac{5}{6}$;

b. $z_G - (1+\mathrm{i}) = \dfrac{1}{3}(4+3\mathrm{i})$;

c. $z_G - (3+2,5\mathrm{i}) = \dfrac{1}{3}(4+3\mathrm{i})$.

EXERCICE 4 **5 points**

L'annexe se rapporte à cet exercice.
Elle sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve. Le plan est rapporté à un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
Soit la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}\cos(4x)$$

et Γ sa courbe représentative tracée dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ de l'annexe. On considère également la fonction g définie sur $[0 ; +\infty[$ par $g(x) = \mathrm{e}^{-x}$ et on nomme $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. **a.** Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$,

$$-\mathrm{e}^{-x} \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x}.$$

b. En déduire la limite de f en $+\infty$.

2. Déterminer les coordonnées des points communs aux courbes Γ et $\mathscr{C}$.

3. On définit la suite (u_n) sur $\mathbb{N}$ par $u_n = f\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)$.

a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique. En préciser la raison.

b. En déduire le sens de variation de la suite (u_n) et étudier sa convergence.

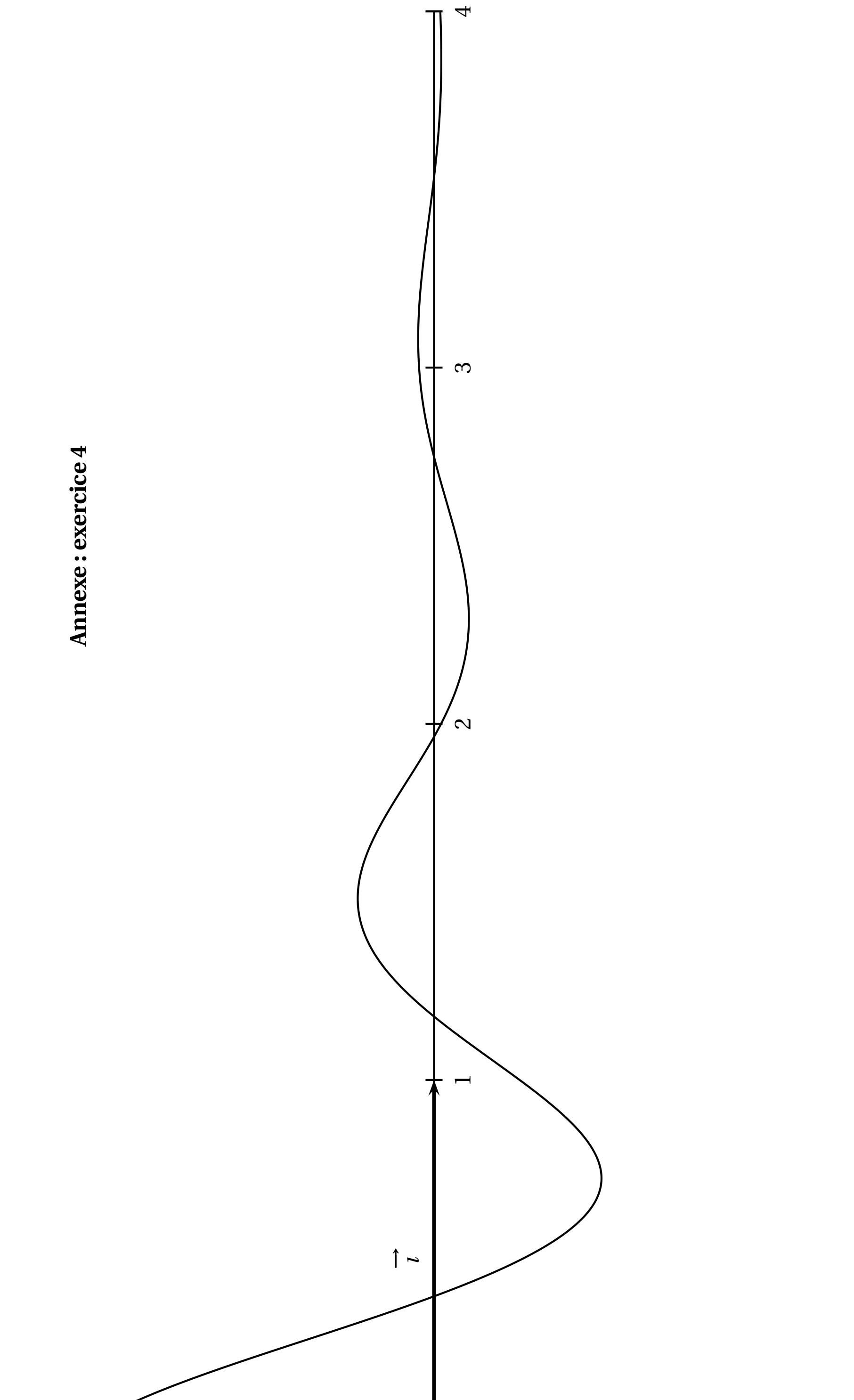
4. **a.** Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$,

$$f'(x) = -\mathrm{e}^{-x}\left[\cos(4x) + 4\sin(4x)\right].$$

b. En déduire que les courbes Γ et $\mathscr{C}$ ont même tangente en chacun de leurs points communs.

5. Donner une valeur approchée à 10^{-1} près par excès du coefficient directeur de la droite $\mathscr{T}$ tangente à la courbe Γ au point d'abscisse $\dfrac{\pi}{2}$.
Compléter le graphique donné en annexe, en y traçant $\mathscr{T}$ et $\mathscr{C}$.

Annexe : exercice 4



Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie novembre 2005 ∾

EXERCICE 1 **5 points**

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Le plan est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. Unité graphique : **4 cm**

Partie I

1. Placer les points I, J, H, A, B, C, D d'affixes respectives :

$$z_{\text{I}} = 1\ ,\ z_{\text{J}} = \text{i}\ ,\ z_{\text{H}} = 1+\text{i}\ ,\ z_{\text{A}} = 2\ ,\ z_{\text{B}} = \frac{3}{2}+\text{i}\ ,\ z_{\text{C}} = 2\text{i} \text{ et } z_{\text{D}} = -1$$

2. Soit E le symétrique de B par rapport à H. La perpendiculaire à la droite (AE) passant par C et la parallèle à la droite (OC) passant par D se coupent en F.

   Placer E et F et vérifier que le point F a pour affixe $z_{\text{F}} = -1+\dfrac{1}{2}\text{i}$.
3. Montrer que les triangles OAB et OCF sont isométriques.

Partie II

On considère la transformation f du plan, d'écriture complexe :

$$z' = -\text{i}\overline{z}+2\text{i}.$$

1. Déterminer les images des points O, A, B par f.
2. **a.** Montrer que f est une similitude. Est-ce une isométrie ?

   b. Déterminer l'ensemble des points invariants par f.

   c. La transformation f est-elle une symétrie axiale ?
3. Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{\text{IJ}}$. Donner l'écriture complexe de t et celle de sa réciproque t^{-1}.
4. On pose $s = f \circ t^{-1}$.

   a. Montrer que l'écriture complexe de s est : $z' = -\text{i}\overline{z}+1+\text{i}$.

   b. Montrer que I et J sont invariants par s. En déduire la nature de s.

   c. En déduire que f est la composée d'une translation et d'une symétrie axiale à préciser.

EXERCICE 1 **5 points**

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Le plan est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. Unité graphique : **3 cm**

À tout point M d'affixe z du plan, on associe le point M' d'affixe z' par l'application f qui admet pour écriture complexe :

$$z' = \frac{(3+4\text{i})z+5\overline{z}}{6}.$$

1. On considère les points A, B, C d'affixes respectives $z_{\text{A}} = 1+2\text{i}$, $z_{\text{B}} = 1$ et $z_C = 3\text{i}$. Déterminer les affixes des points A′, B′, C′ images respectives de A, B, C par f. Placer les points A, B, C, A′, B′, C′.

2. On pose $z = x + \mathrm{i}y$ (avec x et y réels).
   Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de z' en fonction de x et y.
3. Montrer que l'ensemble des points M invariants par f est la droite (D) d'équation $y = \dfrac{1}{2}x$.
   Tracer (D). Quelle remarque peut-on faire ?
4. Soit M un point quelconque du plan et M' son image par f. Montrer que M' appartient à la droite (D).
5. **a.** Montrer que, pour tout nombre complexe z :

$$\frac{z' - z}{z_{\mathrm{A}}} = \frac{z + \overline{z}}{6} + \mathrm{i}\frac{z - \overline{z}}{3}.$$

   En déduire que le nombre $\dfrac{z' - z}{z_{\mathrm{A}}}$ est réel.

   b. En déduire que, si $M' \neq M$, les droites (OA) et (MM') sont parallèles.
6. Un point quelconque N étant donné, comment construire son image N' ? (on étudiera deux cas suivant que N appartient ou non à (D)).
   Effectuer la construction sur la figure.

EXERCICE 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout entier naturel n non nul, par :

$$\left\{\begin{array}{l} u_1 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + \dfrac{1}{n} \text{ pour } n \geqslant 2 \end{array}\right. \quad \text{et } v_n = u_n - \ln n \ \text{ pour } \ n \geqslant 1$$

1. **a.** Calculer u_2, u_3 et u_4.

   b. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul : $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$
2. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel k non nul : $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{k}$

   b. En déduire que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a les inégalités suivantes :

$$u_n - 1 \leqslant \ln n \leqslant u_n - \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad 0 \leqslant v_n \leqslant 1$$

3. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel n non nul :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$$

   b. En déduire le sens de variations de la suite (v_n).
4. Montrer que la suite (v_n) converge. On note γ la limite de la suite (v_n) (on ne cherchera pas à calculer γ).
   Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

*Cet exercice comporte **deux parties indépendantes.***

La partie **I** *est la démonstration d'un résultat de cours. La partie* **II** *est un Q.C.M.*

Partie I

Question de cours

Soient A et B deux évènements indépendants. Démontrer que A et $\overline{B}$ sont indépendants.

Partie II

Pour chacune des questions suivantes, une et une seule des quatre propositions est exacte.

Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 *point. Une réponse fausse enlève* 0,5 *point. L'absence de réponse est comptée* 0 *point. Si le total de cette partie est négatif, la note correspondant à la partie **II** est ramenée à zéro.*

1. Une urne comporte cinq boules noires et trois boules rouges indiscernables au toucher.

   On extrait simultanément trois boules de l'urne. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules noires et une boule rouge ?

   $\boxed{A}$ $\dfrac{75}{512}$ $\boxed{B}$ $\dfrac{13}{56}$ $\boxed{C}$ $\dfrac{15}{64}$ $\boxed{D}$ $\dfrac{15}{28}$

2. Au cours d'une épidémie de grippe, on vaccine le tiers d'une population.

   Parmi les grippés, un sur dix est vacciné. La probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la population soit grippée est 0,25.

   Quelle est la probabilité pour un individu vacciné de cette population de contracter la grippe ?

   $\boxed{A}$ $\dfrac{1}{120}$ $\boxed{B}$ $\dfrac{3}{40}$ $\boxed{C}$ $\dfrac{1}{12}$ $\boxed{D}$ $\dfrac{4}{40}$

3. Un joueur lance une fois un dé bien équilibré.

   Il gagne 10 € si le dé marque 1. Il gagne 1 € si le dé marque 2 ou 4. Il ne gagne rien dans les autres cas. Soit X la variable aléatoire égale au gain du joueur.

   Quelle est la variance de X ?

   $\boxed{A}$ 2 $\boxed{B}$ 13 $\boxed{C}$ 16 $\boxed{D}$ 17

4. La durée d'attente T, en minutes, à un péage d'autoroute avant le passage en caisse est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \dfrac{1}{6}$. On a donc pour tout réel $t > 0$: $P(T < t) = \displaystyle\int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$ (avec $\lambda = \dfrac{1}{6}$)

   où t désigne le temps exprimé en minutes.

   Sachant qu'un automobiliste a déjà attendu 2 minutes, quelle est la probabilité (arrondie à 10^{-4} près) que son temps total soit inférieur à 5 minutes ?

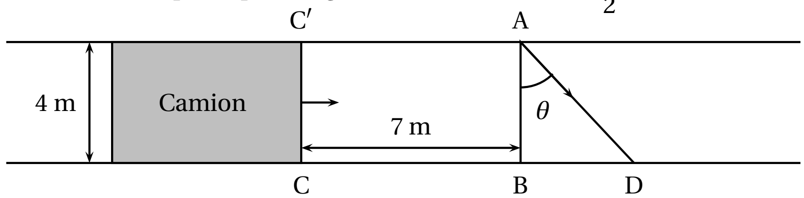
   $\boxed{A}$ 0,281 9 $\boxed{B}$ 0,393 5 $\boxed{C}$ 0,565 4 $\boxed{D}$ 0,606 5

EXERCICE 4 **5 points**

Commun à tous les candidats

Un lapin désire traverser une route de 4 mètres de largeur. Un camion, occupant toute la route, arrive à sa rencontre à la vitesse de 60 km/h. Le lapin décide au dernier moment de traverser, alors que le camion n'est plus qu'à 7 mètres de lui. Son démarrage est foudroyant et on suppose qu'il effectue la traversée en ligne droite au maximum de ses possibilités, c'est à dire à ...30 km/h !

L'avant du camion est représenté par le segment [CC′] sur le schéma ci-dessous.
Le lapin part du point A en direction de D.
Cette direction est repérée par l'angle $\theta = \widehat{\text{BAD}}$ avec $0 \leqslant \theta < \dfrac{\pi}{2}$ (en radians).



1. Déterminer les distances AD et CD en fonction de θ et les temps t_1 et t_2 mis par le lapin et le camion pour parcourir respectivement les distances AD et CD.

2. On pose $f(\theta) = \dfrac{7}{2} + 2\tan\theta - \dfrac{4}{\cos\theta}$.
Montrer que le lapin aura traversé la route avant le passage du camion si et seulement si $f(\theta) > 0$.

3. Conclure.

Rappel :
La fonction $x \longmapsto \tan x$ est dérivable sur $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$ et a pour dérivée la fonction
$x \longmapsto \dfrac{1}{\cos^2 x}$

Durée : 4 heures

Baccalauréat S Amérique du Sud novembre 2005

EXERCICE 1 **4 points**
Commun à tous les candidats

Les parties A et B sont indépendantes
Alain fabrique, en amateur, des appareils électroniques. Il achète pour cela, dans un magasin, des composants en apparence tous identiques mais dont certains présentent un défaut. On estime que la probabilité qu'un composant vendu dans le magasin soit défectueux est égale à 0,02.
Partie A
On admet que le nombre de composants présentés dans le magasin est suffisamment important pour que l'achat de 50 composants soit assimilé à 50 tirages indépendants avec remise, et on appelle X le nombre de composants défectueux achetés. Alain achète 50 composants.

1. Quelle est la probabilité qu'exactement deux des composants achetés soient défectueux ? Donner une valeur approchée de cette probabilité à 10^{-1} près.
2. Quelle est la probabilité qu'au moins un des composants achetés soit défectueux ? Donner une valeur approchée de cette probabilité à 10^{-2} près.
3. Quel est, par lot de 50 composants achetés, le nombre moyen de composants défectueux ?

Partie B
On suppose que la durée de vie T_1 (en heures) de chaque composant défectueux suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_1 = 5 \times 10^{-4}$ et que la durée de vie T_2 (en heures) de chaque composant non défectueux suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_2 = 10^{-4}$ (on pourra se reporter au formulaire ci-dessous).

1. Calculer la probabilité que la durée de vie d'un composant soit supérieure à 1 000 heures :
   a. si ce composant est défectueux ;
   b. si ce composant n'est pas défectueux. Donner une valeur approchée de ces probabilités 10^{-2} près.
2. Soit T la durée de vie (en heures) d'un composant acheté au hasard.
   Démontrer que la probabilité que ce composant soit encore en état de marche après t heures de fonctionnement est :
   $$P(T \geqslant t) = 0,02\mathrm{e}^{-5\times 10^{-4}t} + 0,98\mathrm{e}^{-10^{-4}t}.$$
   (on rappelle que la probabilité qu'un composant vendu dans le magasin soit défectueux est égale à 0,02).
3. Sachant que le composant acheté est encore en état de fonctionner 1 000 heures après son installation, quelle est la probabilité que ce composant soit défectueux ?
   Donner une valeur approchée de cette probabilité à 10^{-2} près.

Formulaire Loi exponentielle (ou de durée de vie sans vieillissement) de paramètre λ sur $[0\,;\,+\infty[$:
Pour $0 \leqslant a \leqslant b$, $P([a\,;\,b]) = \displaystyle\int_a^b \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$.
Pour $c \geqslant 0$, $P([c\,;\,+\infty[) = 1 - \displaystyle\int_0^c \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$. On prendra pour unité graphique 4 cm. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives a, b, c et d telles que :

$$a = \mathrm{i},\qquad b = 1+2\mathrm{i},\qquad c = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}},\quad \text{et}\quad d = 3+2\mathrm{i}.$$

On considère la similitude directe s qui transforme A en B et C en D. Soit M un point d'affixe z et M', d'affixe z', son image par s.

1. Exprimer z' en fonction de z.
   Déterminer les éléments caractéristiques de s.

   Soit (U_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} U_0 & = & 0 \\ U_{n+1} & = & 2U_n + 1 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$
2. Montrer que, pour tout entier naturel n, U_{n+1} et U_n sont premiers entre eux.
3. Interpréter géométriquement, en utilisant la similitude s, les termes de la suite (U_n).
4. Montrer que pour tout entier naturel $n, U_n = 2^n - 1$.
5. Montrer que, pour tous entiers naturels n et p non nuls tels que $n \geqslant p$,

   $$U_n = U_p\left(U_{n-p}+1\right) + U_{n-p}.$$

   La notation pgcd$(a\ ;\ b)$ est utilisée, dans la suite, pour désigner le plus grand diviseur commun à deux entiers naturels a et b . Montrer pour $n \geqslant p$ l'égalité

   $$\operatorname{pgcd}\left(U_n\ , U_p\right) = \operatorname{pgcd}\left(U_p,\ U_{n-p}\right).$$
6. Soit n et p deux entiers naturels non nuls, montrer que :

   $$\operatorname{pgcd}\left(U_n,\ U_p\right) = U_{\operatorname{pgcd}(n\ ;\ p)}.$$

   Déterminer le nombre : pgcd$(U_{2005},\ U_{15})$.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$. On prendra pour unité graphique 2 cm. Soit f l'application qui à tout point M du plan d'affixe z non nulle associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = \dfrac{4}{\overline{z}}$, où $\overline{z}$ désigne le nombre complexe conjugué de z.

1. Déterminer l'ensemble des points invariants par f.
2. Déterminer l'ensemble des points dont l'image par l'application f est le point J d'affixe 1.
3. Soit α un nombre complexe non nul. Démontrer que le point A d'affixe α admet un antécédent unique par f, dont on précisera l'affixe.
4. **a.** Donner une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\mathrm{O}M},\ \overrightarrow{\mathrm{O}M'}\right)$. Interpréter géométriquement ce résultat.

   b. Exprimer $\left|z'\right|$ en fonction de $|z|$. Si r désigne un réel strictement positif, en déduire l'image par f du cercle de centre O et de rayon r.

   c. Choisir un point P du plan complexe non situé sur les axes de coordonnées et tel que O$P = 3$, et construire géométriquement son image P' par f.

5. On considère le cercle $\mathscr{C}_1$, de centre Jet de rayon 1. Montrer que l'image par f de tout point de $\mathscr{C}_1$,distinct de O, appartient à la droite D d'équation $x = 2$.

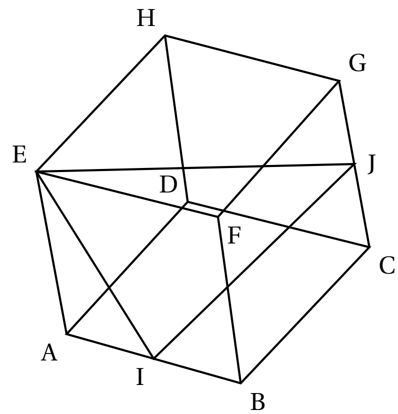
EXERCICE 3 — 4 points

Commun à tous les candidats

Dans cet exercice, une réponse par « VRAI » ou « FAUX », sans justification, est demandée au candidat en regard d'une liste d'affirmations. Toute réponse conforme à la réalité mathématique donne 0,4 *point. Toute réponse erronée enlève* 0,1 *point. L'absence de réponse n'est pas comptabilisée. Le total ne saurait être négatif.*

On donne le cube ABCDEFGH, d'arête de longueur 1, et les milieux I et J des arêtes [AB] et [CG]. Les éléments utiles de la figure sont donnés ci-contre.

Le candidat est appelé à juger chacune des 10 *affirmations suivantes.*



On utilisera pour répondre la feuille annexe, qui sera rendue avec la copie.

	Affirmation	VRAI ou FAUX
1.	$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{2}$	
2.	$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB}$	
3.	$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IC}$	
4.	$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IJ} = AB \times IC \times \cos\dfrac{\pi}{3}$	

On utilise à présent le repère orthonormal $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AE}\right)$.

	Affirmation	VRAI ou FAUX
5.	Une représentation paramétrique de la droite (IJ) est : $\begin{cases} x = t+1 \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}$, le paramètre t décrivant $\mathbb{R}$.	
6.	Une représentation paramétrique de la droite (IJ) est : $\begin{cases} x = \frac{1}{2}t+1 \\ y = t+1 \\ z = \frac{1}{2}t+\frac{1}{2} \end{cases}$, le paramètre t décrivant $\mathbb{R}$	
7.	$6x-7y+8z-3=0$ est une équation cartésienne de la droite (IJ).	
8.	L'intersection des plans (FIJ) et (ABC) est la droite passant par l et par le milieu de l'ar ête [DC].	
9.	Le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (FIJ).	
10.	Le volume du tétraèdre EFIJ est égal à $\frac{1}{6}$.	

EXERCICE 4 — 7 points

Commun à tous les candidats

Partie A

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x^2} \quad \text{et} \quad g(x) = x^2\mathrm{e}^{-x^2}.$$

On note respectivement $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives de f et g dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, dont les tracés se trouvent sur la feuille annexe. La figure sera complétée et rendue avec la copie.

1. Identifier $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sur la figure fournie. (Justifier la réponse apportée).
2. Étudier la parité des fonctions f et g.
3. Étudier le sens de variation de f et de g. Étudier les limites éventuelles de f et de g en $+\infty$.
4. Étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

Partie B

On considère la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par

$$G(x) = \int_0^x t^2\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

1. Que représente G pour la fonction g ?
2. Donner, pour $x > 0$, une interprétation de $G(x)$ en termes d'aires.
3. Étudier le sens de variations de G sur $\mathbb{R}$.
   On définit la fonction F sur R *par : pour tout réel x,* $F(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.
4. Démontrer, que, pour tout réel x, $G(x) = \frac{1}{2}\left[F(x) - x\mathrm{e}^{-x^2}\right]$; (on pourra commencer par comparer les fonctions dérivées de G et de $x \longmapsto \frac{1}{2}\left[F(x) - x\mathrm{e}^{-x^2}\right]$.

On admet que la fonction F admet une limite finie ℓ en $+\infty$, et que cette limite ℓ est égale à l'aire, en unités d'aire, du domaine $\mathscr{A}$ limité par la courbe $\mathscr{C}_f$ et les demi-droites $\left[\mathrm{O}\,;\,\overrightarrow{\imath}\right)$ et $\left[\mathrm{O}\,;\,\overrightarrow{\jmath}\right)$.

5. **a.** Démontrer que la fonction G admet une limite en $+\infty$ que l'on précisera.

b. Interpréter en termes d'aires le réel $\mathrm{N} = \displaystyle\int_0^1 \left(1-t^2\right)\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

c. En admettant que la limite de G en $+\infty$ représente l'aire $\mathscr{P}$ en unités d'aire du domaine $\mathscr{D}$ limité par la demi-droite $\left[\mathrm{O}\,;\,\overrightarrow{\imath}\right)$ et la courbe $\mathscr{C}_g$ justifier graphiquement que :

$$\int_0^1 \left(1-t^2\right)\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{\ell}{2}.$$

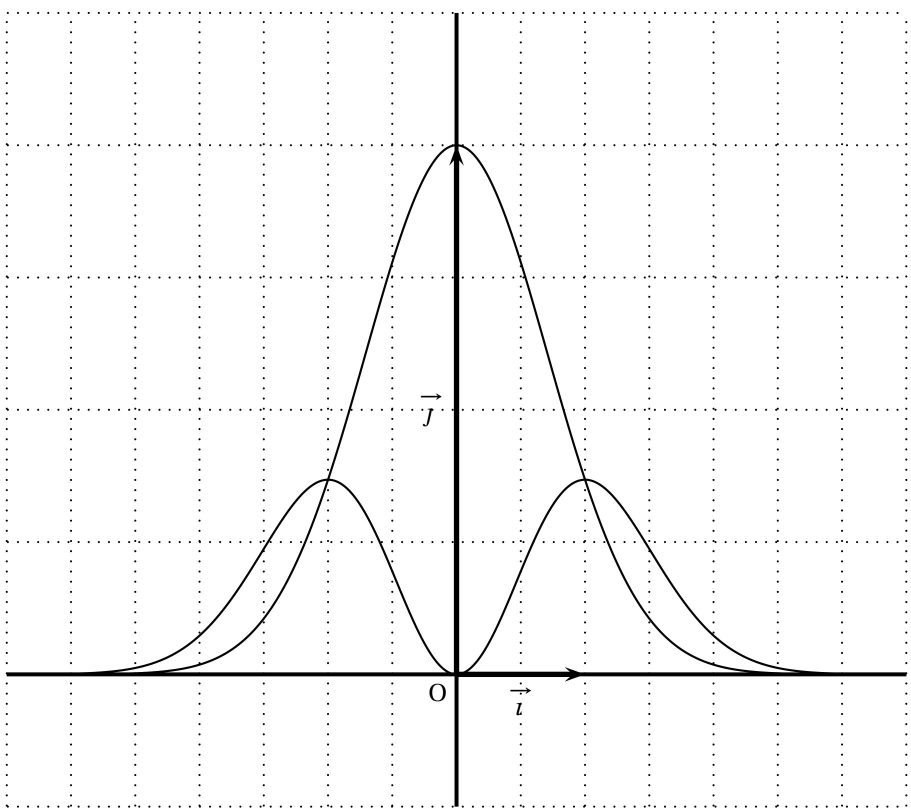
(on pourra illustrer le raisonnement sur la figure fournie)

Document à rendre avec la copie - Annexe

Exercice 3

Affirmation n^{o}	VRAI ou FAUX
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

Exercice 4



∾ Baccalauréat S Pondichéry 3 avril 2006 ∾

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Dix affirmations, réparties en trois thèmes et numérotées de 1. a à 3. d sont proposées ci-dessous. Le candidat portera sur sa copie, en regard du numéro de l'affirmation, et avec le plus grand soin, la mention VRAI ou FAUX.

Chaque réponse convenable rapporte 0,4 point. Chaque réponse erronée enlève 0,1 point. Il n'est pas tenu compte de l'absence de réponse. Un éventuel total négatif est ramené à 0.

1. Pour tout réel x, e^x désigne l'image de x par la fonction exponentielle.

Affirmation 1. a	Pour tous les réels a et b : $\left(\text{e}^a\right)^b = \text{e}^{\left(a^b\right)}$.
Affirmation 1. b	Pour tous les réels a et b : $\text{e}^{a-b} = \dfrac{\text{e}^a}{\text{e}^b}$.
Affirmation 1. c	La droite d'équation $y = x+1$ est la tangente à la courbe représentative de la fonction exponentielle en son point d'abscisse 1.

2. Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I et soit a un élément de I.

Affirmation 2. a	Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.
Affirmation 2. b	Si f est continue en a, alors f est dérivable en a.
Affirmation 2. c	Si f est dérivable en a, alors la fonction $h \mapsto \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite finie en 0.

3. On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$.

Affirmation 3. a	Si $\lim u_n = +\infty$ et si $\lim v_n = -\infty$ alors $\lim (u_n + v_n) = 0$.
Affirmation 3. b	Si (u_n) converge vers un réel non nul et si $\lim v_n = +\infty$, alors la suite $\left(u_{n,} \times v_n\right)$ ne converge pas.
Affirmation 3. c	Si (u_n) converge vers un réel non nul, si (v_n) est positive et si $\lim v_n = 0$, alors la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ ne converge pas.
Affirmation 3. d	Si (u_n) et (v_n) convergent alors la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ converge.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On prendra pour unité graphique 5 cm.

On pose $z_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $z_{n+1} = \dfrac{1+\text{i}}{2} z_n$. On note A_n le point du plan d'affixe z_n.

1. Calculer z_1, z_2, z_3, z_4 et vérifier que z_4 est un nombre réel.
Placer les points A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4 sur une figure.

2. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = |z_n|$.
Justifier que la suite (u_n) est une suite géométrique puis établir que, pour tout enfler naturel n,

$$u_n = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n.$$

3. À partir de quel rang n_0 tous les points A_n appartiennent-ils au disque de centre O et de rayon 0,1 ?

4. a. Établir que, pour tout entier naturel n, $\dfrac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}} = \text{i}$.
En déduire la nature du triangle $\text{O}A_nA_{n+1}$.

b. Pour tout entier naturel n, on note ℓ_n la longueur de la ligne brisée $A_0A_1A_2\ldots A_{n-1}A_n$.
On a ainsi : $\ell_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \ldots + A_{n-1}A_n$.
Exprimer ℓ_n, en fonction de n. Quelle est la limite de la suite (ℓ_n) ?

EXERCICE 2 **4 points**

Candidat ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On prendra 5 cm pour unité graphique.
Soit f la transformation qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{i}\right)z + 1.$$

1. Justifier que f est une similitude directe dont on précisera le centre Ω (d'affixe ω), le rapport k et l'angle θ.
2. On note A_0 le point O et, pour tout entier naturel n, on pose $A_{n+1} = f(A_n)$.
   a. Déterminer les affixes des points A_1 A_2, A_3 puis placer les points A_0, A_1, A_2 et A_3.
   b. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \Omega A_n$. Justifier que la suite (u_n) est une suite géométrique puis établir que, pour tout entier naturel n,
   $$u_n = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n.$$
   c. À partir de quel rang n_0 tous les points A_n appartiennent-ils au disque de centre Ω et de rayon 0,1 ?
3. a. Quelle est la nature du triangle ΩA_0A_1 ?
   En déduire, pour tout entier naturel n, la nature du triangle ΩA_nA_{n+1}.
   b. Pour tout entier naturel n, on note ℓ_n la longueur de la ligne brisée $A_0A_1A_2\ldots A_{n-1}A_n$. On a ainsi : $\ell_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \ldots + A_{n-1}A_n$. Exprimer ℓ_n en fonction de n. Quelle est la limite de la suite (ℓ_n) ?

EXERCICE 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

Partie A

(cette partie constitue une restitution organisée de connaissances)

Soit a, b, c et d des réels tels que $(a,\ b,\ c) \neq (0,\ 0,\ 0)$.
Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$.
On considère le point I de coordonnées $(x_I,\ y_I,\ z_I)$ et le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(a,\ b,\ c)$.
Le but de cette partie est de démontrer que la distance de I au plan $\mathscr{P}$ est égale à $\dfrac{|ax_I + by_I + cz_I + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

1. Soit Δ la droite passant par I et orthogonale au plan $\mathscr{P}$.
   Déterminer, en fonction de $a,\ b,\ c,\ x_I,\ y_I$ et z_I, un système d'équations paramétriques de Δ.

2. On note H le point d'intersection de Δ et $\mathscr{P}$.

a. Justifier qu'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{IH} = k\overrightarrow{n}$.

b. Déterminer l'expression de k en fonction de $a,\ b,\ c,\ d,\ x_I,\ y_I$ et z_I.

c. En déduire que $IH = \dfrac{\left|ax_I + by_I + cz_I + d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

Partie B

Le plan $\mathscr{Q}$ d'équation $x - y + z - 11 = 0$ est tangent à une sphère $\mathscr{S}$ de centre le point Ω de coordonnées $(1,\ -1,\ 3)$.

1. Déterminer le rayon de la sphère $\mathscr{S}$.

2. Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite Δ passant par Ω et orthogonale au plan $\mathscr{Q}$

3. En déduire les coordonnées du point d'intersection de la sphère $\mathscr{S}$ et du plan $\mathscr{Q}$.

EXERCICE 4 **7 points**

Commun à tous les candidats

Les parties A et B sont indépendantes.

Un laboratoire de recherche étudie l'évolution d'une population animale qui semble en voie de disparition.

Partie A

En 2000, une étude est effectuée sur un échantillon de cette population dont l'effectif initial est égal à mille.

Cet échantillon évolue et son effectif, exprimé en milliers d'individus, est approché par une fonction f du temps t (exprimé en années à partir de l'origine 2000).

D'après le modèle d'évolution choisi, la fonction f est dérivable, strictement positive sur $[0\ ;\ +\infty[$, et satisfait l'équation différentielle :

$$\text{(E)} \qquad y' = -\frac{1}{20}y(3 - \ln y).$$

1. Démontrer l'équivalence suivante : Une fonction f, dérivable, strictement positive sur $[0\ ;\ +\infty[$, vérifie, pour tout t de $[0\ ;\ +\infty[$, $f'(t) = -\dfrac{1}{20}f(t)[3 - \ln\left(f(t)\right)]$ si et seulement si la fonction $g = \ln(f)$ vérifie, pour tout t de $[0\ ;\ +\infty[$, $g'(t) = \dfrac{1}{20}g(t) - \dfrac{3}{20}$.

2. Donner la solution générale de l'équation différentielle :

$$\text{(H)} \qquad z' = \frac{1}{20}z - \frac{3}{20}.$$

3. En déduire qu'il existe un réel C tel que, pour tout t de $[0\ ;\ +\infty[$

$$f(t) = \exp\left[3 + C\exp\left(\frac{t}{20}\right)\right].$$

(la notation exp désigne la fonction exponentielle naturelle $x \mapsto \mathrm{e}^x$).

4. La condition initiale conduit donc à considérer la fonction f définie par :

$$f(t) = \exp\left[3 - 3\exp\left(\frac{t}{20}\right)\right].$$

a. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

b. Déterminer le sens de variation de f sur $[0~;~+\infty[$.

c. Résoudre dans $[0~;~+\infty[$ l'inéquation $f(t) < 0,02$.
Au bout de combien d'années, selon ce modèle, la taille de l'échantillon sera-t-elle inférieure à vingt individus ?

Partie B

En 2005, ce laboratoire de recherche met au point un test de dépistage de la maladie responsable de cette disparition et fournit les renseignements suivants : « La population testée comporte 50 % d'animaux malades. Si un animal est malade, le test est positif dans 99 % des cas ; si un animal n'est pas malade, le test est positif dans 0,1 % des cas ».

On note M l'évènement « l'animal est malade », $\overline{M}$ l'évènement contraire et T l'évènement « le test est positif ».

1. Determiner $P(M)$, $P_M(T)$, $P_{\overline{M}}(T)$.
2. En déduire $P(T)$.
3. Le laboratoire estime qu'un test est fiable, si sa valeur prédictive, c'est-à-dire la probabilité qu'un animal soit malade sachant que le test est positif, est supérieure à 0,999. Ce test est-il fiable ?

Baccalauréat S Amérique du Nord mai 2006

EXERCICE 1 **3 points**

Commun à tous les candidats

Pour chacune des 3 questions, une seule des trois propositions est exacte.
Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte 1 *point ; une réponse inexacte enlève* 0,5 *point ; l'absence de réponse est comptée* 0 *point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.*

Une urne contient 10 bulletins indiscernables au toucher de 3 sortes :
4 sont marqués « oui », 3 sont marqués « non » et 3 sont marqués « blanc ».
Lors d'un premier jeu, le joueur commence par miser 30 centimes d'euro. Il tire ensuite un bulletin de l'urne et l'y remet après l'avoir lu. Si le bulletin tiré est marqué « oui », le joueur reçoit 60 centimes d'euro, s'il est marqué « non », il ne reçoit rien. Si le bulletin tiré est marqué « blanc », il reçoit 20 centimes d'euro.

Question 1 Le jeu est :

A : favorable au joueur B : défavorable au joueur C : équitable

Question 2 Le joueur joue 4 parties indépendamment les unes des autres.
La probabilité qu'il tire au moins une fois un bulletin marqué « oui » est égale à

A : $\dfrac{216}{625}$ B : $\dfrac{544}{625}$ C : $\dfrac{2}{5}$

Lors d'un second jeu, le joueur tire simultanément deux bulletins de l'urne.

Question 3 : la probabilité qu'il obtienne un tirage de deux bulletins de sortes différentes est égale à :

A : $\dfrac{4}{15}$ B : $\dfrac{11}{30}$ C : $\dfrac{11}{15}$

EXERCICE 2 **5 points**

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ (unité graphique 2 cm), on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 2$, $z_B = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_C = 1 - i\sqrt{3}$.

Partie A

1. **a.** Donner la forme exponentielle de z_B puis de z_C.
   b. Placer les points A, B et C.
2. Déterminer la nature du quadrilatère OBAC.
3. Déterminer et construire l'ensemble $\mathcal{D}$ des points M du plan tels que $|z| = |z - 2|$.

Partie B

À tout point M d'affixe z tel que $z \neq z_A$, on associe le point M' d'affixe z' défini par

$$z' = \frac{-4}{z-2}.$$

1. **a.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z = \dfrac{-4}{z-2}$.
   b. En déduire les points associés aux points B et C.
   c. Déterminer et placer le point G′ associé au centre de gravité G du triangle OAB.

2. **a.** **Question de cours :**

Prérequis : le module d'un nombre complexe z quelconque, noté $|z|$, *vérifie* $|z|^2 = z\overline{z}$ *où* $\overline{z}$ *est le conjugué de z.*

Démontrer que :

- pour tous nombres complexes z_1 et z_2, $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$.
- pour tout nombre complexe z non nul, $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$.

b. Démontrer que pour tout nombre complexe z distinct de 2,

$$\left|z' - 2\right| = \frac{2|z|}{|z-2|}.$$

c. On suppose dans cette question que M est un point quelconque de $\mathscr{D}$, où $\mathscr{D}$ est l'ensemble défini à la question 3. de la partie A.

Démontrer que le point M' associé à M appartient à un cercle Γ dont on précisera le centre et le rayon. Tracer Γ.

EXERCICE 2 — 5 points

Exercice de spécialité

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ (unité graphique : 4 cm).

Soit Ω le point d'affixe 2.

On appelle r la rotation de centre Ω et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$ et h l'homothétie de centre Ω et de rapport $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

1. On pose $\sigma = h \circ r$.

a. Quelle est la nature de la transformation σ ? Préciser ses éléments caractéristiques.

b. Montrer que l'écriture complexe de σ est : $z \longmapsto \dfrac{1+\text{i}}{2}z + 1 - \text{i}$.

c. Soit M un point quelconque du plan d'affixe z. On désigne par M' son image par σ et on note z' l'affixe de M'. Montrer que $z - z' = \text{i}\left(2 - z'\right)$.

2. **a.** **Question de cours**

- *Prérequis : définitions géométriques du module d'un nombre complexe et d'un argument d'un nombre complexe non nul. Propriétés algébriques des modules et des arguments.*

Démontrer que : si A est un point donné d'affixe a, alors l'image du point P d'affixe p par la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ est le point Q d'affixe q telle que $q - a = \text{i}(p - a)$.

b. Déduire des questions précédentes la nature du triangle $\Omega MM'$, pour M distinct de Ω.

3. Soit A_0 le point d'affixe $2 + \text{i}$.

On considère la suite (A_n) de points du plan définis par :

$$\text{pour tout entier naturel} \quad n,\ A_{n+1} = \sigma\left(A_n\right).$$

a. Montrer que, pour tout entier naturel n, l'affixe a_n de A_n est donnée par :

$$a_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \text{e}^{\text{i}\frac{(n+2)\pi}{4}} + 2.$$

b. Déterminer l'affixe de A_5.

4. Déterminer le plus petit entier n_0 tel que l'on ait :

pour $n \geqslant n_0$, le point A_n est dans le disque de centre Ω et de rayon 0,01.

EXERCICE 3 **5 points**

1. On considère la fonction g définie sur $]0~;~+\infty[$ par

$$g(x) = \ln x - \frac{2}{x}$$

On donne ci-dessous le tableau de variations de g.

x	0	$2,3$	x_0	$2,4$	$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Démontrer toutes les propriétés de la fonction g regroupées dans ce tableau.

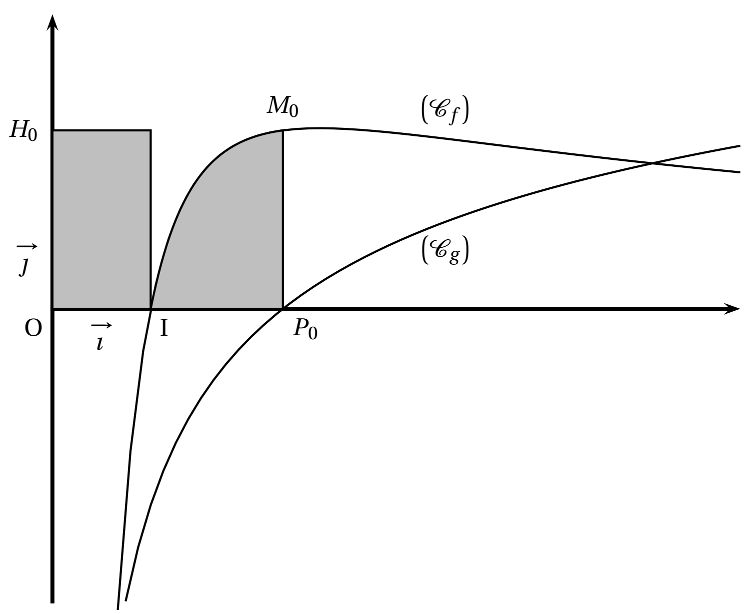
2. Soit f la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{5\ln x}{x}$$

a. Montrer que $f\left(x_0\right) = \dfrac{10}{x_0^2}$ où x_0 est le réel apparaissant dans le tableau ci-dessus.

b. Soit a un réel. Pour $a > 1$, exprimer $\displaystyle\int_1^a f(t)\,\mathrm{d}t$ en fonction de a.

3. On a tracé dans le repère orthonormal $\left(\mathrm{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ ci-dessous les courbes représentatives des fonctions f et g notées respectivement $\left(\mathscr{C}_f\right)$ et $\left(\mathscr{C}_g\right)$.
On appelle I le point de coordonnées $(1~;~0)$, P_0 le point d'intersection de $\left(\mathscr{C}_g\right)$ et de l'axe des abscisses, M_0 le point de $\left(\mathscr{C}_f\right)$ ayant même abscisse que P_0 et H_0 le projeté orthogonal de M_0 sur l'axe des ordonnées.
On nomme $(\mathscr{D}_1)$ le domaine du plan délimité par la courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ et les segments $[\mathrm{I}P_0]$ et $[P_0M_0]$.
On nomme $(\mathscr{D}_2)$ le domaine du plan délimité par le rectangle construit à partir de $[\mathrm{OI}]$ et $[\mathrm{O}H_0]$.
Démontrer que les deux domaines $(\mathscr{D}_1)$ et $(\mathscr{D}_2)$ ont même aire, puis donner un encadrement d'amplitude 0,2 de cette aire.



EXERCICE 4 **7 points**

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
On s'intéresse aux fonctions f dérivables sur $[0~;~+\infty[$ vérifiant les conditions

$$\left\{\begin{array}{lll}(1) & : & \text{pour tout réel } x \text{ appartenant à} [0~;~+\infty[,\ f'(x) = 4 - \left[f(x)\right]^2\\ (2) & : & f(0) = 0\end{array}\right.$$

On admet qu'il existe une unique fonction f vérifiant simultanément (1) et (2).
Les deux parties peuvent être traitées de manière indépendante. L'annexe sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

Partie A. Étude d'une suite

Afin d'obtenir une approximation de la courbe représentative de la fonction f on utilise la méthode itérative d'Euler avec un pas égal à 0,2.
On obtient ainsi une suite de points notés (M_n), d'abscisse x_n et d'ordonnée y_n telles que :

$$\left\{\begin{array}{lll}x_0 = 0 & \text{et pour tout entier naturel} & n,\ x_{n+1} = x_n + 0,2\\ y_0 = 0 & \text{et pour tout entier naturel} & n,\ y_{n+1} = -0,2y_n^2 + y_n + 0,8\end{array}\right.$$

1. **a.** Les coordonnées des premiers points sont consignées dans le tableau de l'annexe.
Compléter ce tableau. On donnera les résultats à 10^{-4} près.

b. Placer, sur le graphique donné en annexe, les points M_n pour n entier naturel inférieur ou égal à 7.

c. D'après ce graphique, que peut-on conjecturer sur le sens de variation de la suite $\left(y_n\right)$ et sur sa convergence ?

2. **a.** Pour x réel, on pose $p(x) = -0,2x^2 + x + 0,8$. Montrer que si $x \in [0~;~2]$ alors $p(x) \in [0~;~2]$.

b. Montrer que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant y_n \leqslant 2$.

c. Étudier le sens de variation de la suite $\left(y_n\right)$.

d. La suite $\left(y_n\right)$ est-elle convergente ?

Partie B. Étude d'une fonction

Soit g la fonction définie sur $[0~;~+\infty[$ par $g(x) = 2\left(\dfrac{\mathrm{e}^{4x} - 1}{\mathrm{e}^{4x} + 1}\right)$ et $\left(\mathscr{C}_g\right)$ sa courbe représentative.

1. Montrer que la fonction g vérifie les conditions (1) et (2).

2. **a.** Montrer que $\left(\mathscr{C}_g\right)$ admet une asymptote Δ dont on donnera une équation.

b. Étudier les variations de g sur $[0~;~+\infty[$.

3. Déterminer l'abscisse α du point d'intersection de Δ et de la tangente à $\left(\mathscr{C}_g\right)$ à l'origine.

4. Tracer, dans le repère de l'annexe, la courbe $\left(\mathscr{C}_g\right)$ et les éléments mis en évidence dans les questions précédentes de cette partie B.

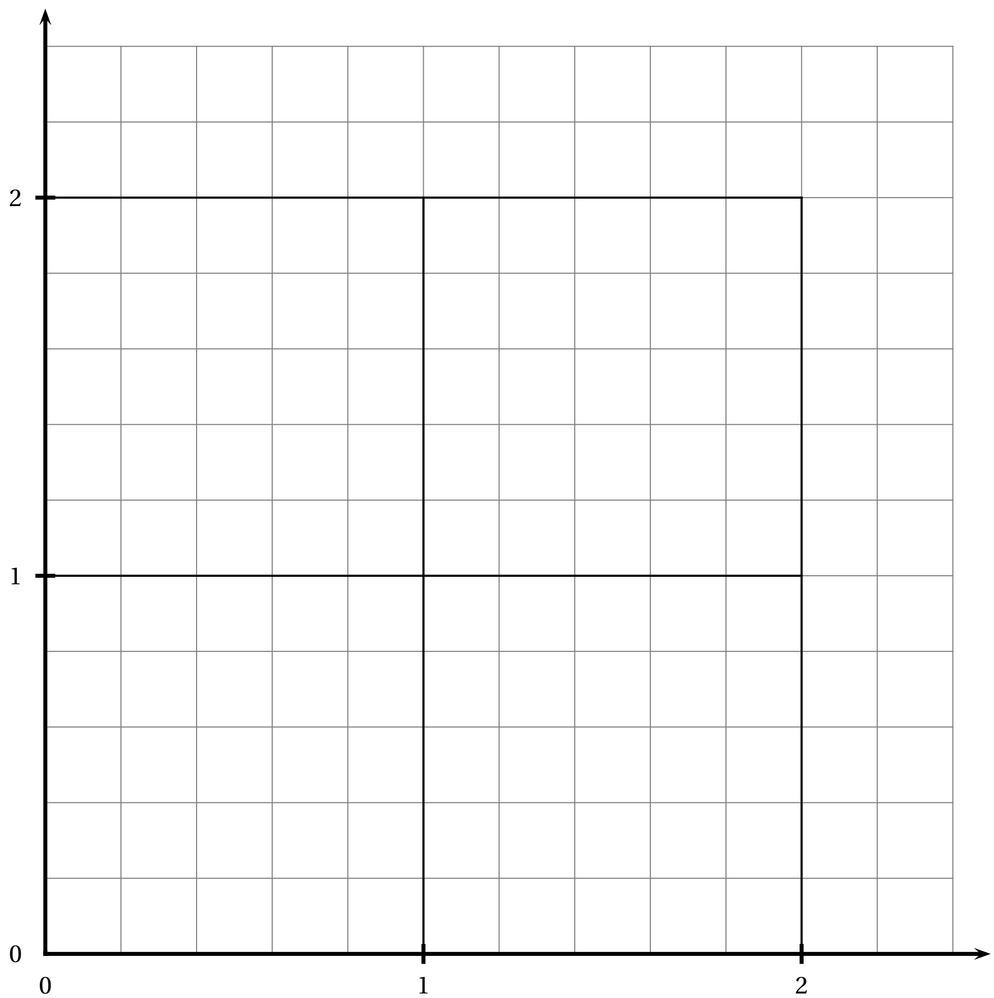
Cette page sera complétée et remise avec la copie avant la fin de l'épreuve

Exercice 4 : Annexe

Partie A

n	0	1	2	3	4	5	6	7
x_n	0	0,2	0,4					
y_n	0	0,800 0	1,472 0					

Partie B



Baccalauréat S Antilles-Guyane juin 2006

EXERCICE 1 **3 points**

Commun à tous les candidats

1. **Restitution organisée des connaissances**
   Pré-requis :
   – la fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0~;~+\infty[$ et sa fonction dérivée est la fonction inverse $\left(x \longmapsto \dfrac{1}{x}\right)$.
   – $\ln(1) = 0$
   Démontrer que pour tous réels strictement positifs a et x,
   $$\ln(ax) = \ln(a) + \ln(x).$$
2. Utiliser le résultat précédent pour démontrer que
   $$\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b) \text{ et que } \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$
   pour tous réels strictement positifs a et b.
3. On donne $0{,}69 \leqslant \ln 2 \leqslant 0{,}70$ et $1{,}09 \leqslant \ln 3 \leqslant 1{,}10$.
   En déduire des encadrements de $\ln 6$, $\ln\left(\dfrac{1}{6}\right)$, et $\ln\left(\dfrac{3}{8}\right)$.

EXERCICE 2 **3 points**

Commun à tous les candidats

QCM : pour chaque question une seule des réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Chaque bonne réponse rapporte 0,75 point, chaque erreur enlève 0,25 point, l'absence de réponse vaut 0 point. Si le total des points de l'exercice est négatif, la note est ramenée à 0.

Vous répondrez sur votre copie en indiquant le numéro de la question et la lettre correspondant à votre réponse.

1. L'équation $e^{2x} - 3e^{x} - 4 = 0$ admet dans $\mathbb{R}$:

a. 0 solution	b. 1 solution	c. 2 solutions	d. plus de 2 solutions

2. L'expression $-e^{-x}$

a. n'est jamais négative	b. est toujours négative	c. n'est négative que si x est positif	d. n'est négative que si x est négatif

3. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{2e^{x} - 1}{e^{x} + 2} =$

a. $-\dfrac{1}{2}$	b. 1	c. 2	d. $+\infty$

4. L'équation différentielle $y = 2y' - 1$ a pour ensemble de solutions :

a. $x \longmapsto k e^{2x} - 1$ avec $k \in \mathbb{R}$	b. $x \longmapsto k e^{\frac{1}{2}x} + 1$ avec $k \in \mathbb{R}$	c. $x \longmapsto k e^{\frac{1}{2}x} - 1$ avec $k \in \mathbb{R}$	d. $x \longmapsto k e^{2x} + \dfrac{1}{2}$ avec $k \in \mathbb{R}$

EXERCICE 3 **4 points**
Commun à tous les candidats

Partie A

Soit X une variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.
On rappelle que $P(X \leqslant a) = \displaystyle\int_0^a \lambda e^{-\lambda t}\,dt$.
La courbe donnée en ANNEXE 1 représente la fonction densité associée.

1. Interpréter sur le graphique la probabilité $P(X \leqslant 1)$.
2. Indiquer sur le graphique où se lit directement le paramètre λ.

Partie B

On pose $\lambda = 1{,}5$.

1. Calculer $P(X \leqslant 1)$, en donner une valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-3} près par excès.
2. Calculer $P(X \geqslant 2)$.
3. Déduire des calculs précédents l'égalité suivante : $P(1 \leqslant X \leqslant 2) = 0{,}173$ à 10^{-3} près.
4. Calculer l'intégrale $F(x) = \displaystyle\int_0^x 1{,}5te^{-1{,}5t}\,dt$.
   Déterminer la limite quand x tend vers $+\infty$ de $F(x)$; on obtient ainsi l'espérance mathématique de la variable X.

Partie C

Une machine outil fabrique des cylindres. On mesure l'écart, en dixièmes de millimètres, entre le diamètre des cylindres et la valeur de réglage de la machine.
On suppose que cet écart suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1{,}5$.

Si l'écart est inférieur à 1, le cylindre est accepté. Si l'écart est compris entre 1 et 2, on procède à une rectification qui permet d'accepter le cylindre dans 80 % des cas. Si l'écart est supérieur à 2, le cylindre est refusé.

1. On prélève au hasard un cylindre dans la production.
   a. Montrer que la probabilité qu'il soit accepté est égale à 0,915 à 10^{-3} près.
   b. Sachant qu'il est accepté, quelle est la probabilité qu'il ait subi une rectification ?
2. On prélève de manière indépendante dix cylindres de la production. On suppose que le nombre de cylindres suffisamment important pour assimiler ce tirage à un tirage successif avec remise.
   a. Quelle est la probabilité que les dix cylindres soient acceptés ?
   b. Quelle est la probabilité qu'au moins un cylindre soit refusé ?

EXERCICE 4 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$, on considère les points
   – A d'affixe a, $a \in \mathbb{R}$
   – B d'affixe $b + \mathrm{i}$, $b \in \mathbb{R}$
   – C image de B dans la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

   a. Déterminer une relation entre a et b pour que le point C appartienne à l'axe $\left(O\,;\ \vec{v}\right)$.
   b. Exprimer alors l'affixe du point C en fonction de a.

2. Dans cette question, on pose $a = \sqrt{3}$ et $b = 0$. On considère les points C d'affixe $c = -\text{i}$ et D d'affixe $d = 2 + \sqrt{3} - 2\text{i}\sqrt{3}$.
   a. Quelle est la nature du triangle ABC ?
   b. Calculer le quotient $\dfrac{d-a}{c-a}$; que peut-on en déduire pour le triangle ACD ?
   c. Déterminer l'affixe du point E image de D dans la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.
   d. Déterminer l'affixe du point F image de D dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.
   e. Déterminer la nature du triangle BEF.

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Sur la figure donnée en ANNEXE 2, on considère les carrés $OABC$ et $OCDE$ tels que :

$$\left(\overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OC}\right) = \left(\overrightarrow{OC}\ ;\ \overrightarrow{OE}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

On désigne par I le milieu du segment $[CD]$, par J le milieu du segment $[OC]$ et par H le point d'intersection des segments $[AD]$ et $[IE]$.

1. Justifier l'existence d'une similitude directe s transformant A en I et D en E.
2. Déterminer le rapport de cette similitude s.
   On admet que l'angle de la similitude s est égal à $\dfrac{\pi}{2}$.
3. Donner, sans justifier, l'image de B par s.
4. Déterminer et placer l'image de C par s.
5. Soit Ω le centre de la similitude s.
   a. Montrer que Ω appartient au cercle de diamètre $[AI]$ et à celui de diamètre $[DE]$.
   b. Montrer que Ω ne peut être le point H.
   c. Construire Ω.
6. On considère le repère orthonormal direct $\left(O\ ;\ \overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OC}\right)$.
   a. Déterminer l'écriture complexe de la similitude s.
   b. En déduire l'affixe du centre Ω de s.

EXERCICE 5 **5 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

On considère les suites de points A_n et B_n définies pour tout entier naturel n de la manière suivante : sur un axe orienté $\left(O\ ;\ \vec{u}\right)$ donné en ANNEXE 3, le point A_0 a pour abscisse 0 et le point B_0 a pour abscisse 12.
Le point A_{n+1} est le barycentre des points $(A_n, 2)$ et $(B_n, 1)$, le point B_{n+1} est le barycentre des points pondérés $(A_n, 1)$ et $(B_n, 3)$.

1. Sur le graphique placer les points A_2, B_2.
2. On définit les suites (a_n) et (b_n) des abscisses respectives des points A_n et B_n.
   Montrer que :
   $$a_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{3}.$$
   On admet de même que $b_{n+1} = \dfrac{a_n + 3b_n}{4}$.

Partie B

1. On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = b_n - a_n$.
   a. Montrer que la suite (u_n) est géométrique. En préciser la raison.
   b. Donner l'expression de u_n en fonction de l'entier naturel n.
   c. Déterminer la limite de (u_n). Interpréter géométriquement ce résultat.
2. **a.** Démontrer que la suite (a_n) est croissante (on pourra utiliser le signe de u_n).
   b. Étudier les variations de la suite (b_n).
3. Que peut-on déduire des résultats précédents quand à la convergence des suites (a_n) et (b_n) ?

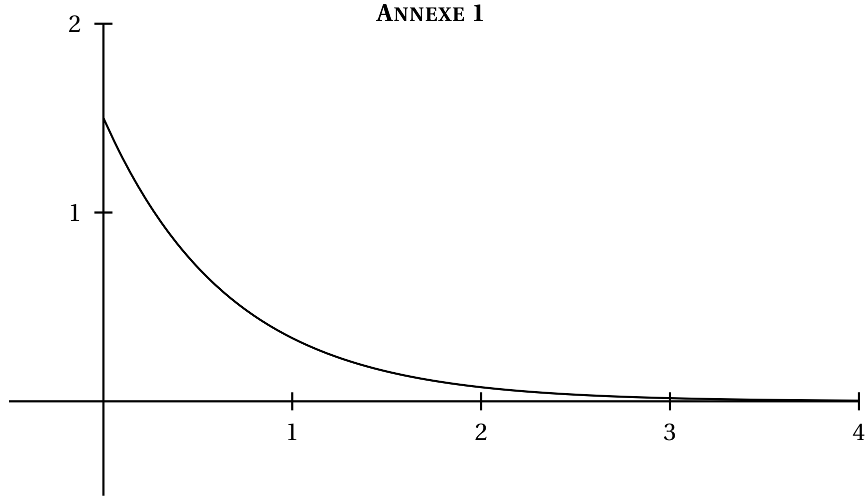
Partie C

1. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par

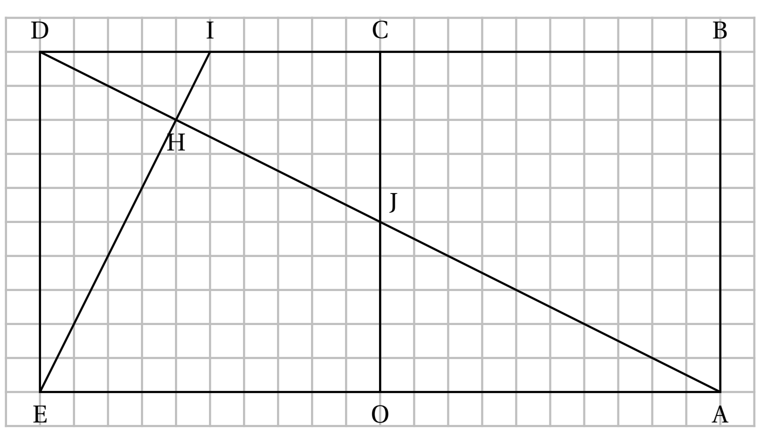
$$v_n = 3a_n + 4b_n.$$

   Montrer que la suite (v_n) est constante.
2. Déterminer la limite des suites (a_n) et (b_n).

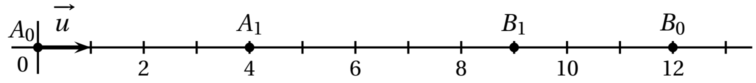
ANNEXE 1



ANNEXE 2



ANNEXE 3



Baccalauréat S Asie juin 2006

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ (unité graphique : 2 cm).

On rappelle que pour tout vecteur $\vec{w}$ non nul, d'affixe z, on a : $|z| = \|\vec{w}\|$ et $\arg(z) = \left(\vec{u}, \vec{w}\right)$ à 2π près.

Partie A. Restitution organisée de connaissances

Prérequis : On sait que si z et z' sont deux nombres complexes non nuls, alors :

$$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z').$$

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls. Démontrer que :

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$$

Partie B

On note A et B les points d'affixes respectives $-\text{i}$ et 3i.

On note f l'application qui, à tout point M du plan, d'affixe z, distinct de A, associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \frac{\text{i}z + 3}{z + \text{i}}$$

1. Étude de quelques cas particuliers.

   a. Démontrer que f admet deux points invariants J et K appartenant au cercle de diamètre [AB].
   Placer ces points sur le dessin.

   b. On note C le point d'affixe $c = -2 + \text{i}$. Démontrer que le point C′, image de C par f, appartient à l'axe des abscisses.

2. Pour tout point M du plan distinct de A et B, démontrer que
   $\arg(z') = \left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) + \dfrac{\pi}{2}$ à 2π près.

3. Étude de deux ensembles de points.

   a. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que z' soit un nombre complexe imaginaire pur.

   b. Soit M d'affixe z un point du cercie de diamètre [AB] privé des points A et B. À quel ensemble appartient le point M' ?

EXERCICE 2 **5 points**

Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère le cube ABCDEFGH représenté sur la feuille annexe. Dans tout l'exercice, l'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{A} ; \overrightarrow{\text{AB}} ; \overrightarrow{\text{AD}} ; \overrightarrow{\text{AE}}\right)$.

On note I le point de coordonnées $\left(\frac{1}{3} ; 1 ; 1\right)$.

1. Placer le point I sur la figure.

2. Le plan (ACI) coupe la droite (EH) en J. Démontrer que les droites (IJ) et (AC) sont parallèles.
3. On note R le projeté orthogonal de l sur la droite (AC).
   a. Justifier que les deux conditions suivantes sont vérifiées :
      i. Il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AR} = k\overrightarrow{AC}$.
      ii. $\overrightarrow{IR} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.
   b. Calculer les coordonnées du point R,
   c. En déduire que la distance IR s'exprime par $IR = \dfrac{\sqrt{11}}{3}$.
4. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(3\ ;\ -3\ ;\ 2)$ est normal au plan (ACI).
   En déduire une équation cartésienne du plan (ACI).
5. Démontrer que la distance du point F au plan (ACI) est $\dfrac{5}{\sqrt{22}}$.

EXERCICE 2 **5 points**

Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Étant donné un entier naturel $n \geqslant 2$, on se propose d'étudier l'existence de trois entiers naturels $x,\ y$ et z tels que $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 2^n - 1$ modulo 2^n.

Partie A : Étude de deux cas particuliers

1. Dans cette question on suppose $n = 2$. Montrer que 1, 3 et 5 satisfont à la condition précédente.
2. Dans cette question, on suppose $n = 3$.
   a. Soit m un entier naturel. Reproduire et compléter le tableau ci-dessous donnant le reste r de la division euclidienne de m par 8 et le reste R de la division euclidienne de m^2 par 8.

r	0	1	2	3	4	5	6	7
R								

   b. Peut-on trouver trois entiers naturels $x,\ y$ et z tels que $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 7$ modulo 8 ?

Partie B Étude du cas général où $n \geqslant 3$

Supposons qu'il existe trois entiers naturels $x,\ y$ et z tels que
$x^2 + y^2 + z^2 \equiv 2^n - 1$ modulo 2^n.

1. Justifier le fait que les trois entiers naturels $x,\ y$ et z sont tous impairs ou que deux d'entre eux sont pairs.
2. On suppose que x et y sont pairs et que z est impair. On pose alors $x = 2q$, $y = 2r,\ z = 2s + 1$ où $q,\ r,\ s$ sont des entiers naturels.
   a. Montrer que $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 1$ modulo 4.
   b. En déduire une contradiction.
3. On suppose que $x,\ y,\ z$ sont impairs.
   a. Prouver que, pour tout entier naturel k non nul, $k^2 + k$ est divisible par 2.
   b. En déduire que $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 3$ modulo 8.
   c. Conclure.

EXERCICE 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

Pierre et Claude jouent au tennis. Les deux joueurs ont la même chance de gagner la première partie. Par la suite, lorsque Pierre gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la suivante est 0,7. Et s'il perd une partie, la probabilité qu'il perde la suivante est 0,8.

Dans tout l'exercice, n est un entier naturel non nul. On considère les évènements :

- G_n : « Pierre gagne la n-ième partie ».
- P_n : « Pierre perd la n-ième partie ».

On pose : $p_n = p(G_n)$ et $q_n = p(P_n)$.

1. Recherche d'une relation de récurrence.
   - **a.** Déterminer p_1 puis les probabilités conditionnelles $p_{G_1}(G_2)$ et $p_{P_1}(G_2)$.
   - **b.** Justifier l'égalité $p_n + q_n = 1$.
   - **c.** Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,2$.
2. Étude de la suite (p_n).

   On pose, pour tout entier naturel n non nul, $v_n = p_n - \dfrac{2}{5}$.
   - **a.** Prouver que la suite (v_n) est une suite géométrique et exprimer v_n en fonction de n.
   - **b.** En déduire l'expression de p_n en fonction de n.
   - **c.** Déterminer la limite de la suite (p_n) quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 4 **7 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

On considère l'équation différentielle

$$(E) : \quad y' + y = e^{-x}.$$

1. Démontrer que la fonction u définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par $u(x) = xe^{-x}$ est une solution de (E).
2. Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $\quad y' + y = 0$.
3. Démontrer qu'une fonction v, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, est solution de (E) si et seulement si $v - u$ est solution de (E_0).
4. En déduire toutes les solutions de (E).
5. Déterminer la fonction f_2, solution de (E), qui prend la valeur 2 en 0.

Partie B

k étant un nombre réel donné, on note f_k la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ par :

$$f_k(x) = (x + k)e^{-x}.$$

On note $\mathscr{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Déterminer les limites de f_k en $-\infty$ et $+\infty$.
2. Calculer $f_k'(x)$ pour tout réel x.
3. En déduire le tableau de variations de f_k.

Partie C

1. On considère la suite d'intégrales (I_n) définie par $\mathrm{I}_0 = \displaystyle\int_{-2}^{0} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par : $I_n = \displaystyle\int_{-2}^{0} x^n \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

a. Calculer la valeur exacte de l'intégrale I_0.

b. En utilisant une intégration par parties, démontrer l'égalité :

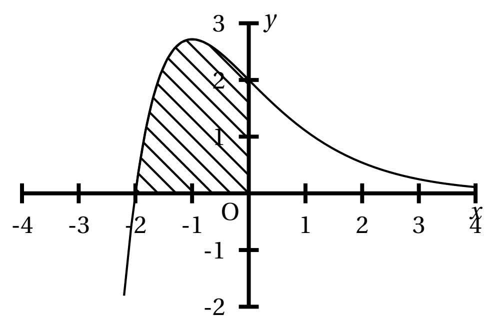
$$I_{n+1} = (-2)^{n+1}\mathrm{e}^2 + (n+1)I_n.$$

c. En déduire les valeurs exactes des intégrales I_1 et I_2.

2. Le graphique ci-dessous représente une courbe $\mathscr{C}_k$ qui est la représentation graphique d'une fonction f_k définie à la partie B.

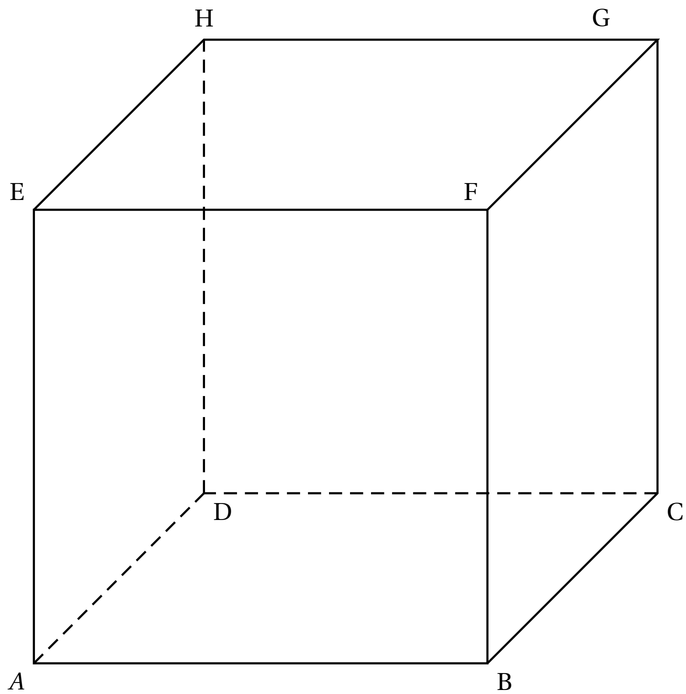
a. À l'aide des renseignements donnés par le graphique, déterminer la valeur du nombre réel k correspondant.

b. Soit $\mathscr{S}$ l'aire de la partie hachurée (en unité d'aire) ; exprimer $\mathscr{S}$ en fonction de I_1 et I_0 et en déduire sa valeur exacte.



ANNEXE

Exercice 2 (candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)



Durée : 4 heures

Baccalauréat S Centres étrangers juin 2006

EXERCICE 1 **3 points**

Commun à tous les candidats

Partie A. Restitution organisée de connaissances

Prérequis : On rappelle les deux résultats suivants :

i. Si z est un nombre complexe non nul, on a l'équivalence suivante :

$$\left\{\begin{array}{lcl} |z| & = & r \\ \arg z & = & \theta \text{ à } 2\pi \text{ près}\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} z & = & r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) \\ r & > & 0\end{array}\right.$$

ii. Pour tous nombres réels a et b :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \cos(a+b) & = & \cos a\cos b - \sin a \sin b \\ \sin(a+b) & = & \sin a\cos b + \sin b\cos a\end{array}\right.$$

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes non nuls.

Démontrer les relations :

$$|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2| \text{ et } \arg(z_1 z_2) = \arg\left(z_1\right) + \arg(z_2) \text{ à } 2\pi \text{ près}$$

Partie B.

Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse et proposer une démonstration pour la réponse indiquée. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à fournir un contre-exemple. Une réponse sans démonstration ne rapporte pas de point.

On rappelle que si z est un nombre complexe, $\overline{z}$ désigne le conjugué de z et $|z|$ désigne le module de z.

1. Si $z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$, alors z^4 est un nombre réel.
2. Si $z + \overline{z} = 0$, alors $z = 0$.
3. Si $z + \frac{1}{z} = 0$, alors $z = \mathrm{i}$ ou $z = -\mathrm{i}$.
4. Si $|z| = 1$ et si $|z + z'| = 1$, alors $z' = 0$.

EXERCICE 2 **5 points**

Réservé aux candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

On lance un dé tétraédrique dont les quatre faces portent les nombres 1, 2, 3 et 4.

On lit le nombre sur la face cachée.

Pour $k \in \{1 ; 2 ; 3 ; 4)$, on note p_i la probabilité d'obtenr le nombre k sur laface cachée.

Le dé est déséquilibré de telle sorte que les nombres p_1, p_2, p_3 et p_4 dans cet ordre, forment une progression arithmétique.

1. Sachant que $p_4 = 0,4$ démontrer que $p_1 = 0,1$, $p_2 = 0,2$ et $p_3 = 0,3$.
2. On lance le dé trois lois de suite. On suppose que les lancers sont deux à deux indépendants.
   a. Quelle est la probabilité d'obtenir dans l'ordre les nombres 1, 2, 4 ?
   b. Quelle est la probabilité d'obtenir trois nombres distincts rangés dans l'ordre croissant ?

3. On lance 10 fois de suite le dé. On suppose les lancers deux à deux indépendants. On note X la variable aléatoire qui décompte le nombre de fois où le chiffre 4 est obtenu.

   a. Pour $1 \leqslant i \leqslant 10$, exprimer en fonction de i la probabilité de l'évènement $(X = i)$.

   b. Calculer l'espérance mathématique de X. Interpréter le résultat obtenu.

   c. Calculer la probabilité de l'évènement $(X \geqslant 1)$. On donnera une valeur arrondie au millième.

4. Soit n un entier naturel non nul. On lance n fois le dé, les lancers étant encore supposés indépendants deux à deux.
   On note U_n la probabilité d'obtenir pour la première fois le nombre 4 au n-ième lancer.

   a. Montrer que (U_n) est une suite géométrique et qu'elle est convergente.

   b. Calculer $S_n = \sum_{i=1}^{n} U_i$ puis étudier la convergence de la suite (S_n).

   c. Déterminer le plus petit entier n tel que $S_n > 0,999$.

EXERCICE 2 **5 points**

Réservé aux candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Le but de l'exercice est d'étudier certaines propriétés de divisibilité de l'entier $4^n - 1$, lorsque n est un entier naturel.

On rappelle la propriété connue sous le nom de petit théorème de Fermat : « si p est un nombre entier et a un entier naturel premier avec p, alors $a^{p-1} - 1 \equiv 0 \mod p$ ».

Partie A. Quelques exemples.

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, 4^n est congru à 1 modulo 3.
2. Prouver à l'aide du petit théorème de Fermat, que $4^{28} - 1$ est divisible par 29.
3. Pour $1 \leqslant n \leqslant 4$, déterminer le reste de la division de 4^n par 17. En déduire que, pour tout entier k, le nombre $4^{4k} - 1$ est divisible par 17.
4. Pour quels entiers naturels n le nombre $4^n - 1$ est-il divisible par 5 ?
5. À l'aide des questions précédentes. déterminer quatre diviseurs premiers de $4^{28} - 1$.

Partie B. Divisibilité par un nombre premier

Soit p un nombre premier différent de 2.

1. Démontrer qu'il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que $4^n \equiv 1 \mod p$.
2. Soit $n \geqslant 1$ un entier naturel tel que $4^n \equiv 1 \mod p$. On note b le plus petit entier strictement positif tel que $4^b \equiv 1 \mod p$ et r le reste de la division euclidienne de n par b.

   a. Démontrer que $4^r \equiv 1 \mod p$. En déduire que $r = 0$.

   b. Prouver L'équivalence : $4^n - 1$ est divisible par p si et seulement si n est multiple de b.

   c. En déduire que b divise $p - 1$.

EXERCICE 3 **6 points**

Commun à tous les candidats

On désigne par f la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe representative de f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, (unité graphique : 5 cm).

Partie A. Étude de la fonction f

1. Vérifier que pour tout nombre réel x : $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$.

Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel x. En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.

Dresser le tableau des variations de f.

Tracer la courbe $\mathscr{C}$ et ses asymptotes éventuelles dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Partie B. Quelques propriétés graphiques.

1. On considère les points M et M' de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives x et $-x$. Déterminer les coordonnées du milieu A du segment $[MM']$. Que représente le point A pour la courbe $\mathscr{C}$?

2. Soit n un entier naturel. On désigne par D_n le domaine du plan limité par la droite d'équation $y = 1$, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = n$, $\mathscr{A}_n$ désigne l'aire du domaine D_n exprimée en unité d'aire.

  a. Calculer $\mathscr{A}_n$.

  b. Étudier la limite éventuelle de $\mathscr{A}_n$, lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie C. Calcul d'un volume.

Soit λ un réel positif, On note $\mathscr{V}(\lambda)$ l'intégrale $\displaystyle\int_{-\lambda}^{0} \pi[f(x)]^2\,\mathrm{d}x$.

On admet que $\mathscr{V}(\lambda)$ est une mesure. exprimée en unité de volume, du volume engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses, de la portion de la courbe $\mathscr{C}$ obtenue pour $-\lambda \leqslant x \leqslant 0$.

1. Déterminer les nombres réels a et b tels que :

$$\text{pour tout nombre réel } x : \frac{\mathrm{e}^{2x}}{(\mathrm{e}^x+1)^2} = \frac{a\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1} + \frac{b\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}$$

2. Exprimer $\mathscr{V}(\lambda)$ en fonction de λ.

3. Déterminer la limite de $\mathscr{V}(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

EXERCICE 4 **5 points**

Commun à tous les candidats

ABCDEFGH est le cube d'arête 1 représenté sur la feuille annexe qui sera complétée et rendue avec la copie. L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(\mathrm{A}\,;\, \overrightarrow{\mathrm{AB}}\,;\, \overrightarrow{\mathrm{AD}},\, \overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$

Partie A. Un triangle et son centre de gravité.

1. Démontrer que le triangle BDE est équilatéral.

2. Soit I le centre de gravité du triangle BDE.

  a. Calculer les coordonnées de I.

  b. Démontrer que $\overrightarrow{\mathrm{AI}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AG}}$. Que peut-on en déduire pour les points A, I, G ?

3. Prouver que I est le projeté orthogonal de A sur le plan (BDE).

Partie B. Une droite particulière

Pour tout nombre réel k, on définit deux points M_k et N_k, ainsi qu'un plan $\mathcal{P}_k$ de la façon suivante :

- M_k est le point de la droite (AG) tel que $\overrightarrow{\text{A}M_k} = k\overrightarrow{\text{AG}}$;
- $\mathcal{P}_k$ est le plan passant par M_k et parallèle au plan (BDE) ;
- N_k est le point d'intersection du plan $\mathcal{P}_k$ et de la droite (BC).

1. Identifier $\mathcal{P}_{\frac{1}{3}}$, $M_{\frac{1}{3}}$ et $N_{\frac{1}{3}}$ en utilisant des points déjà définis. Calculer la distance $M_{\frac{1}{3}}N_{\frac{1}{3}}$.

2. Calcul des coordonnées de N_k.

a. Calculer les coordonnées de M_k dans le repère $\left(\text{A} ; \overrightarrow{\text{AB}} ; \overrightarrow{\text{AD}}, \overrightarrow{\text{AE}}\right)$.

b. Déterniner une équation du plan $\mathcal{P}_k$ dans ce repère.

c. En déduire que le point N_k a pour coordonnées $(1 ; 3k - 1 ; 0)$.

3. Pour quelles valeurs de k la droite (M_kN_k) est-elle orthogonale â la fois aux droites (AG) et (BC) ?

4. Pour quelles valeurs de k la distance M_kN_k est-elle minimale ?

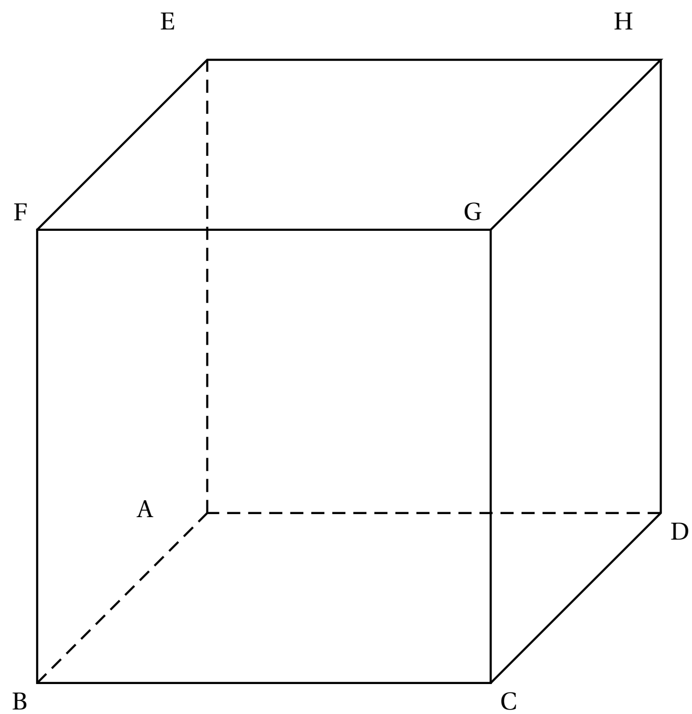
5. Tracer sur la figure donnée en annexe, la section du cube par le plan $\mathcal{P}_{\frac{1}{2}}$.

Tracer la droite $\left(M_{\frac{1}{2}}N_{\frac{1}{2}}\right)$ sur la même figure.

ANNEXE

Exercice 4 (commun à tous les candidats)

Feuille à compléter età rendre avec la copie



Baccalauréat S France 15 juin 2006

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Soit $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ un repère orthonormal de l'espace.

On considère les points

$$\mathrm{A}(2\,;\,4\,;\,1),\ \mathrm{B}(0\,;\,4\,;\,-3),\ \mathrm{C}(3\,;\,1\,;\,-3),\ \mathrm{D}(1\,;\,0\,;\,-2), \mathrm{E}(3\,;\,2\,;\,-1), \mathrm{I}\left(\frac{3}{5}\,;\,4\,;\,-\frac{9}{5}\right)$$

Pour chacune des cinq affirmations suivantes, dire, sans le justifier, si elle est vraie ou si elle est fausse. Pour chaque question, il est compté un point si la réponse est exacte et zéro sinon.

1. Une équation du plan (ABC) est : $2x+2y-z-11=0$.
2. Le point E est le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC).
3. Les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.
4. La droite (CD) est donnée par la représentation paramétrique suivante :

$$(\mathrm{CD})\quad \left\{\begin{array}{lcl} x &=& -1+2t\\ y &=& -1+t\\ z &=& 1-t\end{array}\right. \qquad (t\in\mathbb{R}).$$

5. Le point I est sur la droite (AB).

EXERCICE 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=x^2\mathrm{e}^{1-x}.$$

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

   a. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$; quelle conséquence graphique pour $\mathscr{C}$ peut-on en tirer ?

   b. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Déterminer sa fonction dérivée f'.

   c. Dresser le tableau de variations de f et tracer la courbe $\mathscr{C}$.

2. Soit n un entier naturel non nul. On considère l'intégrale I_n définie par

$$I_n=\int_0^1 x^n\mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x.$$

   a. Établir une relation entre I_{n+1} et I_n.

   b. Calculer I_1, puis I_2.

   c. Donner une interprétation graphique du nombre I_2. On la fera apparaître sur le graphique de la question 1 c.

3. **a.** Démontrer que pour tout nombre réel x de $[0\,;\,1]$ et pour tout entier naturel n non nul, on a l'inégalité suivante :

$$x^n\leqslant x^n\mathrm{e}^{1-x}\leqslant x^n\mathrm{e}.$$

   b. En déduire un encadrement de I_n puis la limite de I_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 3 **5 points**

Candidats n 'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère le plan complexe $\mathscr{P}$ rapporté à un repère orthononnal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
Dans tout l'exercice, $\mathscr{P}\backslash\{\text{O}\}$ désigne le plan $\mathscr{P}$ privé du point origine O.

1. **Question de cours**
   On prend comme pré-requis les résultats suivants :
   – Si z et z' sont deux nombres complexes non nuls, alors : $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$ à $2k\pi$ près, avec k entier relatif
   – Pour tout vecteur $\vec{w}$ non nul d'affixe z on a : $\arg(z) = \left(\vec{u}\ ;\ \vec{w}\right)$ à $2k\pi$ près, avec k entier relatif

   a. Soit z et z' des nombres complexes non nuls, démontrer que $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$ à $2k\pi$ près, avec k entier relatif.

   b. Démontrer que si A, B, C sont trois points du plan, deux à deux distincts, d'affixes respectives a, b, c, on a : $\arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right) = \left(\overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AC}}\right)$ à $2k\pi$ près, avec k entier relatif.

2. On considère l'application f de $\mathscr{P}\backslash\{\text{O}\}$ dans $\mathscr{P}\backslash\{\text{O}\}$ qui, au point M du plan d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = \dfrac{1}{\overline{z}}$. On appelle U et V les points du plan d'affixes respectives 1 et i.

   a. Démontrer que pour $z \neq 0$, on a $\arg\left(z'\right) = \arg(z)$ à $2k\pi$ près, avec k entier relatif.
   En déduire que, pour tout point M de $\mathscr{P}\backslash\{\text{O}\}$ les points M et $M' = f(M)$ appartiennent à une même demi-droite d'origine O.

   b. Déterminer l'ensemble des points M de $\mathscr{P}\backslash\{\text{O}\}$ tels que $f(M) = M$.

   c. M est un point du plan $\mathscr{P}$ distinct de O, U et V, on admet que M' est aussi distinct de O, U et V.
   Établir l'égalité $\dfrac{z'-1}{z'-\text{i}} = \dfrac{1}{\text{i}}\left(\dfrac{\overline{z}-1}{\overline{z}+\text{i}}\right) = -\text{i}\overline{\left(\dfrac{z-1}{z-\text{i}}\right)}$.
   En déduire une relation entre $\arg\left(\dfrac{z'-1}{z'-\text{i}}\right)$ et $\arg\left(\dfrac{z-1}{z-\text{i}}\right)$

3. **a.** Soit z un nombre complexe tel que $z \neq 1$ et $z \neq \text{i}$ et soit M le point d'affixe z. Démontrer que M est sur la droite (UV) privée de U et de V si et seulement si $\dfrac{z-1}{z-\text{i}}$ est un nombre réel non nul.

   b. Déterminer l'image par f de la droite (UV) privée de U et de V.

Exercice 3 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A : Question de cours

1. Énoncer le théorème de Bézout et le théorème de Gauss.
2. Démontrer le théorème de Gauss en utilisant le théorème de Bézout.

Partie B

Il s'agit de résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système

$$(S)\quad \left\{\begin{array}{lll} n & \equiv & 13 \quad (19) \\ n & \equiv & 6 \quad (12) \end{array}\right.$$

1. Démontrer qu'il existe un couple $(u\ ;\ v)$ d'entiers relatifs tel que : $19u+12v = 1$.
   (On ne demande pas dans cette question de donner un exemple d'un tel couple).
   Vérifier que, pour un tel couple, le nombre $N = 13 \times 12v + 6 \times 19u$ est une solution de (S).

2. a. Soit n_0 une solution de (S), vérifier que le système (S) équivaut à

$$\begin{cases} n \equiv n_0 & (19) \\ n \equiv n_0 & (12) \end{cases}$$

b. Démontrer que le système $\begin{cases} n \equiv n_0 & (19) \\ n \equiv n_0 & (12) \end{cases}$ équivaut à $n \equiv n_0 \quad (12 \times 19)$.

3. a. Trouver un couple $(u\,;\ v)$ solution de l'équation $19u + 12v = 1$ et calculer la valeur de N correspondante.

b. Déterminer l'ensemble des solutions de (S) (on pourra utiliser la question 2. b.).

4. Un entier naturel n est tel que lorsqu'on le divise par 12 le reste est 6 et lorsqu'on le divise par 19 le reste est 13.
On divise n par $228 = 12 \times 19$. Quel est le reste r de cette division ?

EXERCICE 4 **5 points**

Commun à tous les candidats

1. Dans un stand de tir, un tireur effectue des tirs successifs pour atteindre un ballon afin de le crever. À chacun de ces tirs, il a la probabilité $0,2$ de crever le ballon. Le tireur s'arrête quand le ballon est crevé. Les tirs successifs sont supposés indépendants.

   a. Quelle est la probabilité qu'au bout de deux tirs le ballon soit intact ?

   b. Quelle est la probabilité que deux tirs suffisent pour crever le ballon ?

   c. Quelle est la probabilité p_n que n tirs suffisent pour crever le ballon ?

   d. Pour quelles valeurs de n a-t-on $p_n > 0,99$?

2. Ce tireur participe au jeu suivant :
Dans un premier temps il lance un dé tétraédrique régulier dont les faces sont numérotées de 1 à 4 (la face obtenue avec un tel dé est la face cachée) ; soit k le numéro de la face obtenue. Le tireur se rend alors au stand de tir et il a droit à k tirs pour crever le ballon.
Démontrer que, si le dé est bien équilibré, la probabilité de crever le ballon est égale à 0,409 6 (on pourra utiliser un arbre pondéré).

3. Le tireur décide de tester le dé tétraédrique afin de savoir s'il est bien équilibré ou s'il est pipé. Pour cela il lance 200 fois ce dé et il obtient le tableau suivant :

Face k	1	2	3	4
Nombre de sorties de la face k	58	49	52	41

   a. Calculer les fréquences de sorties f_k observées pour chacune des faces.

   b. On pose $d^2 = \Sigma_{k=1}^{4}\left(f_k - \dfrac{1}{4}\right)^2$. Calculer d^2.

   c. On effectue maintenant 1 000 simulations des 200 lancers d'un dé tétraédrique bien équilibré et on calcule pour chaque simulation le nombre d^2. On obtient pour la série statistique des 1 000 valeurs de d^2 les résultats suivants :

Minimum	D_1	Q_1	Médiane	Q_3	D_9	Maximum
0,001 24	0,001 92	0,002 35	0,002 81	0,003 45	0,004 52	0,010 15

Au risque de 10 %, peut-on considérer que ce dé est pipé 7

Durée : 4 heures

Baccalauréat S La Réunion 15 juin 2006

EXERCICE 1 **4 points**
Commun à tous les candidats

Partie A
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1~;~+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x}{\ln x}$$

1. **a.** Déterminer les limites de la fonction f en 1 et en $+\infty$.
   b. Étudier les variations de la fonction f.
2. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n.
   a. On a tracé la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f sur la figure donnée en annexe qui sera rendue avec la copie. Construire la droite d'équation $y = x$ et les points M_1 et M_2 de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives u_1 et u_2. Proposer une conjecture sur le comportement de la suite (u_n).
   b. Démontrer que pour tout entier naturel n, on a $u_n \geqslant \text{e}$ (on pourra utiliser la question 1. b.).
   c. Démontrer que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ de l'intervalle $[\text{e}~;~+\infty[$.

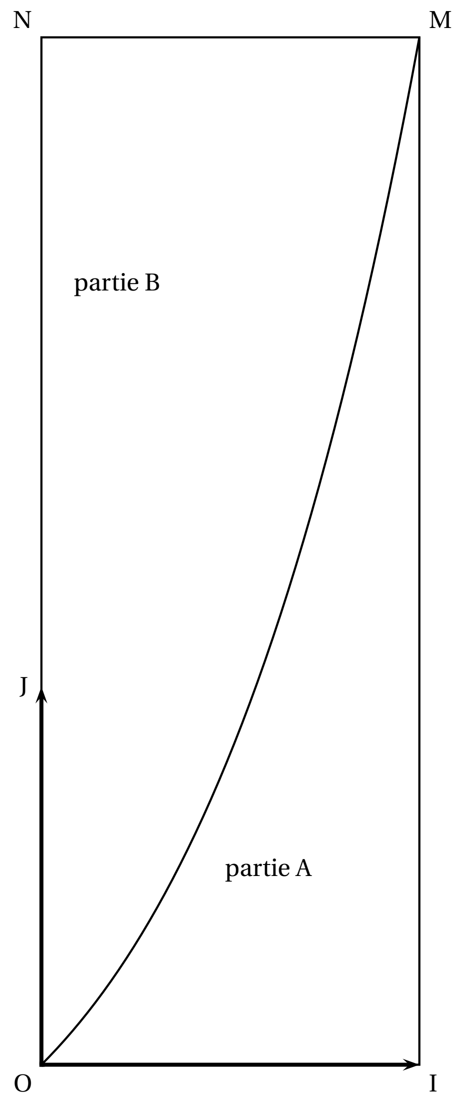
Partie B
On rappelle que la fonction f est continue sur l'intervalle $]1~;~+\infty[$.

1. En étudiant de deux manières la limite de la suite $\left(f(u_n)\right)$, démontrer que $f(\ell) = \ell$.
2. En déduire la valeur de ℓ.

EXERCICE 2 **6 points**
Commun à tous les candidats

Première partie
Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x\text{e}^x\,\text{d}x$.

Deuxième partie
La figure ci-dessous représente une cible rectangulaire OIMN telle que, dans le repère orthonormal $\left(\text{O}~;~\overrightarrow{\text{OI}},~\overrightarrow{\text{OJ}}\right)$, la ligne courbe $\mathscr{C}$ reliant le point O au point M est une partie de la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\text{e}^x$. Cette courbe partage la cible OIMN en deux parties A et B comme l'indique la figure ci-dessous.
Un jeu consiste à lancer une fléchette qui atteint soit l'extérieur de la cible, soit l'une des parties A ou B. On admet que la fléchette ne peut atteindre aucune des frontières de la cible, ni la courbe $\mathscr{C}$.



Une étude statistique a montré que la fléchette tombe à l'extérieur de la cible avec une probabilité de $\frac{1}{2}$ et que les probabilités d'atteindre les parties A et B sont proportionnelles à leurs aires respectives.

1. Démontrer que la probabilité d'atteindre la partie A est égale à $\frac{1}{2\text{e}}$.
Quelle est la probabilité d'atteindre la partie B ?

2. On lance de manière indépendante trois fléchettes.

a. Soit X la variable aléatoire qui est égale au nombre de fléchettes ayant atteint la partie A. Définir la loi de probabilité de X. En déduire la valeur exacte de son espérance mathématique.

b. Soit E l'évènement : « Exactement deux fléchettes atteignent la partie A ». Calculer une valeur approchée au millième de la probabilité de E.

c. Soit F l'évènement : « les trois fléchettes atteignent la partie B ». Calculer la probabilité de F (on donnera la valeur exacte).
Sachant qu'aucune fléchette n'a atteint l'extérieur de la cible, quelle est la probabilité que toutes les trois se trouvent dans la partie B ?

3. On lance cette fois de manière indépendante n fléchettes.

a. Déterminer en fonction de n la probabilitép pour qu'au moins une des fléchettes atteigne la partie A.

b. Déterminer le plus petit naturel n tel que $p_n \geqslant 0,99$.

EXERCICE 3 **5 points**

Candidats n 'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$. L'unité graphique est 2 cm.

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $+\dfrac{\pi}{2}$.

On réalisera une figure que l'on complétera au fur et à mesure des questions.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $\dfrac{z-4}{z} = \text{i}$. Écrire la solution sous forme algébrique.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z2 - 2z + 4 = 0$. Écrire les solutions sous forme exponentielle.
3. Soient A, B, A′ et D les points du plan complexe d'affixes respectives :

$$a = 2, \qquad b = 4, \qquad a' = 2\text{i} \quad \text{et} \quad d = 2 + 2\text{i}.$$

   Quelle est la nature du triangle 0DB ?
4. Soient E et F les points d'affixes respectives $e = 1 - \text{i}\sqrt{3}$ et $f = 1 + \text{i}\sqrt{3}$.
   Quelle est la nature du quadrilatère OEAF ?
5. Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre A et de rayon 2. Soit $\mathscr{C}'$ le cercle de centre A′ et de rayon 2.
   Soit r la rotation de centre O et d'angle $+\dfrac{\pi}{2}$
   a. On désigne par E′ l'image par la rotation r du point E. Calculer l'affixe e' du point E′.
   b. Démontrer que le point E′ est un point du cercle $\mathscr{C}'$.
   c. Vérifier que : $e - d = \left(\sqrt{3} + 2\right)\left(e' - d\right)$. En déduire que les points E, E′ et D sont alignés.
6. Soit D′ l'image du point D par la rotation r. Démontrer que le triangle EE′D′ est rectangle.

EXERCICE 3 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On complètera la figure donnée en annexe 2 *au fur et à mesure des questions, et on la rendra avec la copie.*

ABCD est un carré tel que $\left(\overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AD}}\right) = +\dfrac{\pi}{2}$. Soit I le centre du carré ABCD. Soit J le milieu du segment [CD].

On désigne par s la similitude directe qui transforme A en I et B en J.

Le but de l'exercice est d'étudier certaines propriétés de la similitude s. Dans la partie A *on utilisera des raisonnements géométriques ; dans la partie* B *on utilisera les nombres complexes.*

Partie A

1. Déterminer le rapport et l'angle de la similitude s.
2. On désigne par Ω le centre de cette similitude. Γ_1 est le cercle de diamètre [AI], Γ_2 est le cercle de diamètre [BJ]. Démontrer que Ω est l'un des points d'intersection de Γ_1 et Γ_2. Placer Ω sur la figure.
3. Donner l'image par s de la droite (BC). En déduire le point image par s du point C, puis le point K image par s du point I.
4. On pose $h = s \circ s$ (composée de s avec elle même).

a. Donner la nature de la transformation h (préciser ses éléments caractéristiques).

b. Trouver l'image du point A par h. En déduire que les points A, Ω et K sont alignés.

Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère $\left(\text{A} ~;~ \overrightarrow{u},~ \overrightarrow{v}\right)$ orthonormal direct, choisi de manière à ce que les points A, B, C et D aient comme affixes respectives 0, 2 , 2 + 2i et 2i.

1. Démontrer que l'écriture complexe de la similitudes est $z' = \dfrac{1}{2}\text{i}z + 1 + \text{i}$.
2. Calculer l'affixe du point Ω.
3. Calculer l'affixe du point E tel que $s(\text{E}) = \text{A}$. Placer le point E sur la figure.

EXERCICE 4 **4 points**

Commun à tous les candidats

Pour chacune des questions 1, 2, 3 et 4, ***parmi les quatre affirmations proposées, deux sont exactes et deux sont fausses****. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et les deux affirmations qu'il pense exactes. Aucune justification n'est demandée. Les quatre questions sont indépendantes et sont notées sur* 1 *point. Toute réponse juste rapporte* 0,5 *point. Donner plus de* 2 *réponses à une question entraîne la nullité de la question.*

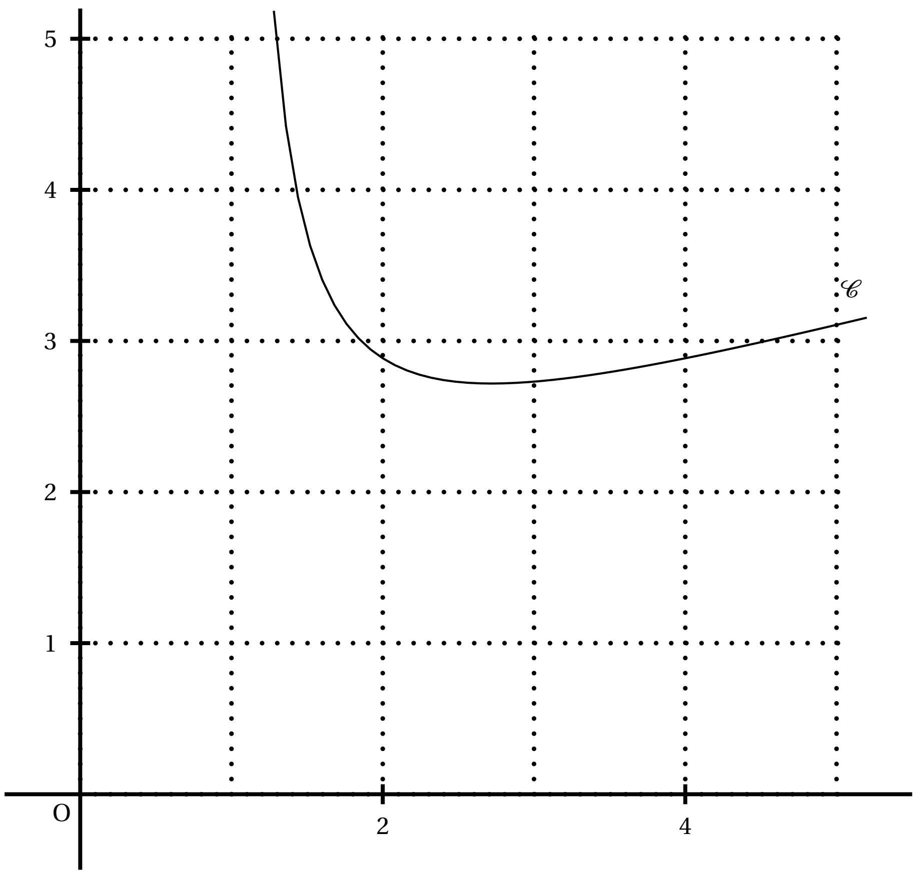
L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O},~ \overrightarrow{\imath},~ \overrightarrow{\jmath},~ \overrightarrow{k}\right)$.

1. Soit P le plan d'équation $2x + 3y + 4z - 1 = 0$.
   a. La distance du point O au plan P est égale à 1.
   b. La distance du point O au plan P est égale à $\dfrac{1}{\sqrt{29}}$.
   c. Le vecteur $\overrightarrow{n}\left(1~;~\dfrac{3}{2}~;~2\right)$ est un vecteur normal au plan P.
   d. Le plan Q d'équation $-5x + 2y + z = 0$ est parallèle au plan P.
2. On désigne par P le plan d'équation $2x + y - z = 0$, et par D la droite passant par le point A(1 ; 1 ; 1) et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ (1 ; −4 ; −2).
   a. La droite D est parallèle au plan P.
   b. La droite D est orthogonale au plan P.
   c. La droite D est sécante avec le plan P.
   d. Un système d'équations paramétriques de D est $\left\{\begin{array}{l c l} x &=& 1 + t\\ y &=& 1 - 4t\\ z &=& 1 - 2t \end{array}\right. \quad (t \in \mathbb{R})$.
3. On désigne par E l'ensemble des points $M(x~;~y~;~z)$ tels que : $x + y + z = 3$ et $2x - z = 1$. Soit le point A(1 ; 1 ; 1).
   a. L'ensemble E contient un seul point, le point A.
   b. L'ensemble E est une droite passant par A.
   c. L'ensemble E est un plan passant par A.
   d. L'ensemble E est une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ (1 ; −3 ; 2).
4. ABCD est un tétraèdre quelconque. Soit P le plan passant par A et orthogonal à la droite (BC).
   a. Le plan P contient toujours le point D.
   b. Le plan P contient toujours la hauteur (AH) du triangle ABC.
   c. Le plan P est toujours l'ensemble des points M de l'espace tels que :
   $$\overrightarrow{\text{B}M} \cdot \overrightarrow{\text{BC}} = \overrightarrow{\text{BA}} \cdot \overrightarrow{\text{BC}}.$$
   d. Le plan P est toujours le plan médiateur du segment [BC].

ANNEXE 1

À compléter et à rendre avec la copie

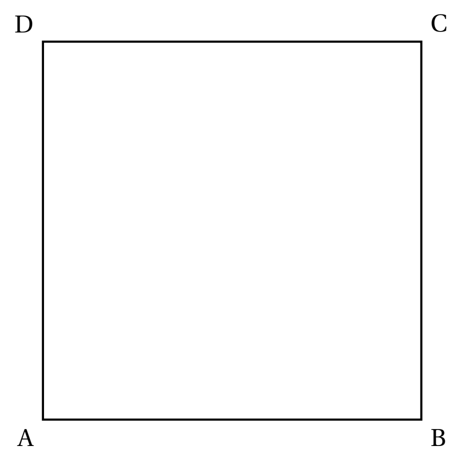
Figure de l'exercice 1



ANNEXE 2

À compléter et à rendre avec la copie

Figure de l'exercice 3



Baccalauréat S Liban mai 2006

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Dans l'espace muni d'un repére orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on donne les points A(2 ; 1 ; 3), B(−3 ; −1 ; 7) et C(3 ; 2 ; 4).

1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Soit (d) la droite de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l c l} x & = & -7+2t \\ y & = & -3t \\ z & = & 4+t \end{array}\right.$

   a. Montrer que la droite (d) est orthogonale au plan (ABC).

   b. Donner une équation cartésienne du plan (ABC).

3. Soit H le point commun À la droite (d) et au plan (ABC).

   a. Montrer que H est le barycentre de (A ; −2), (B ; −1) et (C ; 2).

   b. Déterminer la nature de l'ensemble Γ_1, des points M de l'espace tels que

   $$\left(-2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right) = 0$$

   En préciser les éléments caractéristiques.

   c. Déterminer la nature de l'ensemble Γ_2, des points M de l'espace tels que

   $$\left\| -2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} \right\| = \sqrt{29}$$

   En préciser les éléments caractéristiques.

   d. Préciser la nature et donner les éléments caractéristiques de l'intersection des ensembles Γ_1 et Γ_2.

   e. Le point S (−8 ; 1 ; 3) appartient-il À l'intersection des ensembles Γ_1 et Γ_2.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repére orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

On prendra 2 cm pour unité graphique.

Soit A le point d'affixe i et B le point d'affixe 2.

1. **a.** Déterminer l'affixe du point B_1 image de B par l'homothétie de centre A et de rapport $\sqrt{2}$.

   b. Déterminer l'affixe du point B′ image de B_1 par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

   Placer les points A, B et B′.

2. On appelle f la transformation du plan dans lui-même qui, À tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' tel que

   $$z' = (1+i)z + 1.$$

   a. Montrer que B a pour image B′ par f.

   b. Montrer que A est le seul point invariant par f.

c. établir que pour tout nombre complexe z distinct de i, $\dfrac{z'-z}{\text{i}-z} = -\text{i}$.
Interpréter ce résultat en termes de distances puis en termes d'angles.
En déduire une méthode de construction de M′ À partir de M, pour M distinct de A.

3. **a.** Donner la nature et préciser les éléments caractéristiques de l'ensemble Σ_1 des points M du plan dont l'affixe z vérifie $|z-2| = \sqrt{2}$.

b. Démontrer que $z' - 3 - 2\text{i} = (1+\text{i})(z-2)$.
En déduire que si le point M appartient À Σ_1, alors son image M' par f appartient À un cercle Σ_2, dont on précisera le centre et le rayon.

c. Tracer Σ_1 et Σ_2 sur la même figure que A, B et B′.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Dans le plan complexe muni du repére orthonormal direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$, on considére les points A d'affixe 3i et B d'affixe 6 ; unité graphique : 1 cm.

Partie A

1. Montrer qu'il existe une similitude directe et une seule qui transforme A en O et O en B. Préciser ses éléments caractéristiques.
2. Montrer qu'il existe une similitude indirecte et une seule qui transforme A en O et O en B.

Partie B

1. Soit f la transformation du plan dans lui-même qui, À tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe $z' = -2\text{i}\overline{z} + 6$ où $\overline{z}$ désigne le conjugué de z.
Montrer que f posséde un point invariant et un seul. On note K ce point.
2. Soit h l'homothétie de centre K et de rapport $\dfrac{1}{2}$.
On pose $g = f \circ h$.
   a. Montrer que g est une isométrie laissant invariant le point K.
   b. On désigne par M'' l'image du point M d'affixe z par la transformation g.
   Montrer que l'écriture complexe de g est $z'' = -\text{i}\overline{z} + 2 + 2\text{i}$ où z'' est l'affixe de M''.
   c. Montrer qu'il existe sur l'axe $\left(\text{O},\ \vec{v}\right)$ un unique point invariant par g ; on le note L.
   Reconnaître alors la transformation g.
   d. En déduire que la transformation f est la composée d'une homothétie h' suivie de la réflexion d'axe (KL). Préciser les éléments caractéristiques de h'.
3. Déterminer les droites Δ telles que $f(\Delta)$ et Δ soient paralléles.

EXERCICE 3 **7 points**

Commun à tous les candidats

Partie A : étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = x\ln(x+1).$$

Sa courbe représentative $(\mathscr{C})$ dans un repére orthogonal $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ est donnée en annexe.

1. **a.** Montrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;\ +\infty[$.

   b. L'axe des abscisses est-il tangent À la courbe $(\mathscr{C})$ au point O ?

2. On pose $\text{I} = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,\text{d}x$.

   a. Déterminer trois réels $a,\ b$ et c tels que, pour tout $x \neq -1$,

$$\frac{x^2}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1}.$$

   b. Calculer I.

3. À l'aide d'une intégration par parties et du résultat obtenu À la question 2, calculer, en unités d'aires, l'aire $\mathscr{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathscr{C})$ et les droites d'équations $x = 0,\ x = 1$ et $y = 0$.

4. Montrer que l'équation $f(x) = 0,25$ admet une seule solution sur l'intervalle $[0\,;\ 1]$. On note α cette solution. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Partie B : étude d'une suite

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \ln(x+1)\,\text{d}x$.

1. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
   La suite (u_n) converge-t-elle ?

2. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{\ln 2}{n+1}$.
   En déduire la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 4 **3 points**

Commun à tous les candidats

La durée de vie d'un robot, exprimée en années, jusqu'À ce que survienne la premiére panne est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramétre λ, avec $\lambda > 0$.

Ainsi, la probabilité qu'un robot tombe en panne avant l'instant t est égale À

$$p(X \leqslant t) = \int_0^t \lambda \text{e}^{-\lambda x}\,\text{d}x.$$

1. Déterminer λ, arrondi À 10^{-1} prés, pour que la probabilité $p(X > 6)$ soit égale À 0,3.
   Pour la suite de l'exercice, on prendra $\boldsymbol{\lambda = 0,2}$.

2. À quel instant t, À un mois prés, la probabilité qu'un robot tombe en panne pour la premiére fois est-elle de $0,5$?

3. Montrer que la probabilité qu'un robot n'ait pas eu de panne au cours des deux premiéres années est $\text{e}^{-0,4}$.

4. Sachant qu'un robot n'a pas eu de panne au cours des deux premiéres années, quelle est, À 10^{-2} prés, la probabilité qu'il soit encore en état de marche au bout de six ans ?

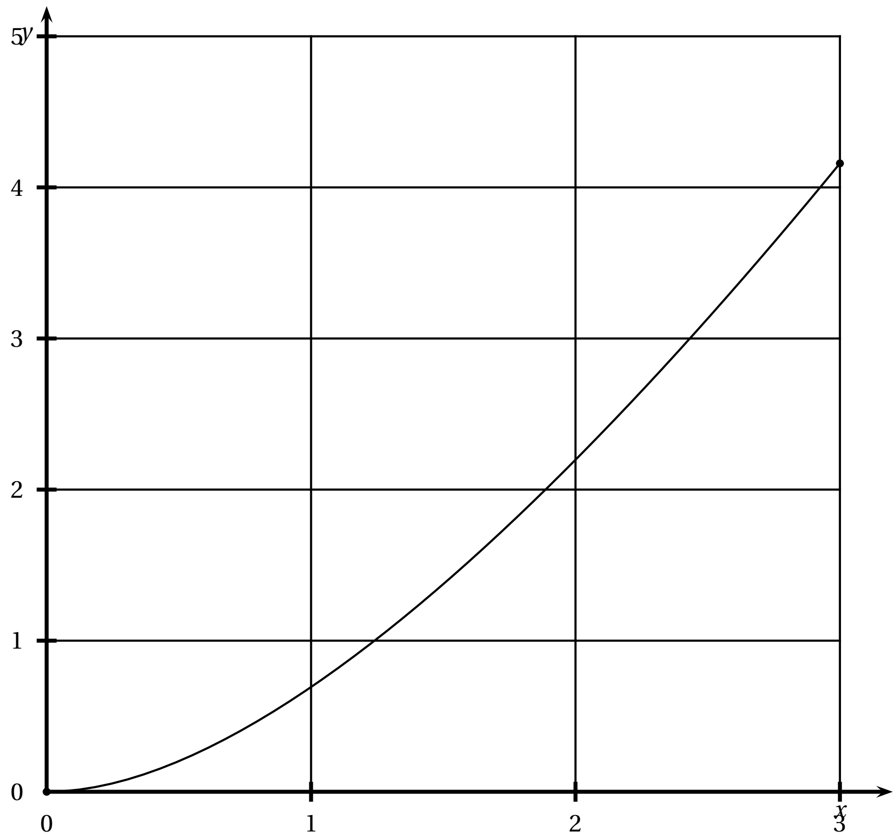
5. On considére un lot de 10 robots fonctionnant de maniére indépendante.
   Déterminer la probabilité que, dans ce lot, il y ait au moins un robot qui n'ait pas eu de panne au cours des deux premiéres années.

Annexe

Exercice3

Représentation graphique de la fonction f obtenue à l'aide d'un tableur

Courbe ($\mathscr{C}$)



∽ Baccalauréat S Polynésie juin 2006 ∾

Exercice 1 **5 points**

Le plan complexe est muni du repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$; unité graphique 2cm. On appelle A et B les points du plan d'affixes respectives $a = 1$ et $b = -1$. On considère l'application f qui, à tout point M différent du point B, d'affixe z, fait correspondre le point M' d'affixe z' définie par

$$z' = \frac{z-1}{z+1}$$

On fera une figure qui sera complétée tout au long de cet exercice.

1. Déterminer les points invariants de f c'est-à-dire les points M tels que $M = f(M)$.
2. **a.** Montrer que, pour tout nombre complexe z différent de -1, $\left(z'-1\right)(z+1) = -2$.

   b. En déduire une relation entre $\left|z'-1\right|$ et $|z+1|$, puis entre $\arg\left(z'-1\right)$ et $\arg(z+1)$, pour tout nombre complexe z différent de -1.
   Traduire ces deux relations en termes de distances et d'angles.
3. Montrer que si M appartient au cercle (C) de centre B et de rayon 2, alors M' appartient au cercle (C$'$) de centre A et de rayon 1.
4. Soit le point P d'affixe $p = -2 + \mathrm{i}\sqrt{3}$.

   a. Déterminer la forme exponentielle de $(p+1)$.

   b. Montrer que le point P appartient au cercle (C).

   c. Soit Q le point d'affixe $q = -\overline{p}$ où $\overline{p}$ est le conjugué de p.
   Montrer que les points A, P$'$ et Q sont alignés.

   d. En utilisant les questions précédentes, proposer une construction de l'image P$'$ du point P par l'application f.

Exercice 2 **5 points**

Pour chacune des cinq propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on donne les points A(0 ; 0 ; 2) B(0 ; 4 ; 0) et C(2 ; 0 ; 0).

On désigne par I le milieu du segment [BC], par G l'isobarycentre des points A, B et C, et par H le projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC).

Proposition 1 : « l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{\mathrm{A}M} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} = 0$ est le plan (AIO) ».

Proposition 2 : « l'ensemble des points M de l'espace tels que $\left\|\overrightarrow{M\mathrm{B}} + \overrightarrow{M\mathrm{C}}\right\| = \left\|\overrightarrow{M\mathrm{B}} - \overrightarrow{M\mathrm{C}}\right\|$ est la sphère de diamètre [BC] ».

Proposition 3 : « le volume du tétraèdre OABC est égal à 4 ».

Proposition 4 : « le plan (ABC) a pour équation cartésienne $2x + y + 2z = 4$ et le point H a pour coordonnées $\left(\frac{8}{9}\,;\,\frac{4}{9}\,;\,\frac{8}{9}\right)$.

Proposition 5 : « la droite (AG) admet pour représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& t \\ y &=& 2t \\ z &=& 2-2t \end{array}\right. \qquad (t \in \mathbb{R}) \text{ »}.$$

Exercice 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Pour chacune des cinq propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

Proposition 1 : « pour tout entier naturel n, 3 divise le nombre $2^{2n} - 1$ ».

Proposition 2 : « Si un entier relatif x est solution de l'équation $x^2 + x \equiv 0 \pmod 6$ alors $x \equiv 0 \pmod 3$ ».

Proposition 3 : « l'ensemble des couples d'entiers relatifs $(x\ ;\ y)$ solutions de l'équation $12x - 5y = 3$ est l'ensemble des couples $(4 + 10k\ ;\ 9 + 24k)$ où $k \in \mathbb{Z}$ ».

Proposition 4 : « il existe un seul couple $(a\ ;\ b)$ de nombres entiers naturels, tel que $a < b$ et $\text{PPCM}(a,\ b) - \text{PGCD}(a,\ b) = 1$ ».

Deux entiers naturels M et N sont tels que M a pour écriture abc en base dix et N a pour écriture bca en base dix.

Proposition 5 : « Si l'entier M est divisible par 27 alors l'entier $M - N$ est aussi divisible par 27 ».

Exercice 3 **4 points**

On a posé à 1 000 personnes la question suivante : « Combien de fois êtes-vous arrivé en retard au travail au cours des deux derniers mois ? ». Les réponses ont été regroupées dans le tableau suivant :

Retards le 1$^{\text{er}}$ mois / Retards le 2$^{\text{e}}$ mois	0	1	2 ou plus	Total
0	262	212	73	547
1	250	73	23	346
2 ou plus	60	33	14	107
Total	572	318	110	1000

1. On choisit au hasard un individu de cette population.
   - **a.** Déterminer la probabilité que l'individu ait eu au moins un retard le premier mois,
   - **b.** Déterminer la probabilité que l'individu ait eu au moins un retard le deuxième mois sachant qu'il n'en a pas eu le premier mois.
2. On souhaite faire une étude de l'évolution du nombre de retards sur un grand nombre n de mois (n entier naturel non nul). On fait les hypothèses suivantes :
   - si l'individu n'a pas eu de retard le mois n, la probabilité de ne pas en avoir le mois $n+1$ est 0,46.
   - si l'individu a eu exactement un retard le mois n, la probabilité de ne pas en avoir le mois $n+1$ est 0,66.
   - si l'individu a eu deux retards ou plus le mois n, la probabilité de ne pas en avoir le mois $n+1$ est encore 0,66.

   On note A_n, l'évènement « l'individu n'a eu aucun retard le mois n,
   B_n, l'évènement « l'individu a eu exactement un retard le mois n »,
   C_n, l'évènement « l'individu a eu deux retards ou plus le mois n ».
   Les probabilités des évènements A_n, B_n, C_n sont notées respectivement p_n, q_n et r_n.
   - **a.** Pour le premier mois ($n = 1$), les probabilités p_1, q_1 et r_1 sont obtenues à l'aide du tableau précédent. Déterminer les probabilités p_1, q_1 et r_1.
   - **b.** Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n, q_n, et r_n. On pourra s'aider d'un arbre.
   - **c.** Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = -0,2p_n + 0,66$.

d. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = p_n - 0,55$. Démontrer que (u_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison.

e. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$.

Exercice 4 **6 points**

Partie A

On donne le tableau de variations d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$4\mathrm{e}^{-2}$	$\searrow$	0

On définit la fonction F sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \int_2^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Déterminer les variations de la fonction F sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que $0 \leqslant F(3) \leqslant 4\mathrm{e}^{-2}$.

Partie B

La fonction f considérée dans la partie A est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2\mathrm{e}^{-x}$.

On appelle g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \mathrm{e}^{-x}$.

On désigne par $(\mathscr{C})$ et (Γ) les courbes représentant respectivement les fonctions f et g dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Les courbes sont tracées en annexe.

1. **a.** Montrer que les variations de la fonction f sont bien celles données dans la partie A. On ne demande pas de justifier les limites.

b. Étudier les positions relatives des courbes $(\mathscr{C})$ et (Γ).

2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \left(x^2 - 1\right)\mathrm{e}^{-x}$.

a. Montrer que la fonction H définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x) = \left(-x^2 - 2x - 1\right)\mathrm{e}^{-x}$ est une primitive de la fonction h sur $\mathbb{R}$.

b. Soit un réel α supérieur ou égal à 1.

On considère la partie du plan limitée par les courbes $(\mathscr{C})$ et (Γ) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \alpha$.

Déterminer l'aire $\mathscr{A}(a)$, exprimée en unité d'aire, de cette partie du plan.

c. Déterminer la limite de $\mathscr{A}(a)$ lorsque a tend vers $+\infty$.

3. On admet que, pour tout réel m strictement supérieur à $4\mathrm{e}^{-2}$, la droite d'équation $y = m$ coupe la courbe $(\mathscr{C})$ au point $P(x_P\,;\,m)$ et la courbe (Γ) au point $Q\left(x_Q\,;\,m\right)$.

L'objectif de cette question est de montrer qu'il existe une seule valeur de x_P, appartenant à l'intervalle $]-\infty\,;\,-1]$ telle que la distance PQ soit égale à 1.

a. Faire apparaître approximativement sur le graphique (proposé en annexe) les points P et Q tels que $x_P \in]-\infty\,;\,-1]$ et $PQ = 1$.

b. Exprimer la distance PQ en fonction de x_P et de x_Q.

Justifier l'égalité $f(x_P) = g\left(x_Q\right)$.

c. Déterminer la valeur de x_P telle que $PQ = 1$.

Annexe

Cette page sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve

Exercice 4