Baccalauréat S 2007

L'intégrale de septembre 2006 à juin 2007

Pour un accès direct cliquez sur les liens bleus

∾ Baccalauréat S France septembre 2006 ∾

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

La scène se passe en haut d'une falaise au bord de la mer. Pour trouver une plage et aller se baigner, les touristes ne peuvent choisir qu'entre deux plages, l'une à l'Est et l'autre à l'Ouest.

A - Un touriste se retrouve deux jours consécutifs en haut de la falaise. Le premier jour, il choisit au hasard l'une des deux directions. Le second jour, on admet que la probabilité qu'il choisisse une direction opposée à celle prise la veille vaut 0,8.
Pour $i = 1$ ou $i = 2$, on note E_i l'évènement : « Le touriste se dirige vers l'Est le i-ème jour » et O_i l'évènement : « Le touriste se dirige vers l'Ouest le i-ème jour ».

1. Dresser un arbre de probabilités décrivant la situation.
2. Déterminer les probabilités suivantes : $p(\mathrm{E}_1)$; $p_{\mathrm{E}_1}(\mathrm{O}_2)$; $p(\mathrm{E}_1 \cap \mathrm{E}_2)$.
3. Calculer la probabilité que ce touriste se rende sur la même plage les deux jours consécutifs.

B - On suppose maintenant que n touristes ($n \geqslant 3$) se retrouvent un jour en haut de la falaise. Ces n touristes veulent tous se baigner et chacun d'eux choisit au hasard et indépendamment des autres l'une des deux directions.
On note X la variable aléatoire donnant le nombre de ces touristes qui choisissent la plage à l'Est.

1. Déterminer la probabilité que k touristes ($0 \leqslant k \leqslant n$) partent en direction de l'Est.
2. On suppose ici que les deux plages considérées sont désertes au départ. On dit qu'un touriste est *heureux* s'il se retrouve seul sur une plage.
   a. Peut-il y avoir deux touristes heureux ?
   b. Démontrer que la probabilité (notée p) qu'il y ait un touriste *heureux* parmi ces n touristes vaut : $p = \dfrac{n}{2^{n-1}}$.
   c. **Application numérique :**
   Lorsque le groupe comprend 10 personnes, exprimer la probabilité, arrondie au centième, qu'il y ait un touriste heureux parmi les 10.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans le plan complexe muni du repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère les points M et M' d'affixes respectives z et z'. On pose $z = x + \text{i}y$ et $z' = x' + \text{i}y'$, où x, x', y, y' sont des nombres réels.
On rappelle que $\overline{z}$ désigne le conjugué de z et que $|z|$ désigne le module de z.

1. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{\text{O}M}$ et $\overrightarrow{\text{O}M'}$ sont orthogonaux si et seulement si $\text{Re}(z'\overline{z}) = 0$.
2. Montrer que les points O, M et M' sont alignés si et seulement si $\text{lm}(z'\overline{z}) = 0$.

Applications

3. N est le point d'affixe $z^2 - 1$. Quel est l'ensemble des points M tels que les vecteurs $\overrightarrow{\text{O}M}$ et $\overrightarrow{\text{O}N}$ soient orthogonaux ?
4. On suppose z non nul. P est le point d' affixe $\dfrac{1}{z^2} - 1$.
   On recherche l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points O, N et P soient alignés.
   a. Montrer que $\left(\dfrac{1}{z^2} - 1\right)\left(\overline{z^2 - 1}\right) = -\overline{z}^2\left|\dfrac{1}{z^2} - 1\right|^2$.
   b. En utilisant l'équivalence démontrée au début de l'exercice, conclure sur l'ensemble recherché.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. On considère l'équation

$$(\mathscr{E}) \quad : \quad 17x - 24y = 9,$$

où $(x,\ y)$ est un couple d'entiers relatifs.

a. Vérifier que le couple (9 ; 6) est solution de l'équation $(\mathscr{E})$.

b. Résoudre l'équation $(\mathscr{E})$.

2. Dans une fête foraine, Jean s'installe dans un un manège circulaire représenté par le schéma de l'annexe 2. Il peut s'installer sur l'un des huit points indiqués sur le cercle.
Le manège comporte un jeu qui consiste à attraper un pompon qui, se déplace sur un câble formant un carré dans lequel est inscrit le cercle. Le manège tourne dans le sens des aiguilles d'une montre, à vitesse constante. Il fait un tour à vitesse constante. Il fait un tour en 24 secondes. Le pompon se déplace dans le même sens à vitesse constante. Il fait un tour en 17 secondes.
Pour gagner, Jean doit attraper le pompon, et il ne peut le faire qu'aux points de contact qui sont notés A, B, C et D sur le dessin.
À l'instant $t = 0$, Jean part du point H en même temps que le pompon part du point A.

a. On suppose qu'à un certain instant t Jean attrape le pompon en A. Jean a déjà pu passer un certain nombre de fois en A sans y trouver le pompon. À l'instant t, on note y le nombre de tours effectués depuis son premier passage en A et x le nombre de tours effectués par le pompon. Montrer que $(x,\ y)$ est solution de l'équation $(\mathscr{E})$ de la question 1.

b. Jean a payé pour 2 minutes ; aura-t-il le temps d'attraper le pompon ?

c. Montrer, qu'en fait, il n'est possible d'attraper le pompon qu'au point A.

d. Jean part maintenant du point E. Aura-t-il le temps d'attraper le pompon en A avant les deux minutes ?

EXERCICE 3 **6 points**

Commun à tous les candidats

Dans tout l'exercice, λ désigne un nombre réel de l'intervalle $]0 ; 1]$.

1. On se propose d'étudier les fonctions dérivables sur $\left]-\infty ; \dfrac{1}{2}\right[$ vérifiant l'équation différentielle (E_λ) : $y' = y^2 + \lambda y$ et la condition $y(0) = 1$.
   On suppose qu'il existe une solution y_0 de (E_λ) strictement positive sur $\left]-\infty ; \dfrac{1}{2}\right[$ et on pose sur $\left]-\infty ; \dfrac{1}{2}\right[$: $z = \dfrac{1}{y_0}$
   Écrire une équation différentielle simple satisfaite par la fonction z.
2. **Question de cours**
   PRÉ-REQUIS
   Les solutions de l'équation différentielle $y' = -\lambda y$ sont les fonctions $x \mapsto C\mathrm{e}^{-\lambda x}$ où C est une constante réelle.
   a. Démontrer l'existence et l'unicité de la solution z de l'équation différentielle (E'_λ) : $z' = -(\lambda z + 1)$ telle que $z(0) = 1$.
   b. Donner l'expression de cette fonction que l'on notera z_0.

On veut maintenant montrer que la fonction z_0 *ne s'annule pas sur l'intervalle* $\left]-\infty ; \dfrac{1}{2}\right[$.

3. **a.** Démontrer que $\ln(1 + \lambda) > \dfrac{\lambda}{\lambda + 1}$.
   On pourra étudier sur $]0 ; 1]$ *la fonction* f *définie par* $f(x) = \ln(1 + x) - \dfrac{x}{x + 1}$.
   b. En déduire que $\dfrac{1}{\lambda}\ln(1 + \lambda) > \dfrac{1}{2}$.
4. En déduire que la fonction z_0 ne s'annule pas sur $\left]-\infty ; \dfrac{1}{2}\right[$.
   Démontrer alors que (E_λ) admet une solution strictement positive sur $\left]-\infty ; \dfrac{1}{2}\right[$ que l'on précisera.

EXERCICE 4 **6 points**

Commun à tous les candidats

On considère dans l'espace un cube de 3 cm de côté, noté ABCDEFGH et représenté sur l'annexe.
Soit I le barycentre des points pondérés (E ; 2) et (F ; 1), J celui de (F ; 1) et (B ; 2) et enfin K celui de (G ; 2) et (C ; 1).

On veut déterminer l'ensemble des points M équidistants de I, J *et* K. *On note* Δ *cet ensemble.*

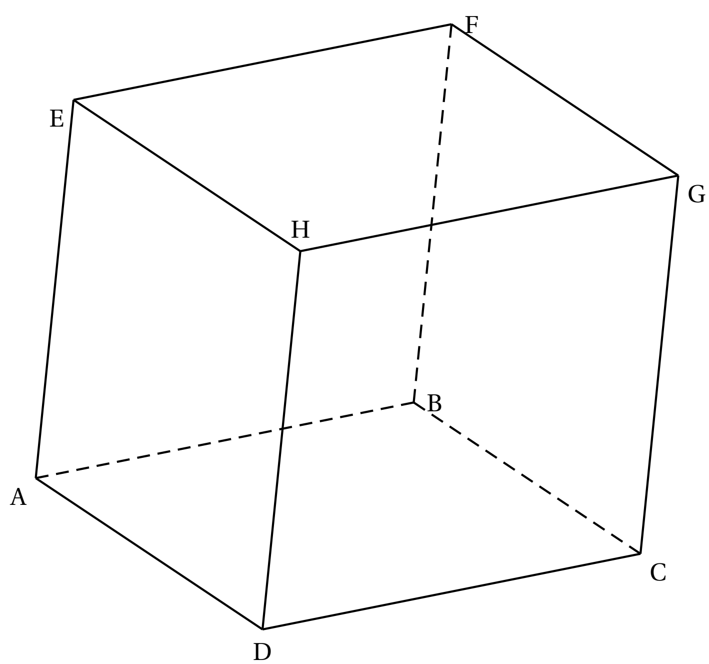
1. Placer les points I, J et K sur la figure de **l'annexe qui sera rendue avec la copie.**
2. Soit Ω le point de Δ situé dans le plan (IJK). Que représente ce point pour le triangle IJK ?

   Pour la suite de l'exercice, on se place maintenant dans le repère orthonormal suivant : $\left(\text{A}\,;\,\frac{1}{3}\overrightarrow{\text{AD}}\,;\,\frac{1}{3}\overrightarrow{\text{AB}}\,;\,\frac{1}{3}\overrightarrow{\text{AE}}\right)$.
3. Donner les coordonnées des points I, J et K.
4. Soit P(2 ; 0 ; 0) et Q(1 ; 3 ; 3) deux points que l'on placera sur la figure. Démontrer que la droite (PQ) est orthogonale au plan (IJK).
5. Soit M un point de l'espace de coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$.
   - **a.** Démontrer que M appartient à Δ si, et seulement si, le triplet $(x\,;\,y\,;\,z)$ est solution d'un système de deux équations linéaires que l'on écrira. Quelle est la nature de Δ ?
   - **b.** Vérifier que P et Q appartiennent à Δ. Tracer Δ sur la figure.
6.
   - **a.** Déterminer un vecteur normal au plan (IJK) et en déduire une équation cartésienne de ce plan.
   - **b.** Déterminer alors les coordonnées exactes de Ω.

ANNEXE 1

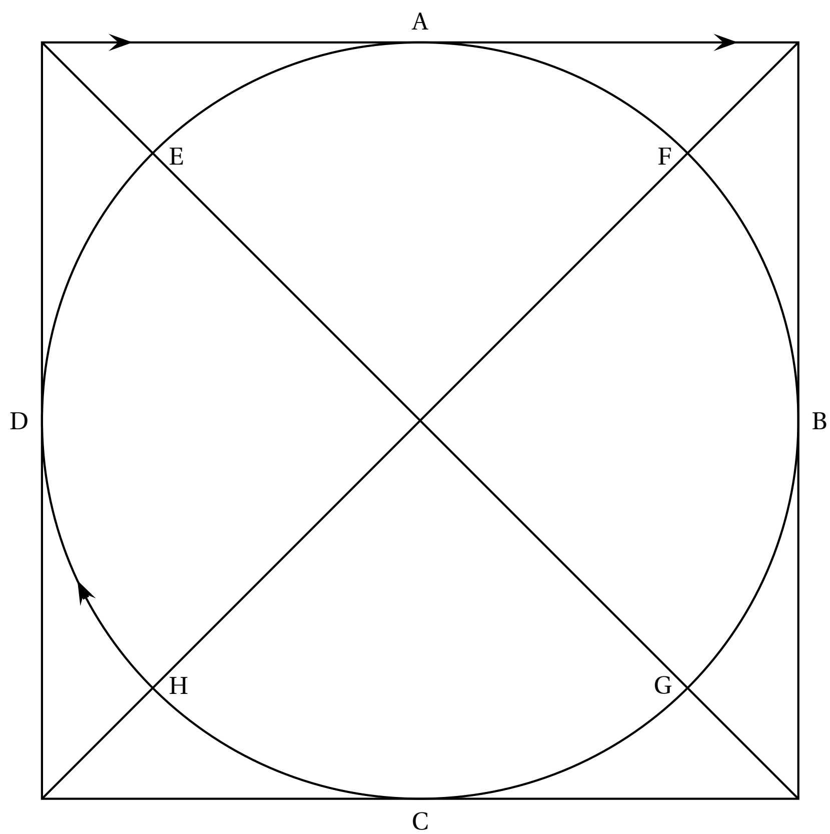
À RENDRE AGRAFÉE À LA COPIE

Figure de l'exercice 4



ANNEXE 2

Schéma de l'exercice 2



Durée : 4 heures

Baccalauréat S Polynésie septembre 2006

Exercice 1 **4 points**

1. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On pose $a = 3$, $b = 5-2\text{i}$ et $c = 5+2\text{i}$. On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives a, b et c.
Soit M un point d'affixe z du plan, distinct des points A et B.
   a. Montrer que ABC est un triangle rectangle isocèle.
   b. Donner une interprétation géométrique de l'argument du nombre complexe $\dfrac{z-3}{z-5+2\text{i}}$.
   c. Déterminer alors l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\dfrac{z-3}{z-5+2\text{i}}$ soit un nombre réel strictement négatif.
2. Soit Γ le cercle circonscrit au triangle ABC et Ω le point d'affixe $2-\text{i}$.
   a. Donner l'écriture complexe de la rotation r de centre Ω et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.
   b. Déterminer l'image Γ' de Γ par la rotation r. Déterminer une équation paramétrique de Γ'.

Exercice 2 **4 points**

Une urne contient 4 houles blanches et 2 boules noires indiscernables au toucher.

1. On effectue trois tirages successifs au hasard d'une boule selon la procédure suivante : après chaque tirage si la boule tirée est blanche, on la remet dans l'urne et si elle est noire, on ne la remet pas dans l'urne. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de boules noires obtenues à l'issue des trois tirages. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
   a. Quelles sont les valeurs prises par X ?
   b. Calculer $P(X = 0)$.
   c. On se propose de déterminer maintenant $P(X = 1)$.
   – Montrer que la probabilité que la seule boule noire tirée soit obtenue au second tirage est égale à $\dfrac{8}{45}$.
   – En remarquant que la seule boule noire peut être tirée soit au premier, soit au deuxième, soit au troisième tirage, calculer $P(X = 1)$.
2. On reprend l'urne dans sa composition initiale : 4 boules blanches et 2 boules noires indiscernables au toucher. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
On effectue maintenant n tirages successifs au hasard d'une boule dans l'urne selon la même procédure : après chaque tirage, si la boule tirée est blanche, on la remet dans l'urne et si elle est noire, on ne la remet pas dans l'urne.
Soit k un entier compris entre 1 et n.
Soit N l'évènement : « la k-ième boule tirée est noire et toutes les autres sont blanches ».
Soit A l'évènement : « on obtient une boule blanche dans chacun des $k-1$ premiers tirages et une boule noire au k-ième ».
Soit B l'évènement : « on obtient une boule blanche dans chacun des $(n-k)$ derniers tirages ».
Calculer $P(\text{A})$, $P_{\text{A}}(\text{B})$ et $P(\text{N})$.

EXERCICE 3 **7 points**

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \left(2x^3 - 4x^2\right)\text{e}^{-x}.$$

a. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

b. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = 2x\left(-x^2 + 5x - 4\right)\text{e}^{-x}$.

c. Dresser le tableau de variations de f.

d. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ représentative de f dans un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 1 cm).

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$I_n = \int_0^1 x^n \text{e}^{-x}\,\text{d}x.$$

a. À l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1.

b. On admet que, pour tout n supérieur ou égal à 2, $I_n = nI_{n-1} - \dfrac{1}{\text{e}}$.
Déterminer 1_2 et 1_3.

c. Soit $\mathscr{A}$ l'aire, exprimée en cm^2, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $(\mathscr{C})$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$. Calculer $\mathscr{A}$.

3. Soit u une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
On définit la fonction v sur $]0~;~+\infty[$ par $v(x) = u\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

a. On suppose que u est croissante sur l'intervalle $[a~;~b]$ (où $0 < a < b$).
Déterminer le sens de variation de v sur $\left[\dfrac{1}{b}~;~\dfrac{1}{a}\right]$.

b. On définit maintenant la fonction g par $g(x) = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ sur $]0~;~+\infty[$, où f est la fonction définie dans la question 1.
Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$,

c. Déduire des questions précédentes le tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

EXERCICE 4 **5 points**

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
Soit (P_1) le plan d'équation cartésienne $-2x + y + z - 6 = 0$ et (P_2) le plan d'équation cartésienne $x - 2y + 4z - 9 = 0$.

1. Montrer que (P_1) et (P_2) sont perpendiculaires.
On rappelle que deux plans sont perpendiculaires si et seulement si un vecteur normal non nul à l'un est orthogonal à un vecteur normal non nul à l'autre.

2. Soit (D) la droite d'intersection de (P_1) et (P_2).
Montrer qu'une représentation paramétrique de (D) est :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & -7 + 2t \\ y & = & -8 + 3t \\ z & = & t \end{array}\right. \quad (t \in \mathbb{R}).$$

3. Soit M un point quelconque de (D) de paramètre t et soit A le point de coordonnées $(-9~;~-4~;~-1)$.

a. Vérifier que A n'appartient ni à (P_1), ni à (P_2).

b. Exprimer AM^2 en fonction de t.

c. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = 2t^2 - 2t + 3$.
- Étudier les variations de f.
- Pour quel point M, la distance AM est-elle minimale ?
  Dans la suite, on désignera ce point par I.
- Préciser les coordonnées du point I.

4. Soit (Q) le plan orthogonal à (D) passant par A.

a. Déterminer une équation de (Q).

b. Démontrer que I est le projeté orthogonal de A sur (D).

Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat S Amérique du Sud novembre 2006 ∽

EXERCICE 1 **3 points**

Commun à tous les candidats

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les points :

A de coordonnées $(3\ ;\ 1\ ;\ -5)$, B de coordonnées $(0\ ;\ 4\ ;\ -5)$, C de coordonnées $(-1\ ;\ 2\ ;\ -5)$ et D de coordonnées $(2\ ;\ 3\ ;\ 4)$.

Pour chacune des six affirmations ci-dessous, préciser si elle est vraie ou fausse. Aucune justification n'est demandée. Le candidat doit indiquer sur sa copie le numéro de la question et la mention « VRAI » *ou* « FAUX ». *On attribue* 0,5 *point par réponse correcte et on retranche* 0,25 *point par réponse incorrect.*

L'absence de réponse n'est pas pénalisée. Un éventuel total négatif est ramené à 0.

1. Les points A, B et D sont alignés.
2. La droite (AB) est contenue dans le plan d'équation cartésienne : $x + y = 4$.
3. Une équation cartésienne du plan (BCD) est : $18x - 9y - 5z + 11 = 0$.
4. Les points A, B, C et D sont coplanaires.
5. La sphère de centre A et de rayon 9 est tangente au plan (BCD).
6. Une représentation paramétrique de la droite (BD) est :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1-2k \\ y &=& \dfrac{7}{2}+k, \\ z &=& -\dfrac{1}{2}-9k \end{array}\right. \quad k \in \mathbb{R}$$

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On prendra pour unité graphique I cm.

1. *Question de cours*

   On rappelle que : « Pour tout vecteur $\vec{w}$ non nul, d'affixe z on a : $|z| = \|\vec{w}\|$ et $\arg(z) = \left(\vec{u}, \vec{w}\right)$ ».

   Soient M, N et P trois points du plan, d'affixes respectives m, n et p tels que $m \neq n$ et $m \neq p$.

   a. Démontrer que : $\arg\left(\dfrac{p-m}{n-m}\right) = \left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}\right)$.

   b. Interpréter géométriquement le nombre $\left|\dfrac{p-m}{n-m}\right|$

2. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives

$$z_{\text{A}} = 4+\text{i}, \quad z_{\text{B}} = 1+\text{i}, \quad z_{\text{C}} = 5\text{i} \text{ et } z_{\text{D}} = -3-\text{i}.$$

   Placer ces points sur une figure.

3. Soit f l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = (1+2\text{i})z - 2 - 4\text{i}.$$

a. Préciser les images des points A et B par f.

b. Montrer que f admet un unique point invariant Ω, dont on précisera l'affixe ω.

4. **a.** Montrer que pour tout nombre complexe z, on a :

$$z' - z = -2\mathrm{i}(2 - \mathrm{i} - z).$$

b. En déduire, pour tout point M différent du point Ω, la valeur de $\dfrac{MM'}{\Omega M}$ et une mesure en radians de l'angle $\left(\overrightarrow{M\Omega}\,,\ \overrightarrow{MM'}\right)$

c. Quelle est la nature du triangle $\Omega MM'$?

d. Soit E le point d'affixe $z_{\mathrm{E}} = -1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$. Écrire z_{E} sous forme exponentielle puis placer le point E sur la figure. Réaliser ensuite la construction du point E′ associé au point E.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Rappel :

Pour deux entiers relatifs a et b, on dit que a est congru à b modulo 7, et on écrit $a \equiv b \mod 7$ lorsqu'il existe un entier relatif k tel que $a = b + 7k$.

1. *Cette question constitue une restitution organisée de connaissances*

a. Soient a, b, c et d des entiers relatifs.
Démontrer que : si $a \equiv b \mod 7$ et $c \equiv d \mod 7$ alors $ac \equiv bd \mod 7$.

b. En déduire que : pour a et b entiers relatifs non nuls
si $a \equiv b \mod 7$ alors pour tout entier naturel n, $a^n \equiv b^n \mod 7$.

2. Pour $a = 2$ puis pour $a = 3$, déterminer un entier naturel n non nul tel que $a^n \equiv 1 \mod 7$.

3. Soit a un entier naturel non divisible par 7.

a. Montrer que : $a^6 \equiv 1 \mod 7$.

b. On appelle *ordre* de $a \mod 7$, et on désigne par k, le plus petit entier naturel non nul tel que $a^k \equiv 1 \mod 7$. Montrer que le reste r de la division euclidienne de 6 par k vérifie $a^r \equiv 1 \mod 7$.
En déduire que k divise 6.
Quelles sont les valeurs possibles de k ?

c. Donner l'ordre modulo 7 de tous les entiers a compris entre 2 et 6.

4. À tout entier naturel n, on associe le nombre

$$A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n.$$

Montrer que $A_{2006} \equiv 6 \mod 7$.

EXERCICE 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

Un jardinier dispose de deux lots 1 et 2 contenant chacun de très nombreux bulbes donnant des tulipes de couleurs variées.

La probabilité pour qu'un bulbe du lot 1 donne une tulipe jaune est égale à $\dfrac{1}{4}$.

La probabilité pour qu'un bulbe du lot 2 donne une tulipe jaune est égale à $\dfrac{1}{2}$.

Ce jardinier choisit au hasard un lot et plante 50 bulbes de tulipes.

Soit n un entier naturel vérifiant $0 \leqslant n \leqslant 50$.

Dn définit les évènements suivants :

– A : « le jardinier a choisi le lot 1 »
– B : « le jardinier a choisi le lot 2 »
– J_n : « le jardinier obtient n tulipes jaunes ».

1. Dans cette question, on suppose que le jardinier choisit le lot 1.

a. Quelle loi de probabilité suit le nombre de tulipes jaunes obtenues à partir de 50 bulbes du lot 1 ?

b. Quelle est l'espérance mathématique de cette loi ?

c. Donner une expression de la probabilité que le jardinier obtienne n tulipes jaunes,

d. Calculer la probabilité que le jardinier obtienne 15 tulipes jaunes. On donnera l'arrondi au millième du résultat.

2. Probabilités conditionnelles

a. Montrer que : $P_{\mathrm{B}}\left(J_n\right) = \binom{50}{n}2^{-50}$.

b. En déduire la probabilité que le jardinier obtienne n tulipes jaunes.

c. On note p_n la probabilité conditionnelle de l'évènement A sachant que J_n est réalisé. Établir que :

$$p_n = \frac{3^{50-n}}{3^{50-n}+2^{50}}.$$

d. Pour quelles valeurs de n a-t-on $p_n \geqslant 0,9$?
Comment peut-on interpréter ce résultat ?

EXERCICE 4 **8 points**
Commun à tous les candidats

1. Pour tout entier naturel n non nul, on considère la fonction f_n définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f_n(x) = \ln x + \frac{x}{n} - 1.$$

a. Déterminer les limites de f_n en 0 et en $+\infty$ puis étudier le sens de variations de f_n.

b. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $]0\,;\,+\infty[$. On note α_n cette solution. Montrer qu'elle appartient à l'intervalle $[1\,;\,\mathrm{e}]$.

2. Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. On note (Γ) la courbe représentative de la fonction logarithme népérien.

a. Soit n un entier naturel non nul. Déterminer une équation de la droite Δ_n passant par le point A de coordonnées $(0\,;\,1)$ et le point B_n de coordonnées $(n\,;\,0)$.

b. Faire un croquis représentant la courbe (Γ) et les droites Δ_1, Δ_2 et Δ_3.

c. Montrer que α_n est l'abscisse du point d'intersection de (Γ) avec Δ_n.

d. Préciser la valeur de α_1 puis faire une conjecture sur le sens de variation de la suite (α_n).

3. **a.** Exprimer $\ln(\alpha_n)$ en fonction de n et de α_n.

b. Exprimer $f_{n+1}(\alpha_n)$ en fonction de n et de α_n et vérifier que :
$f_{n+1}(\alpha_n) < 0$.

c. Déduire de la question précédente le sens de variation de la suite (α_n).

d. Montrer que la suite (α_n) converge. On note ℓ sa limite. Établir que : $\ln \ell = 1$ et en déduire la valeur de ℓ.

4. On désigne par $\mathscr{D}_n$ le domaine délimité par la courbe (Γ), l'axe des abscisses et les droites d'équation : $x = \alpha_n$ et $x = \mathrm{e}$.
   a. Calculer l'aire du domaine $\mathscr{D}_n$ en fonction de α_n et montrer que cette aire est égaie à $\dfrac{\alpha_n^2}{n}$.
   b. Établir que :
   $$(\mathrm{e} - \alpha_n) \ln \alpha_n \leqslant \frac{\alpha_n^2}{n} \leqslant (\mathrm{e} - \alpha_n).$$
   c. En déduire un encadrement de $n(\mathrm{e} - \alpha_n)$.
   d. La suite de terme général $n(\mathrm{e} - \alpha_n)$ est-elle convergente ? Ce résultat permet-il d'apprécier la rapidité de la convergence de la suite (α_n) ?

Durée : 4 heures

Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie novembre 2006

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Une maladie est apparue dans le cheptel bovin d'un pays. Elle touche 0,5 % de ce cheptel (ou 5 pour mille).

1. On choisit au hasard un animal dans le cheptel. Quelle est la probabilité qu'il soit malade ?
2. **a.** On choisit successivement et au hasard 10 animaux. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre d'animaux malades parmi eux.
   Montrer que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
   Calculer son espérance mathématique.

   b. On désigne par A l'évènement « aucun animal n'est malade parmi les 10 ».
   On désigne par B l'évènement « au moins un animal est malade parmi les 10 ».
   Calculer les probabilités de A et de B
3. On sait que la probabilité qu'un animal ait un test positif à cette maladie sachant qu'il est malade est $0,8$. Lorsqu'un animal n'est pas malade, la probabilité d'avoir un test négatif est $0,9$. On note T l'évènement « avoir un test positif à cette maladie » et M l'évènement « être atteint de cette maladie ».

   a. Représenter par un arbre pondéré les données de l'énoncé.

   b. Calculer la probabilité de l'évènement T.

   c. Quelle est la probabilité qu'un animal soit malade sachant que le test est positif ?

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A et B sont indépendantes

On considère l'équation (E)

$$z^3-(4+\mathrm{i})z^2+(7+\mathrm{i})z-4=0$$

où z désigne un nombre complexe.

Partie A

1. **a.** Montrer que (E) admet une solution réelle, note z_1.

   b. Déterminer les deux nombres complexes a et b tels que, pour tout nombre complexe z on ait :

$$z^3-(4+\mathrm{i})z^2+(7+\mathrm{i})z-4=(z-z_1)(z-2-2\mathrm{i})(az+b)$$

2. Résoudre (E).

Partie B

Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$, on considère les trois points A, B et C d'affixes respectives $1,\ 2+2\mathrm{i}$ et $1-\mathrm{i}$.

1. Représenter A, B et C.

2. Déterminer le module et un argument de $\dfrac{2+2\text{i}}{1-\text{i}}$. En déduire la nature du triangle OBC.
3. Que représente la droite (OA) pour le triangle OBC ? Justifter votre affirmation.
4. Soit D l'image de O par la rotation d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ et de centre C. Déterminer l'affixe de D.
5. Quelle est. la nature de OCDB ?

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. (unité 1 cm).
On construira une figure que l'on complétera au fur et mesure.

1. Soit A le point d'affixe 3, et r la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$. On note B, C, D, E et F les images respectives des points A, B, C, D et E par la rotation r.
   Montrer que B a pour affixe $\dfrac{3}{2}+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\text{i}$.
2. Associer à chacun des points C, D, E et F l'une des affixes de l'ensemble suivant

$$\left\{-3\,;\, -\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}\text{i}\,;\, \frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}\text{i}\,;\, -\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}\text{i}\right\}$$

3. **a.** Déterminer $r(\text{F})$.
   b. Quelle est la nature du polygone ABCDEF ?
4. Soit s la similitude directe de centre A, de rapport $\dfrac{1}{2}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$. Soit s' la similitude directe de centre E transformant F en C.
   a. Déterminer l'angle et le rapport de s'. En déduire l'angle et le rapport de $s' \circ s$.
   b. Quelle est l'image du point D par $s' \circ s$?
   c. Déterminer l'écriture complexe de $s' \circ s$.
5. Soit A′ le symétrique de A par rapport à C.
   a. Sans utiliser les nombres complexes, déterminer $s(\text{A}')$ puis l'image de A′ par $s' \circ s$.
   b. Calculer l'affixe du point A′. Retrouver alors le résultat du **a.** en utilisant l'écriture complexe de $s' \circ s$.

EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_0 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$$

1. **a.** Soit f la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$$

   Étudier le sens de variation de f, et tracer sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. (On prendra comme unité 2 cm).
   b. Utiliser le graphique précédent pour construire les points A_0, A_1, A_2 et A_3 de l'axe $\left(\text{O}~;~\vec{\imath}\right)$ d'abscisses respectives u_0, u_1, u_2 et u_3.

2. **a.** Montrer que pour tout entier naturel n non nul $u_n \geqslant \sqrt{2}$.

b. Montrer que pour tout $x \geqslant \sqrt{2}$, $f(x) \leqslant x$.

c. En déduire que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 1.

d. Prouver qu'elle converge.

3. Soit ℓ la limite de la suite (u_n). Montrer que ℓ est solution de l'équation

$$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$$

En déduire sa valeur.

EXERCICE 4 **6 points**

Commun tous les candidats

Première partie

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. On considère :

- les points A$(0 ; 0 ; 3)$, B$(2 ; 0 ; 4)$, C$(-1 ; 1 ; 2)$ et D$(1 ; -4 ; 0)$
- les plans (P_1) : $7x + 4y - 3z + 9 = 0$ et $(P_2) : x - 2y = 0$.
- les droites (Δ_1) et (Δ_2) définies par leurs systèmes d'équations paramétriques respectifs

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -1 + t \\ y & = & -8 + 2t \\ z & = & -10 + 5t \end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R} \qquad \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 7 + 2t' \\ y & = & 8 + 4t' \\ z & = & 8 - t' \end{array}\right. \quad t' \in \mathbb{R}$$

Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 0,5 point ; une réponse inexacte enlève 0,25 point ; l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

	a.	b.	e.	d.
1. Le plan (P_1) est	Le plan (ABC)	Le plan (BCD)	Le plan (ACD)	Le plan (ABD)
2. La droite (Δ_1) contient	Le point A	Le point B	Le point C	Le point D
3. Position relative de (P_1) et de (Δ_2)	(Δ_1) est strictement parallèle a (P_1)	(Δ_1) est incluse dans (P_1)	(Δ_1) coupe (P_1)	(Δ_1) est orthogonale à (P_1)
4. Position relative de (Δ_1) et de (Δ_2)	(Δ_1) est strictement parallèle à (Δ_2)	(Δ_1) et (Δ_2) sont confondues	(Δ_1) et (Δ_2)) sont sécantes	(Δ_1) et (Δ_2) sont non coplanaires.
5. L'intersection de (P_1) et de (P_2) est une droite dont une représentation paramétrique est	$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & t \\ y & = & -2 + \frac{1}{2}t \\ z & = & 3t \end{array}\right.$	$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2t \\ y & = & t \\ z & = & 3 + 6t \end{array}\right.$	$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 5t \\ y & = & 1 - 2t \\ z & = & t \end{array}\right.$	$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -1 + t \\ y & = & 2 + t \\ z & = & -3t \end{array}\right.$

Deuxième partie

L'espace est rapporté à un repère orthonormai $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. On considère la droite (D) passant par A$(0 ; 0 ; 3)$ et dont un vecteur directeur est $\vec{u}\,(1 ; 0 ; -1)$ et la droite (D$'$) passant par B$(2 ; 0 ; 4)$ et dont un vecteur directeur est $\vec{v}\,(0 : 1 ; 1)$.

L'objectif est de démontrer qu'il existe une droite unique perpendiculaire à la fois à (D) et à (D$'$), de la déterminer et de dégager une propriété de. cette droite.

1. On considère un point M appartenant à (D) et un point M' appartenant à (D$'$). définis par $\overrightarrow{\text{A}M} = a\vec{u}$ et $\overrightarrow{\text{B}M'} = b\vec{v}$, où a et b sont de nombres réels.

Exprimer les coordonnées de M, de M' puis du vecteur $\overrightarrow{MM'}$ en fonction de a et b.

2. Démontrer que la droite (MM') est perpendiculaire à (D) et à (D$'$) si et seulement. si le couple $(a\ ;\ b)$ est solution du système

$$\left\{\begin{array}{rcr} 2a+b & = & 1 \\ a+2b & = & -1 \end{array}\right.$$

3. Résoudre ce système. En déduire les coordonnées des deux uniques points M et M', que nous noterons ici H et H', tels que la droite (HH$'$) soit bien perpendiculaire commune à (D) et à (D$'$). Montrer que HH$' = \sqrt{3}$ unités de longueur.

4. On considère un point M quelconque de la droite (D) et un point M' quelconque de la droite (D$'$).

   a. En utilisant les coordonnées obtenues à la question 1, démontrer que

   $$MM'^2 = (a+b)^2 + (a-1)^2 + (b+1)^2 + 3.$$

   b. En déduire que la distance MM' est minimale lorsque M est en H et M' est en H$'$.

Durée : 4 heures

Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie mars 2007 (spécialité)

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Pour tout cet exercice, l'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.

1. *Question de cours*

Établir l'équation cartésienne d'un plan dont on connaît un vecteur normal $\vec{n}\,(a,\ b,\ c)$ et un point $M_0\left(x_0,\ y_0,\ z_0\right)$.

2. On considère les points A(1 ; 2 ; −3), B(−3 ; 1 ; 4) et C(2 ; 6 ; −1).

a. Montrer que les points A, B et C déterminent un plan.

b. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est $2x - y + z + 3 = 0$.

c. Soit I le point de coordonnées (−5 ; 9 ; 4). Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite $\mathcal{D}$ passant par I et perpendiculaire au plan (ABC).

d. Déterminer les coordonnées du point J, intersection de la droite $\mathcal{D}$ et du plan (ABC).

e. En déduire la distance du point I au plan (ABC).

EXERCICE 2 **4 points**

Commun à tous les candidats

Pour chaque question une seule des quatre propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte les points attribués à la question, une réponse inexacte enlève la moitié des points attribués à la question, l'absence de réponse est comptée 0 *point.*

Si le total est négatif la note est ramenée à 0.

A. Un sac contient 3 boules blanches, 4 boules noires et 1 boule rouge, indiscernables au toucher. On tire, au hasard, successivement, trois boules du sac, en remettant chaque boule tirée dans le sac avant le tirage suivant.

Question 1 : La probabilité de tirer trois boules noires est :

a. $\dfrac{\binom{4}{3}}{\binom{8}{3}}$ **b.** $\dfrac{9}{8}$ **c.** $\left(\dfrac{1}{2}\right)^3$ **d.** $\dfrac{4\times 3\times 2}{8\times 7\times 6}$

Question 2 : Sachant que Jean a tiré 3 boules de la même couleur, la probabilité qu'il ait tiré 3 boules rouges est :

a. 0 **b.** $\left(\dfrac{1}{8}\right)^3$ **c.** $\dfrac{23}{128}$ **d.** $\dfrac{1}{92}$

B. Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,1]$ par $f(x) = x + m$ où m est une constante réelle.

Question 3 : f est une densité de probabilité sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ lorsque

a. $m = -1$ **b.** $m = \dfrac{1}{2}$ **c.** $m = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$ **d.** $m = \mathrm{e}^{-1}$

C. La durée de vie en années d'un composant électronique suit une loi exponentielle de paramètre $0,2$.

Question 4 : La probabilité que ce composant électronique ait une durée de vie strictement supérieure à 5 ans est

a. $1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ **b.** $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ **c.** $\dfrac{1}{5\mathrm{e}}$ **d.** $\dfrac{1}{0,2}(\mathrm{e} - 1)$

EXERCICE 3 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Pour coder un message, on procède de la manière suivante : à chacune des 26 lettres de l'alphabet, on commence par associer un entier n de l'ensemble $\Omega = \{0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ \ldots\ ;\ 24\ ;\ 25\}$ selon le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

a et b étant deux entiers naturels donnés, on associe à tout entier n de Ω le reste de la division euclidienne de $(an + b)$ par 26 ; ce reste est alors associé à la lettre correspondante.

Exemple : pour coder la lettre P avec $a = 2$ et $b = 3$, on procède de la manière suivante :

étape 1 : on lui associe l'entier $n = 15$.

étape 2 : le reste de la division de $2 \times 15 + 3 = 33$ par 26 est 7.

étape 3 : on associe 7 à H. Donc P est codé par la lettre H.

1. Que dire alors du codage obtenu lorsque l'on prend $a = 0$?
2. Montrer que les lettres A et C sont codées par la même lettre lorsque l'on choisit $a = 13$.
3. *Dans toute la suite de l'exercice*, on prend $a = 5$ et $b = 2$.
   a. On considère deux lettres de l'alphabet associées respectivement aux entiers n et p. Montrer, que si $5n + 2$ et $5p + 2$ ont le même reste dans la division par 26 alors $n - p$ est un multiple de 26. En déduire que $n = p$.
   b. Coder le mot AMI.
4. On se propose de décoder l a lettre E.
   a. Montrer que décoder la lettre E revient à déterminer l'élément n de Ω tel que $5n - 26y = 2$, où y est un entier.
   b. On considère l'équation $5x - 26y = 2$, avec x et y entiers relatifs.
      i. Donner une solution particulière de l'équation $5x - 26y = 2$.
      ii. Résoudre alors l'équation $5x - 26y = 2$.
      iii. En déduire qu'il existe un unique couple $(x\ ;\ y)$ solution de l'équation précédente, avec $0 \leqslant x \leqslant 25$.
   c. Décoder alors la lettre E.

EXERCICE 4 **7 points**

Commun à tous les candidats

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par

$$u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}.$$

PARTIE A

1. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-3n-2}{n(2n+2)(2n+1)}$$

2. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).
3. Établir alors que (u_n) est une suite convergente.

L'objectif de la partie B est de déterminer la valeur de la limite de la suite (u_n).

PARTIE B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

1. a. Justifier pour tout entier naturel n non nul l'encadrement :

$$\frac{1}{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n}$$

b. Vérifier que

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n} - f(n)$$

c. En déduire que pour tout entier naturel n non nul,

$$0 \leqslant f(n) \leqslant \frac{1}{n(n+1)}$$

2. On considère la suite (S_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par

$$S_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{2n(2n+1)}$$

a. Montrer que pour tout entier naturel n non nul,

$$0 \leqslant f(n) + f(n+1) + \cdots + f(2n) \leqslant S_n$$

b. Déterminer les réels a et b tels que pour tout réel x distinct de -1 et de 0, on ait

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$$

c. En déduire l'égalité

$$S_n = \frac{n+1}{n(2n+1)}$$

d. En utilisant les questions précédentes, déterminer alors la limite quand n tend vers $+\infty$ de

$$\sum_{k=n}^{2n} f(k) = f(n) + f(n+1) + \cdots + f(2n)$$

e. Vérifier que pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$f(n) + f(n+1) + \cdots + f(2n) = u_n - \ln\left(2 + \frac{1}{n}\right)$$

f. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Baccalauréat S Pondichéry 12 avril 2007

Exercice 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation $2x + y - 2z + 4 = 0$ et les points A de coordonnées $(3\,;2\,;6)$, B de coordonnées $(1\,;2\,;4)$, et C de coordonnées $(4\,;\,-2\,;\,5)$.

1. **a.** Vérifier que les points A, B et C définissent un plan.

   b. Vérifier que ce plan est le plan $\mathscr{P}$.

2. **a.** Montrer que le triangle ABC est rectangle.

   b. Écrire un système d'équations paramétriques de la droite Δ passant par O et perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$.

   c. Soit K le projeté orthogonal de O sur $\mathscr{P}$. Calculer la distance OK.

   d. Calculer le volume du tétraèdre OABC.

3. On considère, dans cette question, le système de points pondérés

$$S = \{(\text{O},\ 3),\ (\text{A},\ 1),\ (\text{B},\ 1),\ (\text{C},\ 1)\}$$

   a. Vérifier que ce système admet un barycentre, qu'on notera G.

   b. On note I le centre de gravité du triangle ABC. Montrer que G appartient à (OI).

   c. Déterminer la distance de G au plan $\mathscr{P}$.

4. Soit Γ l'ensemble des points M de l'espace vérifiant :

$$\left\|3\overrightarrow{M\text{O}} + \overrightarrow{M\text{A}} + \overrightarrow{M\text{B}} + \overrightarrow{M\text{C}}\right\| = 5.$$

   Déterminer Γ. Quelle est la nature de l'ensemble des points communs à $\mathscr{P}$ et Γ ?

Exercice 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. *Dans cette question, il est demandé au candidat d'exposer des connaissances*

   Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. Soit R la rotation du plan de centre Ω, d'affixe ω et d'angle de mesure θ. L'image par R d'un point du plan est donc définie de la manière suivante :
   - $R(\Omega) = \Omega$
   - pour tout point M du plan, distinct de Ω, l'image M' de M est définie par $\Omega M' = \Omega M$ et $\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \theta \quad [2\pi]$.

   On rappelle que, pour des points A et B d'affixes respectives a et b, $AB = |b-a|$ et $\left(\vec{u}, \overrightarrow{AB}\right) = \arg(b-a) \quad [2\pi]$.

   Question : Montrer que les affixes z et z' d'un point quelconque M du plan et de son image M' par la rotation R, sont liées par la relation

$$z' - \omega = \text{e}^{\text{i}\theta}(z - \omega).$$

2. On considère les points I et B d'affixes respectives $z_{\text{I}} = 1 + \text{i}$ et $z_{\text{B}} = 2 + 2\text{i}$. Soit R la rotation de centre B et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{3}$.

a. Donner l'écriture complexe de R.

b. Soit A l'image de I par R. Calculer l'affixe z_{A} de A.

c. Montrer que O, A et B sont sur un même cercle de centre I. En déduire que OAB est un triangle rectangle en A. Donner une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\text{OA}}, \overrightarrow{\text{OB}}\right)$.

d. En déduire une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\text{OA}}\right)$.

3. Soit T la translation de vecteur $\overrightarrow{\text{IO}}$. On pose $\text{A}' = T(\text{A})$.

a. Calculer l'affixe $z_{\text{A}'}$ de A′.

b. Quelle est la nature du quadrilatère OIAA′ ?

c. Montrer que $-\dfrac{\pi}{12}$ est un argument de $z_{\text{A}'}$.

EXERCICE 2 — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. *Dans cette question, il est demandé au candidat d'exposer des connaissances*

On suppose connus les résultats suivants :

– La composée de deux similitudes planes est une similitude plane ;
– la transformation réciproque d'une similitude plane est une similitude plane ;
– une similitude plane qui laisse invariants trois points non alignés du plan est l'identité du plan.

Soient A, B et C trois points non alignés du plan et s et s' deux similitudes du plan telles que $s(\text{A}) = s'(\text{A})$, $s(\text{B}) = s'(\text{B})$ et $s(\text{C}) = s'(\text{C})$. Montrer que $s = s'$.

2. Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$. La figure sera complétée au fur et à mesure. On donne les points A d'affixe 2, E d'affixe $1+\text{i}$, F d'affixe $2+\text{i}$ et G d'affixe $3+\text{i}$.

a. Calculer les longueurs des côtés des triangles OAG et OEF. En déduire que ces triangles sont semblables.

b. Montrer que OEF est l'image de OAG par une similitude indirecte S, en déterminant l'écriture complexe de S.

c. Soit h l'homothétie de centre O et de rapport $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. On pose $\text{A}' = h(\text{A})$ et $\text{G}' = h(\text{G})$, et on appelle I le milieu de [EA′]. On note σ la symétrie orthogonale d'axe (OI). Montrer que $S = \sigma \circ h$.

EXERCICE 3 — 5 points

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur $[0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln(x+3)}{x+3}.$$

1. Montrer que f est dérivable sur $[0~;~+\infty[$. Étudier le signe de sa fonction dérivée f', sa limite éventuelle en $+\infty$, et dresser le tableau de ses variations.

2. On définit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par son terme général $u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} f(x)\,\text{d}x$.

a. Justifier que, si $n \leqslant x \leqslant n+1$, alors $f(n+1) \leqslant f(x) \leqslant f(n)$.

b. Montrer, sans chercher à calculer u_n, que, pour tout entier naturel n,

$$f(n+1) \leqslant u_n \leqslant f(n).$$

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

3. Soit F la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$F(x) = [\ln(x+3)]^2.$$

a. Justifier la dérivabilité sur $[0\ ;\ +\infty[$ de la fonction F et déterminer, pour tout réel positif x, le nombre $F'(x)$.

b. On pose, pour tout entier naturel n, $I_n = \int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x$.
Calculer I_n.

4. On pose, pour tout entier naturel n, $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$.
Calculer S_n. La suite (S_n) est-elle convergente ?

EXERCICE 4 — 6 points

Commun à tous les candidats

Pour réaliser une enquête, un employé interroge des personnes prises au hasard dans une galerie commerçante. Il se demande si trois personnes au moins accepteront de répondre.

1. Dans cette question, on suppose que la probabilité qu'une personne choisie au hasard accepte de répondre est 0,1. L'employé interroge 50 personnes de manière indépendante. On considère les évènements :
A : « au moins une personne accepte de répondre »
B : « moins de trois personnes acceptent de répondre »
C : « trois personnes ou plus acceptent de répondre ».
Calculer les probabilités des évènements A, B et C. On arrondira au millième.

2. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. Dans cette question, on suppose que la variable aléatoire X qui, à tout groupe de n personnes interrogées indépendamment, associe le nombre de personnes ayant accepté de répondre, suit la loi de probabilité définie par :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Pour tout entier } k \text{ tel que } 0 \leqslant k \leqslant n-1,\ P(X=k) = \dfrac{\mathrm{e}^{-a}a^k}{k!} \\ \text{et } P(X=n) = 1 - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{\mathrm{e}^{-a}a^k}{k!}, \\ \text{formules dans lesquelles } a = \dfrac{n}{10} \end{array}\right.$$

a. Montrer que la probabilité qu'au moins trois personnes répondent est donnée par :

$$f(a) = 1 - \mathrm{e}^{-a}\left(1 + a + \frac{a^2}{2}\right).$$

b. Calculer $f(5)$. En donner l'arrondi au millième. Cette modélisation donne-t-elle un résultat voisin de celui obtenu à la question 1 ?

3. On conserve le modèle de la question 2. On souhaite déterminer le nombre minimum de personnes à interroger pour que la probabilité que trois d'entre elles au moins répondent soit supérieure ou égale à 0,95.

a. Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right).$$

ainsi que sa limite en $+\infty$. Dresser son tableau de variations.

b. Montrer que l'équation $f(x) = 0,95$ admet une solution unique sur $\mathbb{R}^+$, et que cette solution est comprise entre $6,29$ et $6,3$.

c. En déduire le nombre minimum de personnes à interroger.

Baccalauréat S Liban juin 2007

EXERCICE 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

Soient f et g les fonctions définies sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = \ln x \text{ et } g(x) = (\ln x)^2.$$

On note $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ les courbes représentatives respectives de f et g dans un repère orthogonal. Les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont données en annexe.

1. **a.** Étudier le signe de $(\ln x)(1 - \ln x)$ sur $]0~;~+\infty[$.

   b. En déduire la position relative des deux courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sur $]0~;~+\infty[$.

2. Pour x appartenant à $]0~;~+\infty[$, M est le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse x et N est le point de $\mathcal{C}'$ de même abscisse.

   a. Soit h la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par $h(x) = f(x) - g(x)$.
   Étudier les variations de la fonction h sur $]0~;~+\infty[$.

   b. En déduire que sur l'intervalle $[1~;~\text{e}]$, la valeur maximale de la distance MN est obtenue pour $x = \sqrt{\text{e}}$.

   c. Résoudre dans $]0~;~+\infty[$ l'équation $(\ln x)^2 - \ln x = 1$.

   d. En déduire que, sur $]0~;~1[\, \cup\,]\text{e}~;~+\infty[$, il existe deux réels a et b $(a < b)$ pour lesquels la distance MN est égale à 1.

3. **a.** À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_1^{\text{e}} \ln x\, \text{d}x$.

   b. Vérifier que la fonction G définie sur $]0~;~+\infty[$ par $G(x) = x\left[(\ln x)^2 - 2\ln x + 2\right]$ est une primitive de la fonction g sur $]0~;~+\infty[$.

   c. On considère la partie du plan délimitée par les courbes $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \text{e}$.
   Déterminer l'aire $\mathcal{A}$ en unités d'aire de cette partie du plan.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ne faisant pas l'option mathématiques

Pour chacune des 5 *propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie.*

Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

On considère la droite (d) dont un système d'équations paramétriques est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2 - \dfrac{t}{2} \\ y & = & 1 \\ z & = & 5 - \dfrac{3t}{2} \end{array}\right. \quad (t \in \mathbb{R})$$

On note A le point de coordonnées $(2~;~-1~;~1)$, B le point de coordonnées $(4~;~-2~;~2)$ et C le point de (d) d'abscisse 1.

1. Proposition 1
   « La droite (d) est parallèle à l'axe $\left(\text{O}~;~\vec{\jmath}\right)$ ».

2. Proposition 2
   « Le plan P d'équation $x + 3z - 5 = 0$ est le plan passant par A et orthogonal à (d) ».

3. Proposition 3
« La mesure de l'angle géométrique $\widehat{\text{BAC}}$ est $\dfrac{\pi}{3}$ radians ».
4. Soit G le barycentre des points pondérés (A ; −1), (B ; 1) et (C ; 1).
Proposition 4
« Les segments [AG] et [BC] ont le même milieu ».
5. Proposition 5 « La sphère de centre C et passant par B coupe le plan P d'équation $x+3z-5=0$ ».

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant choisi l'option mathématiques

Pour chacune des 5 *propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.*

1. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On considère la transformation du plan qui à tout point d'affixe z associe le point d'affixe z' définie par : $z' = 2\text{i}z+1$.
Proposition 1 : « Cette transformation est la similitude directe de centre A d'affixe $\dfrac{1}{5}+\dfrac{2}{5}\text{i}$, d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ et de rapport 2 ».
2. Dans l'espace muni du repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on note S la surface d'équation $z = x^2+2x+y^2+1$.
Proposition 2 : « La section de S avec le plan d'équation $z=5$ est un cercle de centre A de coordonnées $(-1~;~0~;~5)$ et de rayon 5 ».
3. **Proposition 3 :** « $5^{750}-1$ est un multiple de 7 ».
4. **Proposition 4 :** « Si un entier naturel n est congru à 1 modulo 7 alors le PGCD de $3n+4$ et de $4n+3$ est égal à 7 ».
5. Soient a et b deux entiers naturels.

   Proposition 5 : « S'il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au+bv=2$ alors le PGCD de a et b est égal à 2 ».

EXERCICE 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

On considère deux urnes U_1 et U_2.
L'urne U_1 contient 17 boules blanches et 3 boules noires indiscernables au toucher.
L'urne U_2 contient 1 boule blanche et 19 boules noires indiscernables au toucher.
On réalise des tirages en procédant de la manière suivante :

Étape 1 : On tire au hasard une boule dans U_1, on note sa couleur et on la remet dans U_1.

Étape n ($n \geqslant 2$) :

- Si la boule tirée à l'étape $(n-1)$ est blanche, on tire au hasard une boule dans U_1, on note sa couleur et on la remet dans U_1.
- Si la boule tirée à l'étape $(n-1)$ est noire, on tire au hasard une boule dans U_2, on note sa couleur et on la remet dans U_2.

On note A l'évènement « le tirage a lieu dans l'urne U_1 à l'étape n » et p_n sa probabilité. On a donc $p_1 = 1$.

1. Calculer p_2.
2. Montrer que pour tout n entier naturel non nul, $p_{n+1} = 0,8p_n + 0,05$.
On pourra s'aider d'un arbre pondéré.

3. Calculer p_3.
4. a. Démontrer par récurrence que pour tout entier n entier naturel non nul, $p_n > 0,25$.
   b. Démontrer que la suite (p_n) est décroissante.
   c. En déduire que la suite (p_n) est convergente vers un réel noté ℓ.
   d. Justifier que ℓ vérifie l'équation : $\ell = 0,8\ell + 0,05$. En déduire la valeur de ℓ.

Exercice 4 **5 points**

Commun à tous les candidats

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On considère l'application f qui à tout point M d'affixe z non nulle associe le point $M' = f(M)$ d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{z}{|z|}(2 - |z|).$$

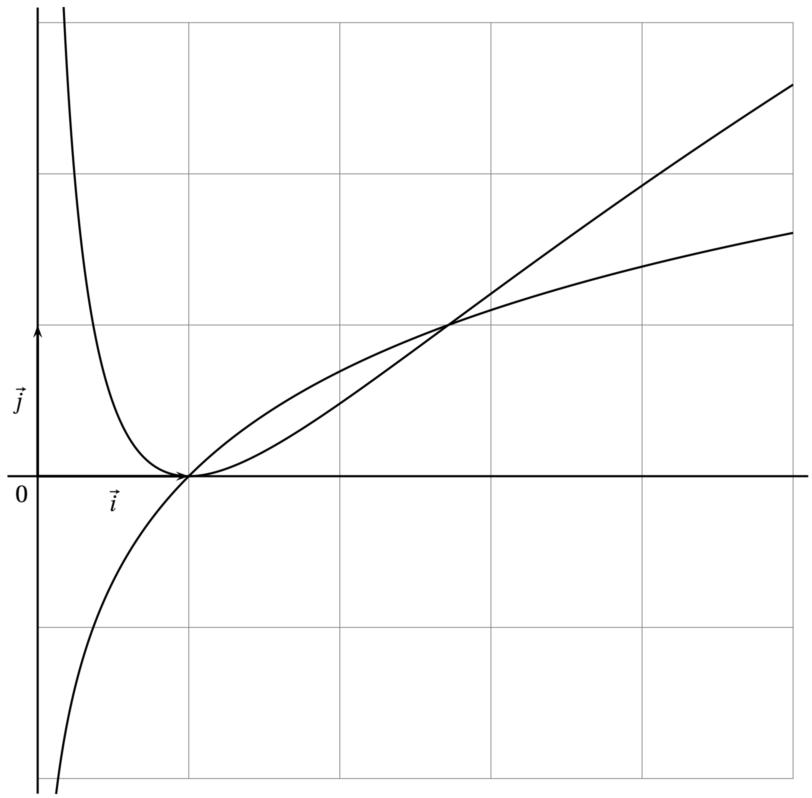
Le cercle $\mathscr{C}_1$, de centre O et de rayon 1, est représenté sur la figure, donnée en annexe, que l'on complétera au fur et à mesure des questions.
Pour z complexe non nul, on note $z = r\text{e}^{\text{i}\alpha}$, r étant le module de z et α un argument de z.

1. Montrer que $z' = (2 - r)\text{e}^{\text{i}\alpha}$.
2. Déterminer l'affixe a' du point A$'$, image par f du point A d'affixe $a = 3$.
3. Soit B le point d'affixe $b = -\sqrt{3} + \text{i}$.
   a. Écrire b sous forme exponentielle.
   b. Déterminer l'affixe b' du point B$'$, image du point B par f.
4. Placer A, B, A$'$ et B$'$ sur la figure..
5. a. Déterminer l'ensemble E des points M du plan privé du point O dont l'image par f est O.
   b. Représenter E sur la figure.
6. Montrer que le cercle $\mathscr{C}_1$ est l'ensemble des points M du plan distincts de O tels que $f(M) = M$.
7. Pour cette question, M est un point du plan, distinct de O, n' appartenant pas au cercle $\mathscr{C}_1$.
   On appelle I le milieu du segment $[MM']$ où M' est l'image de M par f.
   a. Montrer que I appartient à $\mathscr{C}_1$.
   b. Montrer que I appartient à la demi-droite [OM).
   c. Sur la figure donnée en annexe est placé un point nommé M_1.
   Construire le point M_1', image par f du point M_1.

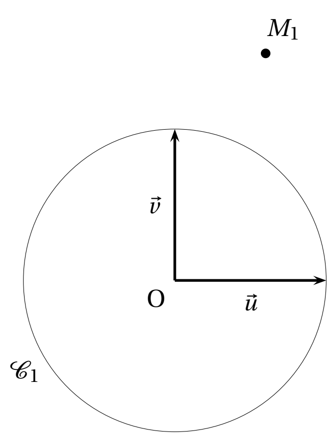
Annexe

Annexe à rendre avec la copie

EXERCICE 1



EXERCICE 4



Baccalauréat S Amérique du Nord mai 2007

EXERCICE 1 **3 points**
Commun à tous les candidats

Pour chacune des trois propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, et donner une justification de la réponse choisie.
Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
   Soit (P) le plan dont une équation est : $2x + y - 3z + 1 = 0$.
   Soit A le point de coordonnées $(1\,;\ 11\,;\ 7)$.

   Proposition 1 :
   « Le point H, projeté orthogonal de A sur (P), a pour coordonnées $(0\,;2\,;1)$ ».
2. On considère l'équation différentielle (E) : $y' = 2 - 2y$.
   On appelle u la solution de (E) sur $\mathbb{R}$ vérifiant $u(0) = 0$.

   Proposition 2 : « On a $u\left(\dfrac{\ln 2}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$ ».
3. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{7u_n}$.

   Proposition 3 : « Pour tout entier naturel n, on a $0 \leqslant u_n \leqslant 7$ ».

EXERCICE 2 **5 points**
Pour les candidats n'ayant pas choisi la spécialité mathématiques

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O\,;\ \vec{u}\,;\ \vec{v}\right)$ (unité graphique : 4 cm).
Soit A le point d'affixe $z_A = \text{i}$ et B le point d'affixe $z_B = \text{e}^{-\text{i}\frac{5\pi}{6}}$.

1. Soit r la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$. On appelle C l'image de B par r.
   a. a) Déterminer une écriture complexe de r.
   b. Montrer que l'affixe de C est $z_C = \text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{6}}$.
   c. Écrire z_B et z_C sous forme algébrique.
   d. Placer les points A, B et C.
2. Soit D le barycentre des points A, B et C affectés respectivement des coefficients 2, -1 et 2.
   a. Montrer que l'affixe de D est $z_D = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\text{i}$. Placer le point D.
   b. Montrer que A, B, C et D sont sur un même cercle.
3. Soit h l'homothétie de centre A et de rapport 2. On appelle E l'image de D par h.
   a. Déterminer une écriture complexe de h.
   b. Montrer que l'affixe de E est $z_E = \sqrt{3}$. Placer le point E.
4. **a.** Calculer le rapport $\dfrac{z_D - z_C}{z_E - z_C}$. On écrira le résultat sous forme exponentielle.

b. En déduire la nature du triangle CDE.

EXERCICE 2 **5 points**
Pour les candidats ayant choisi la spécialité mathématiques

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$(unité graphique : 1 cm).
On fera une figure que l'on complétera tout au long de cet exercice.

Soient A, B et C les points d'affixes respectives $a = 3+5\text{i}$, $b = -4+2\text{i}$ et $c = 1+4\text{i}$.

Soit f la transformation du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = (2-2\text{i})z+1$.

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.
2. **a.** Déterminer l'affixe du point B' image du point B par f.
   b. Montrer que les droites (CB') et (CA) sont orthogonales.
3. Soit M le point d'affixe $z = x+\text{i}y$, où on suppose que x et y sont des entiers relatifs.
   Soit M' l' image de M par f.
   Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{\text{C}M'}$ et $\overrightarrow{\text{CA}}$ sont orthogonaux si et seulement si $x + 3y = 2$.
4. On considère l'équation (E) : $x+3y = 2$, où x et y sont des entiers relatifs.
   a. Vérifier que le couple $(-4\ ;\ 2)$ est une solution de (E).
   b. Résoudre l'équation (E).
   c. En déduire l'ensemble des points M dont les coordonnées sont des entiers appartenant à l'intervalle $[-5\ ;\ 5]$ et tels que les vecteurs $\overrightarrow{\text{C}M'}$ et $\overrightarrow{\text{CA}}$ soient orthogonaux.
   Placer ces points sur la figure.

EXERCICE 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

Un joueur débute un jeu au cours duquel il est amené à faire successivement plusieurs parties.
La probabilité que le joueur perde la première partie est de 0,2.
Le jeu se déroule ensuite de la manière suivante :

- s'il gagne une partie, alors il perd la partie suivante avec une probabilité de 0,05 ;
- s'il perd une partie, alors il perd la partie suivante avec une probabilité de 0,1.

1. On appelle :
   E_1 l'événement « le joueur perd la première partie » ;
   E_2 l'évènement « le joueur perd la deuxième partie » ;
   E_3 l'évènement « le joueur perd la troisième partie ».

   On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de fois où le joueur perd lors des trois premières parties.

   On pourra s'aider d'un arbre pondéré.

   a. Quelles sont les valeurs prises par X ?

b. Montrer que la probabilité de l'évènement $(X = 2)$ est égale à 0,031 et que celle de l'évènement $(X = 3)$ est égale à 0,002.

c. Déterminer la loi de probabilité de X.

d. Calculer l'espérance de X.

2. Pour tout entier naturel n non nul, on note E_n l'évènement : « le joueur perd la n-ième partie », $\overline{E_n}$ l'évènement contraire, et on note p_n la probabilité de l'évènement E_n.

a. Exprimer, pour tout entier naturel n non nul, les probabilités des évènements $E_n \cap E_{n+1}$ et $\overline{E_n} \cap E_{n+1}$ en fonction de p_n .

b. En déduire que $p_{n+1} = 0,05p_n + 0,05$ pour tout entier naturel n non nul.

3. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = p_n - \dfrac{1}{19}$.

a. Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, u_n puis p_n en fonction de n.

c. Calculer la limite de p_n quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 4 — 7 points

Commun à tous les candidats

1. Restitution organisée de connaissances.

L'objet de cette question est de démontrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$.

On supposera connus les résultats suivants :

- la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est égale à sa fonction dérivée;
- $\mathrm{e}^0 = 1$;
- pour tout réel x, on a $\mathrm{e}^x > x$.
- Soient deux fonctions φ et ψ définies sur l'intervalle $[A ; +\infty[$ où A est un réel positif.
  Si pour tout x de $[A ; +\infty[$, $\psi(x) \leqslant \varphi(x)$ et si $\lim_{x\to+\infty} \psi(x) = +\infty$, alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$.

a. On considère la fonction g définie sur $[0 ; +\infty[$ par $g(x) = \mathrm{e}^x - \dfrac{x^2}{2}$.
Montrer que pour tout x de $[0 ; +\infty[$, $g(x) \geqslant 0$.

b. En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$

2. On appelle f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{4}x\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$.

On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
La courbe $\mathscr{C}$ est représentée en annexe.

a. Montrer que f est positive sur $[0 ; +\infty[$.

b. Déterminer la limite de f en $+\infty$. En déduire une conséquence graphique pour $\mathscr{C}$.

c. Étudier les variations de f puis dresser son tableau de variations sur $[0\ ;\ +\infty[$.

3. On considère la fonction F définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $F(x) = \int_0^t f(t)\,\mathrm{d}t$.

a. Montrer que F est une fonction strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

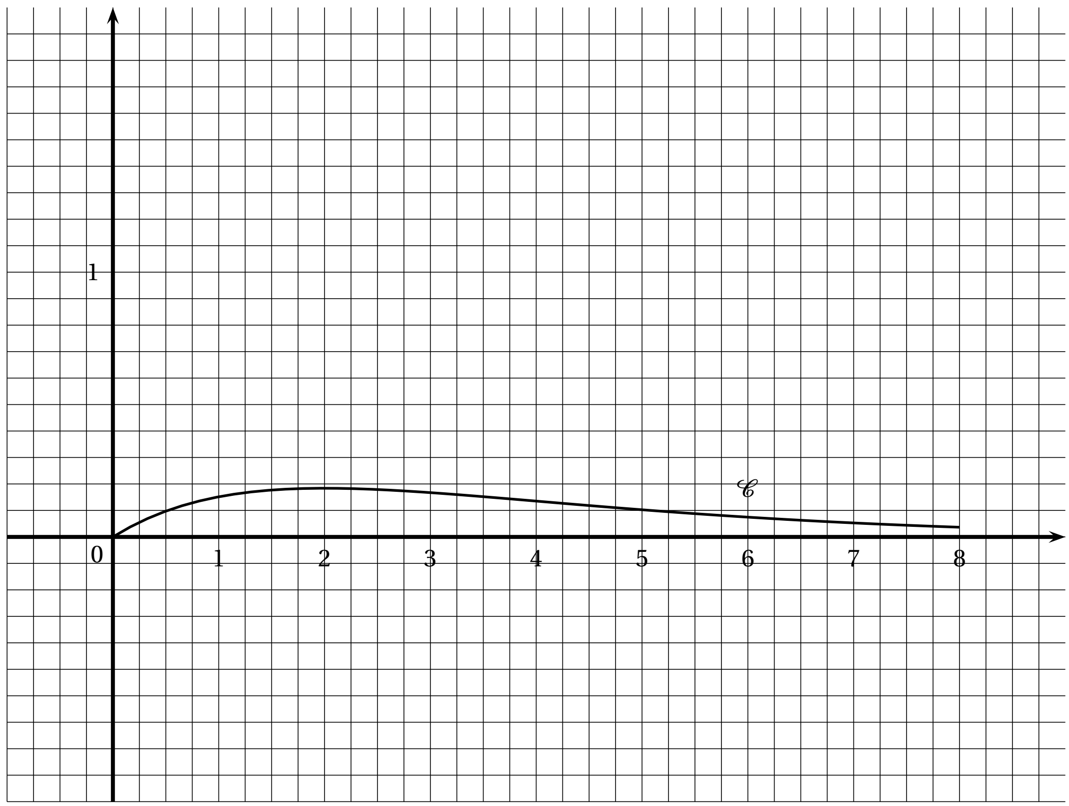
b. Montrer que $F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} - \dfrac{x}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$.

c. Calculer la limite de F en $+\infty$ et dresser le tableau de variations de F sur $[0\ ;\ +\infty[$.

d. Justifier l'existence d'un unique réel positif α tel que $F(\alpha) = 0,5$.
À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près par excès.

4. Soit n un entier naturel non nul. On note A_n l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan située entre l'axe des abscisses, la courbe de f et les droites d'équations $x = 0$ et $x = n$.
Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $A_n \geqslant 0,5$.

ANNEXE DE L'EXERCICE 4



Baccalauréat S Antilles-Guyane juin 2007

EXERCICE 1 **6 points**
Commun à tous les candidats
Question de cours

Prérequis : positivité et linéarité de l'intégrale.

Soient a et b deux réels d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ tels que $a \leqslant b$. Démontrer que si f et g sont deux fonctions continues sur I telles que pour tout réel x de l'intervalle I, $f(x) \geqslant g(x)$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Partie A

1. Soit x un éel supérieur ou égal à 1.
   Calculer en fonction de x l'intégrale $\displaystyle\int_1^x (2-t)\,\mathrm{d}t$.
2. Démontrer que pour tout réel t appartenant à l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$, on a : $2-t \leqslant \dfrac{1}{t}$.
3. Déduire de ce qui précède que pour tout réel x supérieur ou égal à 1, on a :

$$-\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2} \leqslant \ln x.$$

Partie B

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + 2x - \dfrac{3}{2}$.

Sur le graphique joint en annexe, le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ dans lequel on a tracé les courbes représentatives des fonctions h et logarithme népérien sur l'intervalle $[1\,;\,4]$. On a a tracé également la droite (d) d'équation $x = 4$.

1. **a.** Démontrer que $\displaystyle\int_1^4 h(x)\mathrm{d}x = 0$.

   b. Illustrer sur le graphique le résultat de la question précédente.
2. On note (D) le domaine du plan délimité par la droite (d) et les courbes représentatives des fonction h et logarithme népérien sur l'intervalle $[1\,;\,4]$.
   En utilisant un intégration par parties, calculer l'aire de (D) en unités d'aire.

EXERCICE 2 **5 points**
Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.
$\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ est un repère orthonormal direct du plan complexe.
Soit A le point d'affixe $1+\mathrm{i}$.
Au point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = \dfrac{1}{2}\left(z + \mathrm{i}\overline{z}\right)$.

1. On pose $z = x + \mathrm{i}y$ et $z' = x' + \mathrm{i}y'$ avec x, y, x' et y' réels.

   a. Démontrer les égalités suivantes : $x' = \dfrac{1}{2}(x+y)$ et $y' = \dfrac{1}{2}(x+y)$. En déduire que le point M' appartient à la droite $(\mathrm{O}A)$.

   b. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $M = M'$.

   c. Démontrer que pour tout point M du plan les vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{\mathrm{O}A}$ sont orthogonaux.

2. Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. M_1 est le point d'affixe z_1 image de M par r, M_2 le point d'affixe $z_2 = \overline{z}$, M_3 le point d'affixe z_3 tel que le quadrilatère $\text{O}M_1M_3M_2$ soit un parallélogramme.
   a. Dans cette question uniquement M a pour affixe $4 + \text{i}$, placer les points M, M_1, M_2, M_3.
   b. Exprimer z_1 en fonction de z, puis z_3 en fonction de z.
   c. $OM_1M_3M_2$ est-il un losange ? Justifier.
   d. Vérifier que $z' - z = \frac{1}{2}iz_3$.
   En déduire que $MM' = \frac{1}{2}\text{O}M_3$.
3. Démontrer que les points M, M_1, M_2 e tM_3 appartiennent à un même cercle de centre O si et seulement si $MM' = \frac{1}{2}\text{O}M$.
   Donner alors la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{M'\text{O}M}$.

EXERCICE 2 **5 points**
Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité
$\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ est un repère orthonormal direct du plan complexe (unité graphique 1 cm).
On considère le point A d'affixe $z_A = 1 + \text{i}$.
On note S_1 la symétrie orthogonale par rapport à l'axe $\left(\text{O} ; \vec{u}\right)$ et h l'homothétie de centre O et de rapport 3.
On pose $s = h \circ S_1$.
Partie A

1. Placer le point A et compléter la figure au fur et à mesure.
2. Quelle est la nature de la transformation s ? Justifier.
3. Déterminer l'écriture complexe de la transformation s.
4. a. Déterminer l'affixe z_B du point B image de A par s.
   b. Montrer que $z_B = -3\text{i}z_A$. Déterminer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\text{O}A}, \overrightarrow{\text{O}B}\right)$.
5. Soient M le milieu de $[AB]$ et P l'image de M par s. Montrer que la droite $(\text{O}P)$ est perpendiculaire à la droite (AB).

Partie B

1. On pose $C = s(B)$. Montrer que P est le milieu de $[BC]$.
2. a. Déterminer l'écriture complexe de $s \circ s$ et en déduire sa nature.
   b. Montrer que l'image de la droite $(\text{O}P)$ par s est la droite (OM).
   c. Que représente le point M pour le triangle $\text{O}BP$? Justifier.

EXERCICE 3 **5 points**
Commun à tous les candidats
L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. On considère les points $A(3\,;\,0\,;\,6)$ et $I(0\,;\,0\,;\,6)$, et l'on appelle (D) la droite passant par A et I.
On appelle (P) le plan d'équation $2y+z-6 = 0$ et (Q) le plan d'équation $y-2z+12 = 0$.

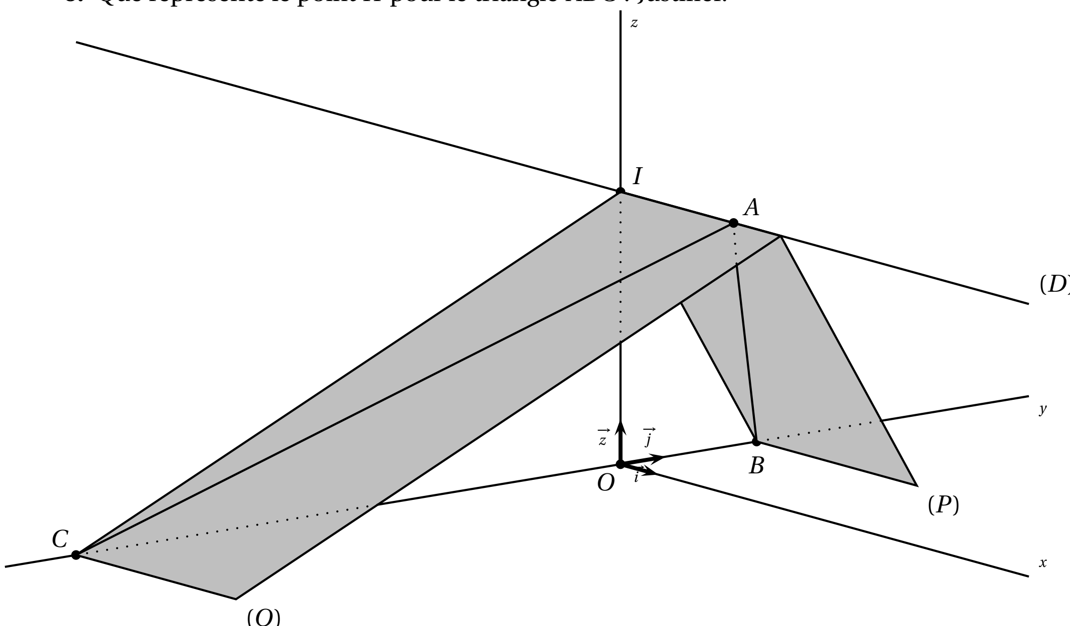
1. Démontrer que (P) et (Q) sont perpendiculaires.
2. Démontrer que l'intersection des plans (P) et (Q) est la droite (D).
3. Démontrer que (P) et (Q) coupent l'axe $\left(\text{O} ; \vec{\jmath}\right)$ et déterminer les coordonnées des points B et C, intersections respectives de (P) et (Q) avec l'axe $\left(\text{O} ; \vec{\jmath}\right)$.

4. Démontrer qu'une équation du plan (T) passant par B et de vecteur normal $\overrightarrow{AC}$ est

$$x+4y+2z-12=0.$$

5. Donner une représentation paramétrique de la droite (OA).
Démontrer que la droite (OA) et le plan (T) sont sécants en un point H dont on déterminera les coordonnées.

6. Que représente le point H pour le triangle ABC ? Justifier.



EXERCICE 4 **4 points**

Commun à tous les candidats

Pour chaque question, une seule des propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro et la lettre de la question ainsi que la valeur correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte aux questions 1 *et* 2 *rapporte 0,5 point et à la question* 3 *rapporte* 1 *point. Une réponse inexacte enlève 0,25 point ; l'absence de réponse est comptée* 0 *point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.*

On s'intéresse à deux types de pièces électroniques, P1 et P2, qui entrent dans la fabrication d'une boîte de vitesses automatique.
Une seule pièce de type P1 et une seule pièce de type P2 sont nécessaires par boîte.
L'usine se fournit auprès de deux sous-traitants et deux seulement S1 et S2.
Le sous-traitant S1 produit 80 % des pièces de type P1 et 40 % de pièces de type P2.
Le sous-traitant S2 produit 20 % des pièces de type P1 et 60 % de pièces de type P2.

1. Un employé de l'usine réunit toutes les pièces P1 et P2 destinées à être incorporées dans un certain nombre de boîtes de vitesses. Il y a donc autant de pièces de chaque type.
Il tire une pièce au hasard.

   a. La probabilité que ce soit une pièce P1 est

   0,8 0,5 0,2 0,4 0,6

   b. La probabilité que ce soit une pièce P1 et qu'elle vienne de S1 est

   0,1 0,2 0,3 0,4 0,5

   c. La probabilité qu'elle vienne de S1 est

   0,2 0,4 0,5 0,6 0,8

2. Il y a 200 pièces au total. Cette fois l'employé tire deux pièces simultanément. On suppose tous les tirages équiprobables.

a. Une valeur approchée à 10^{-4} près de la probabilité que ce soit deux pièces P1 est :

0,1588 0,2487 0,1683 0,0095

b. Une valeur approchée à 10^{-4} près de la probabilité que ce soit deux pièces P1 et P2 est :

0,5000 0,2513 0,5025

c. La probabilité que ce soient deux pièces fabriquées par le même fournisseur est :

$\dfrac{357}{995}$ $\dfrac{103}{199}$ $\dfrac{158}{995}$

3. La durée de vie exprimée en années des pièces P1 et P2 suit une loi exponentielle dont le paramètre λ est donné dans le tableau suivant :

λ	P1	P2
S1	0,2	0,25
S2	0,1	0,125

On rappelle que si X, durée de vie d'une pièce exprimée en années, suit une loi exponentielle de paramètre λ, alors $p(X \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$.

Une valeur approchée à 10^{-4} près de la probabilité qu'une pièce P1 fabriquée par S1 dure moins de 5 ans est :

0,3679 0,6321

∽ Baccalauréat S Asie juin 2007 ∾

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie oufause et donner une démonstration de la réponse choisie. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à proposer un contre-exemple. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

1. Si f est la fonction définie pour tout nombre réel x par : $f(x) = \sin^2 x$, alors sa fonction dérivée vérifie, pour tout nombre réel x, $f'(x) = \sin 2x$.
2. Soit f est une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-1 ; 1]$, dont la dérivée est continue sur cet intervalle.
   Si $f(-1) = -f(1)$, alors :
   $\displaystyle\int_{-1}^{1} t f'(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t$.
3. Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle $[0 ; 3]$.
   Si $\displaystyle\int_0^3 f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^3 g(t)\,\mathrm{d}t$, alors pour tout nombre réel x appartenant à $[0 ; 3]$: $f(x) \leqslant g(x)$.
4. Si f est solution de l'équation différentielle $y' = -2y + 2$ et si f n'est pas une fonction constante, alors la représentation de f dans un repère du plan, n'admet aucune tangente parallèle à l'axe des abscisses.

EXERCICE 2 **5 points**

Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. L'unité graphique est 4 cm.

Soit λ un nombre complexe non nul et différent de 1.

On définit, pour tout entier naturel n, la suite (z_n) de nombres complexes par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} z_0 & = & 0 \\ z_{n+1} & = & \lambda \cdot z_n + \text{i} \end{array}\right.$$

On note M_n le point d'affixe z_n.

1. Calcul de z_n en fonction de n et de λ.
   a. Vérifier les égalités : $z_1 = \text{i}$; $z_2 = (\lambda + 1)\text{i}$; $z_3 = (\lambda^2 + \lambda + 1)\text{i}$.
   b. Démontrer que, pour tout entier n positif ou nul : $z_n = \dfrac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1} \cdot \text{i}$.
2. Étude du cas $\lambda = \text{i}$.
   a. Montrer que $z_4 = 0$.
   b. Pour tout entier naturel n, exprimer z_{n+1} en fonction de z_n.
   c. Montrer que M_{n+1} est l'image de M_n par une rotation dont on précisera le centre et l'angle.
   d. Représenter les points M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4 dans le repère $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
3. Caractérisation de certaines suites (z_n).
   a. On suppose qu'il existe un entier naturel k tel que $\lambda^k = 1$.
   Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a l'égalité : $z_{n+k} = z_n$.

b. Réciproquement, monter que s'il existe un entier naturel k tel que, pour tout entier naturel n on ait l'égalité $z_{n+k} = z_n$ alors : $\lambda^k = 1$.

EXERCICE 2 **5 points**

Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le but de cet exercice est d'étudier une même configuration géométrique à l'aide de deux méthodes différentes.

I À l'aide des nombres complexes, sur un cas particulier

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. L'unité graphique est 1 cm.

1. On considère les points A et B d'affixes respectives 10 et 5i.

a. Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe s qui transforme O en A et B en O.

b. Déterminer les éléments caractéristiques de s. On note Ω son centre.

c. Déterminer le point $s \circ s(\text{B})$; en déduire la position du point Q par rapport aux sommets du triangle ABO.

2. On note $\mathcal{D}$ la droite d'équation $x - 2y = 0$, puis A$'$ et B$'$ les points d'affixes respectives 8+4i et 2+i.

a. Démontrer que les points A$'$ et B$'$ sont les projetés orthogonaux respectifs des points A et de B sur la droite $\mathcal{D}$.

b. Vérifier que $s(\text{B}') = \text{A}'$.

c. En déduire que le point Ω appartient au cercle de diamètre $[\text{A}'\text{B}']$.

II À l'aide des propriétés géométriques des similitudes

OAB est un triangle rectangle en O tel que $\left(\overrightarrow{\text{OA}}, \overrightarrow{\text{OB}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

1. On note encore s est la similitude directè telle que $s(\text{O}) = \text{A}$ et $s(\text{B}) = \text{O}$. Soit Ω son centre.

a. Justifier le fait que l'angle de s est égal à $\dfrac{\pi}{2}$.

b. Démontrer que Ω appartient au cercle de diamètre [OA]. (On admet de même que Ω appartient aussi au cercle de diamètre [OB].)
En déduire que Ω est le pied de la hauteur issue de O dans le triangle OAB.

2. On désigne par $\mathcal{D}$ une droite passant par O, distincte des droites (OA) et (OB). On note A$'$ et B$'$ les projetés othogonaux respectifs des points A et B sur la droite $\mathcal{D}$.

a. Déterminer les images des droites (BB$'$) et $\mathcal{D}$ par la similitude s.

b. Déterminer le point $s(\text{B}')$.

c. En déduire que le point Ω appartient au cercle de diamètre [A$'$B$'$]

EXERCICE 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

Une fabrique artisanale de jouets en bois vérifie la qualité de sa production avant sa commercialisation. Chaque jouet produit par l'entreprise est soumis à deux contrôles : d'une part l'aspect du jouet est examiné afin de vérifier qu'il ne présente pas de défaut de finition, d'autre part sa solidité est testée.

Il s'avère, à la suite d'un grand nombre de vérifications, que :

- 92 % des jouets sont sans défaut de finition ;
- parmi les jouets qui sont sans défaut de finition, 95 % réussissent le test de solidité ;

- 2 % des jouets ne satisfont à aucun des deux contrôles.

On prend au hasard unjouet parmi les jouets produits. On note :

- F l'évènement : « le jouet est sans défaut definition » ;
- S l'évènement : « le jouet réussit le test de solidité ».

1. Construction d'un arbre pondéré associé à cette situation.

a. Traduire les données de l'énoncé en utilisant les notations des probabilités.

b. Démontrer que $p_{\overline{\mathrm{F}}}\left(\overline{\mathrm{S}}\right) = \dfrac{1}{4}$.

c. Construire l'arbre pondéré correspondant à cette situation.

2. Calcul de probabilités.

a. Démontrer que $p(\mathrm{S}) = 0,934$.

b. Un jouet a réussi le test de solidité. Calculer la probabilité qu'il soit sans défaut de finition. (On donnera le résultat arrondi au millième,)

3. Étude d'une variable aléatoire B.
Les jouets ayant satisfait aux deux contrôles rapportent un bénéfice de 10 €, ceux qui n'ont pas satisfait au test de solidité sont mis au rebut, les autres jouets rapportent un bénéfice de 5 €.
On désigne par B la variable aléatoire qui associe à chaque jouet le bénéfice rapporté.

a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire B.

b. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire B.

4. Étude d'une nouvelle variable aléatoire. On prélève au hasard dans la production de l'entreprise un lot de 10 jouets.
On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de jouets de ce lot subissant avec succès le test de solidité. On suppose que la quantité fabriquée est suffisamment importante pour que la constitution de ce lot puisse être assimilée à un tirage avec remise.
Calculer la probabilité qu'au moins 8 jouets de ce lot subissent avec succès le test de solidité.

EXERCICE 4 **7 points**

Commun à tous les candidats

On désigne par a un réel strictement positif et différent de 1.
On se propose de rechercher, dans l'intervalle $]0~;~+\infty[$, les solutions de l'équation

$$E_a :~ x^a = a^x.$$

I Étude de quelques cas particuliers

1. Vérifier que les nombres 2 et 4 sont solutions de l'équation E_2..

2. Vérifier que le nombre a est toujours solution de l'équation E_a.

3. On se propose de démontrer que e est la seule solution de l'équation E_{e}.
On note h la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par $h(x) = x - \mathrm{e}\ln x$.

a. **Question de cours :** On rappelle que lorsque t tend vers $+\infty$, alors $\dfrac{\mathrm{e}^t}{t}$ tend vers $+\infty$.
Démontrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

b. Déterminer les limites de h en 0 et $+\infty$.

c. Etudier les variations de h sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

d. Dresser le tableau des variations de h et conclure quant aux solutions de l'équation E_{e}.

II Résolution de l'équation E_a

1. Soit x un réel strictement positif. Montrer que x est solution de l'équation E_a si et seulement si x est solution de l'équation : $\dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{\ln a}{a}$.

2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

a. Déterminer les limites de f en 0 et $+\infty$. Donner une interprétation graphique de ces deux limites.

b. Ëtudier les variations de f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

c. Dresser le tableau des variations de la fonction f.

d. Tracer la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$. (Unité : 2 cm).

3. Justifier à l'aide des résultats précédents le spropositions (P_1) et (P_2) suivantes :
(P_1) : si $a \in]0~;~1]$, alors E_a admet l'unique solution a ;
(P_2) : si $a \in]1~;~\mathrm{e}[\cup]\mathrm{e}~;~+\infty[$, alors E_a admet deux solutions a et b, l'une appartenant à l'intervalle $]1~;~\mathrm{e}[$ et l'autre appartenant à l'intervalle $]\mathrm{e}~;~+\infty[$.

Durée : 4 heures

Baccalauréat S Centres étrangers 15 juin 2007

EXERCICE 1 — 4 points

Commun à tous les candidats

Pour chacune des questions de ce QCM une seule, des trois propositions A, B ou C est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte 0,5 *point . (Une réponse inexacte enlève* 0,25 *point. L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point.*
Si le total est négatif la note de l'exercice est ramenée à 0.

Une urne contient 8 boules indiscernables au toucher, 5 sont rouges et 3 sont noires.

1. On tire au hasard simultanément 3 boules de l'urne.

a. La probabilité de tirer 3 boules noires est :

A $\dfrac{1}{56}$ B $\dfrac{1}{120}$ C $\dfrac{1}{3}$

b. La probabilité de tirer 3 boules de la même couleur est :

A. $\dfrac{11}{56}$ B. $\dfrac{11}{120}$ C. $\dfrac{16}{24}$

2. On tire au hasard une boule dans l'urne, on note sa couleur, on la remet dans l'urne ; on procède ainsi à 5 tirages successifs et deux à deux indépendants.

a. La probabilité d'obtenir 5 fois une boule noire est :

A. $\left(\dfrac{3}{8}\right)^3 \times \left(\dfrac{3}{8}\right)^3$ B. $\left(\dfrac{3}{8}\right)^5$ C. $\left(\dfrac{1}{5}\right)^5$

b. La probabilité d'obtenir 2 boules noires et 3 boules rouges est :

A. $\left(\dfrac{5}{8}\right)^3 \times \left(\dfrac{3}{8}\right)^2$ B. $2 \times \dfrac{5}{8} + 3 \times \dfrac{3}{8}$ C. $10 \times \left(\dfrac{5}{8}\right)^3 \times \left(\dfrac{3}{8}\right)^2$

3. On tire successivement et sans remise deux boules dans cette urne. On note :

– R_1 l'évènement : « La première boule tirée est rouge » ;
– N_1 l'évènement : « La première boule tirée est noire » ;
– R_2 l'évènement : « La deuxième boule tirée est rouge » ;
– N_2 l'évènement : « La deuxième boule tirée est noire ».

a. La probabilité conditionnelle $P_{R_1}(R_2)$ est :

A. $\dfrac{5}{8}$ B. $\dfrac{4}{7}$ C. $\dfrac{5}{14}$

b. La probabilité de l'évènement $R_1 \cap N_2$ est :

A. $\dfrac{16}{49}$ B. $\dfrac{15}{64}$ C. $\dfrac{15}{56}$

c. La probabilité de tirer une boule rouge au deuxième tirage est :

A. $\dfrac{5}{8}$ B. $\dfrac{5}{7}$ C. $\dfrac{3}{28}$

d. La probabilité de tirer une boule rouge au premier tirage sachant qu'on a obtenu une boule noire au second tirage est :

A. $\dfrac{15}{56}$ B. $\dfrac{3}{8}$ C. $\dfrac{5}{7}$

EXERCICE 2 — 5 points

Réservé aux candidats n'ayant pas suivi !'enseignement de spécialité

I. Restitution organisée de connaissances

1. Démontrer qu' un nombre complexe z est imaginaire pur si et seulement si $\overline{z} = -z$.
2. Démontrer qu'un nombre complexe z est réel si et seulement si $\overline{z} = z$.
3. Démontrer que pour tout nombre complexe z, on a l'égalité : $z\overline{z} = |z|^2$.

Le plan complexe est rapporté a un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$. On se propose de démontrer, à l'aide des nombres complexes, que tout triangle de sommets A, B, C, deux à deux distincts, d'affixes respective $a,\ b,\ c$, et dont le centre du cercle circonscrit est situé à l'origine O, a pour orthocentre le point H d'affixe $a+b+c$.

II. Étude d'un cas particulier

On pose : $a = 3+\text{i},\ b = -1+3\text{i},\ c = -\sqrt{5}-\text{i}\sqrt{5}$.

1. Vérifier que O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
2. Placer les points A, B, C et le point H d'aflixe $a+b+c$, puis vérifier graphiquement que le point H est l'orthocentre du triangle ABC.

III. Étude du cas général.

ABC est un triangle dont O est le centre du cercle circonscrit, et $a,\ b,\ c$ sont les affixes respectives des points A, B, C.

1. Justifier le fait que O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC si et seulement si :
$$a\overline{a} = b\overline{b} = c\overline{c}.$$
1. On pose $w = \overline{b}c - b\overline{c}$.
   a. En utilisant la caractérisation d'un nombre imaginaire pur établie dans le I., démontrer que w est imaginaire pur.
   b. Verifier l'égalité : $(b+c)\left(\overline{b}-\overline{c}\right) = w$ et justifier que : $\dfrac{b+c}{b-c} = \dfrac{w}{|b-c|^2}$.
   c. En déduire que le nombre complexe $\dfrac{b+c}{b-c}$ est imaginaire pur.
2. Soit H le point d'affixe $a+b+c$.
   a. Exprimer en fonction de $a,\ b$ et c les affixes des vecteurs $\overrightarrow{\text{AH}}$ et $\overrightarrow{\text{CB}}$.
   b. Prouver que $\left(\overrightarrow{\text{CB}}, \overrightarrow{\text{AH}}\right) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, où k est un entier relatif quelconque.
   (On admet de même que $\left(\overrightarrow{\text{CA}}, \overrightarrow{\text{BH}}\right) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$).
   c. Que représente le point H pour le triangle ABC ?

EXERCICE 2 **5 points**

Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonorinal direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$. L'unité graphique est 2 cm.

Le but de cet exercice est d'étudier la similitude plane indirecte f d'écriture complexe :
$$z' = \text{i}\sqrt{2}\overline{z} + 2\text{i}\sqrt{2} - 2,$$
et d'en donner deux décompositions.

I. Restitution organisée de connaissances

On rappelle que l'écriture complexe d'une similitude plane directe autre qu'une translation est de la forme $z' = az+b$, où a et b sont des nombres complexes avec $a \neq 1$.

Déterminer en fonction de a et de b l'affixe du centre d'une telle similitude plane directe.

II. Première décomposition de f
Soit g la similitude plane directe d'écriture complexe :

$$z' = \mathrm{i}\sqrt{2}z + 2\mathrm{i}\sqrt{2} - 2.$$

1. Préciser les éléments caractéristiques de g (centre, rapport, angle).
2. Déterminer une réflexion s telle que $f = g \circ s$,

III. Deuxième décomposition de f

1. Montrer que f admet un unique point invariant noté Ω. Déterminer l'affixe ω de Ω.
2. Soit $\mathscr{D}$ la droite d'équation : $y = x + 2$.
   Montrer que pour tout point N appartenant à $\mathscr{D}$, le point $f(N)$ appartient aussi à $\mathscr{D}$.
3. Soit σ la réflexion d'axe $\mathscr{D}$ et k la transformation définie par : $k = f \circ \sigma$.
   a. Donner l'écriture complexe de σ.
   (Indication : on pourra poser $z' = a\mathrm{i} + b$ et utiliser deux points invariants par σ pour déterminer les nombres complexes a et b.)
   b. En déduire que l'écriture complexe de k est : $z' = \sqrt{2}z + 2\sqrt{2} - 2$.
   c. Donner la nature de la transformation k et préciser ses éléments caractéristiques.
4. Déduire de ce qui précède une écriture de la similitude indirecte f comme composée d'une réflexion et d'une homothétie,

EXERCICE 3 **4 points**
Commun à tous les candidats
Dans un plan muni d'un repère orthononnal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, f et f' ne s'annulant pas sur l'intervalle I.
On note M un point de $\mathscr{C}$ d'abscisse x et d'ordonnée $y = f(x)$.
On désigne par $\mathscr{T}$ la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point M.
On rappelle qu'une équation de $\mathscr{T}$ est de la forme : $Y = f'(x)[X - x] + f(x)$.

I. Question préliminaire

1. Montrer que $\mathscr{T}$ coupe l'axe des abscisses en un point H dont l'abscisse X_T vérifie :
$$X_T = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$
2. Montrer que $\mathscr{T}$ coupe l'axe des ordonnées en un point K dont l'ordonnée Y_T vérifie :
$$Y_T = f(x) - xf'(x).$$

II. k désigne un réel fixé non nul. On cherche à déterminer les fonctions f pour lesquelles la différence $x - X_T$ est constante, et égale à k, pour tout nombre réel x. (Propriété 1)

1. Démontrer que f vérifie la propriété 1 si et seulement si f vérifie l'équation différentielle :
$$y' = \frac{1}{k}y$$
2. En déduire la famille des fonctions vérifiant la propriété 1 et déterminer pour $k = \frac{1}{2}$ la fonction f de cette famille qui vérifie de plus la condition : $f(0) = 1$.

III. k désigne un réel fixé non nul. On cherche à déterminer les fonctions f pour lesquelles la différence $y - Y_T$ est constante et égale à k, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $\text{I} =]0~;~+\infty[$. (Propriété 2)

1. Démontrer que f vérifie la condition posée si et seulement si f vérifie l'équation différentielle :

$$y' = \frac{k}{x}.$$

2. En déduire la famille des fonctions vérifiant la propriété 2 et déterminer pour $k = \frac{1}{2}$ la fonction f de cette famille qui vérifie la condition : $f(1) = 0$.

Exercice 4 **7 points**

Commun à tous les candidats

Le but de l'exercice est de montrer que l'équation (E) : $\text{e}^x = \frac{1}{x}$, admet une unique solution dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, et de construire une suite qui converge vers cette unique solution.

I. Existence et unicité de la solution

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - \text{e}^{-x}$.

1. Démonter que x est solution de l' équation (E) si et seulement si $f(x) = 0$.

2. Étude du signe de la fonction f

a. Étudier le sens de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

b. En déduire que l'équation (E) possède une unique solution sur $\mathbb{R}$, notée α.

c. Démontrer que α appartient à l'intervalle $\left[\frac{1}{2}~;~1\right]$.

d. Étudier le signe de f sur l'intervalle $[0~;~\alpha]$.

II. Deuxième approche

On note g la fonction définie sur l'intervalle $[0~;1]$ par : $g(x) = \frac{1+x}{1+\text{e}^x}$.

1. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à l'équation $g(x) = x$.

2. En déduire que α est l'unique réel vérifiant : $g(\alpha) = \alpha$.

3. Calculer $g'(x)$ et en déduire que la fonction g est croissante sur l'intervalle $[0~;~\alpha]$.

III. Construction d'une suite de réels ayant pour limite α

On considéra la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, par : $u_{n+1} = g(u_n)$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$.

2. En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.

3. Justifier l'égalité : $g(\ell) = \ell$. En déduire la valeur de ℓ.

4. À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée de u_4 arrondie à la sixième décimale.

Baccalauréat S France 15 juin 2007

EXERCICE 1 **3 points**

Commun à tous les candidats

L'espace est muni du repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. Soient (P) et (P′) les plans d'équations respectives $x+2y-z+1=0$ et $-x+y+z=0$. Soit A le point de coordonnées (0 ; 1 ; 1).

1. Démontrer que les plans (P) et (P′) sont perpendiculaires.
2. Soit (d) la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -\dfrac{1}{3}+t \\ y & = & -\dfrac{1}{3} \\ z & = & t \end{array}\right. \quad \text{où } t \text{ est un nombre réel.}$$

   Démontrer que les plans (P) et (P′) se coupent selon la droite (d).
3. Calculer la distance du point A à chacun des plans (P) et (P′).
4. En déduire la distance du point A à la droite (d).

EXERCICE 2 **3 points**

Commun à tous les candidats

1. **Restitution organisée de connaissances**
   Démontrer la formule d'intégration par parties en utilisant la formule de dérivation d'un produit de deux fonctions dérivables, à dérivées continues sur un intervalle $[a ; b]$.
2. Soient les deux intégrales définies par

$$\mathrm{I}=\int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \sin x\,\mathrm{d}x \quad \text{et } \mathrm{J}=\int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \cos x\,\mathrm{d}x.$$

   a. Démontrer que $1=-\mathrm{J}$ et que $\mathrm{I}=\mathrm{J}+\mathrm{e}^{\pi}+1$.
   b. En déduire les valeurs exactes de I et de J.

EXERCICE 3 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

On considère l'équation :

$$(\mathrm{E}) \quad z^3-(4+\mathrm{i})z^2+(13+4\mathrm{i})z-13\mathrm{i}=0$$

où z est un nombre complexe.

1. Démontrer que le nombre complexe i est solution de cette équation.
2. Déterminer les nombres réels a, b et c tels que, pour tout nombre complexe z on ait :

$$z^3-(4+\mathrm{i})z^2+(13+4\mathrm{i})z-13\mathrm{i}=(z-\mathrm{i})\left(az^2+bz+c\right).$$

3. En déduire les solutions de l'équation (E).

Partie B

Dans le plan complexe, rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on désigne par A, B et C les points d'affixes respectives i, $2+3\text{i}$ et $2-3\text{i}$.

1. Soit r la rotation de centre B et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$. Déterminer l'affixe du point A′, image du point A par la rotation r.
2. Démontrer que les points A′, B et C sont alignés et déterminer l'écriture complexe de l'homothétie de centre B qui transforme C en A′.

EXERCICE 3 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

La figure est proposée en annexe 1. *Elle sera complétée tout au long de l'exercice.*

Dans le plan complexe, rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère les points A, B et C, d'affixes respectives $-5+6\text{i}$, $-7-2\text{i}$ et $3-2\text{i}$. On admet que le point F, d'affixe $-2+\text{i}$ est le centre du cercle Γ circonscrit au triangle ABC.

1. Soit H le point d'affixe -5. Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude directe de centre A qui transforme le point C en le point H.
2. **a.** Étant donné des nombres complexes z et z', on note M le point d'affixe z et M' le point d'affixe z'. Soient a et b des nombres complexes.
Soit s la transformation d'écriture complexe $z' = a\overline{z}+b$ qui, au point M, associe le point M'.
Déterminer a et b pour que les points A et C soient invariants par s. Quelle est alors la nature de s ?
b. En déduire l'affixe du point E, symétrique du point H par rapport à la droite (AC).
c. Vérifier que le point E est ùn point du cercle Γ.
3. Soit I le milieu du segment [AC].
Déterminer l'affixe du point G, image du point I par l'homothétie de centre B et de rapport $\dfrac{2}{3}$.
Démontrer que les points H, G et F sont alignés.

EXERCICE 4 **4 points**

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.

Pour chaque question, une seule des propositions est exacte. On donnera sur la feuille la réponse choisie sans justification. Il sera attribué un point si la réponse est exacte, zéro sinon.

Dans certaines questions, les résultats proposés ont été arrondis à 10^{-3} *près.*

1. Un représentant de commerce propose un produit à la vente. Une étude statistique a permis d'établir que, chaque fois qu'il rencontre un client, la probabilité qu'il vende son produit est égale à 0,2. Il voit cinq clients par matinée en moyenne. La probabilité qu'il ait vendu exactement deux produits dans une matinée est égale à :
a. 0,4 b. 0,04 c. 0,1024 d. 0,2048
2. Dans une classe, les garçons représentent le quart de l'effectif. Une fille sur trois a eu son permis du premier coup, alors que seulement un garçon sur dix l'a eu du premier coup. On interroge un élève (garçon ou fille) au hasard. La

probabilité qu'il ait eu son permis du premier coup est égale à :

a. 0,043 b. 0,275 c. 0,217 d. 0,033

3. Dans la classe de la question 2, on interroge un élève au hasard parmi ceux ayant eu leur permis du premier coup. La probabilité que cet élève soit un garçon est égale à :

a. 0,100 b. 0,091 c. 0,111 d. 0,25

4. Un tireur sur cible s'entraîne sur une cible circulaire comportant trois zones délimitées par des cercles concentriques, de rayons respectifs 10, 20 et 30 centimètres. On admet que la probabilité d'atteindre une zone est proportionnelle à l'aire de cette zone et que le tireur atteint toujours la cible. La probabilité d'atteindre la zone la plus éloignée du centre est égale à :

a. $\frac{5}{9}$ b. $\frac{9}{14}$ c. $\frac{4}{7}$ d. $\frac{1}{3}$

EXERCICE 5 **5 points**

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x - \frac{\ln(1+x)}{1+x}.$$

La courbe $\mathscr{C}$ représentative de f est donnée sur le document annexe 2 que l'on complétera et que l'on rendra avec la copie.

Partie A : Étude de certaines propriétés de la courbe $\mathscr{C}$

1. On note f' la fonction dérivée de f. Calculer $f'(x)$ pour tout x de l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$.

2. Pour tout x de l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$, on pose $N(x) = (1+x)^2 - 1 + \ln(1+x)$.
Vérifier que l'on définit ainsi une fonction strictement croissante sur $]-1\,;\,+\infty[$.
Calculer $N(0)$. En déduire les variations de f.

3. Soit $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y = x$. Calculer les coordonnées du point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite $\mathscr{D}$.

Partie B : Étude d'une suite récurrente définie à partir de la fonction f

1. Démontrer que si $x \in [0\,;\,4]$, alors $f(x) \in [0\,;\,4]$.

2. On considère la suite (u_n) définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 4 \text{ et} \\ u_{n+1} & = & f(u_n) \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}. \end{array}\right.$$

a. Sur le graphique de l'annexe 2, en utilisant la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}$, placer les points de $\mathscr{C}$ d'abscisses u_0, u_1, u_2 et u_3.

b. Démontrer que pour tout n de $\mathbb{N}$ on a : $u_n \in [0\,;\,4]$.

c. Étudier la monotonie de la suite (u_n).

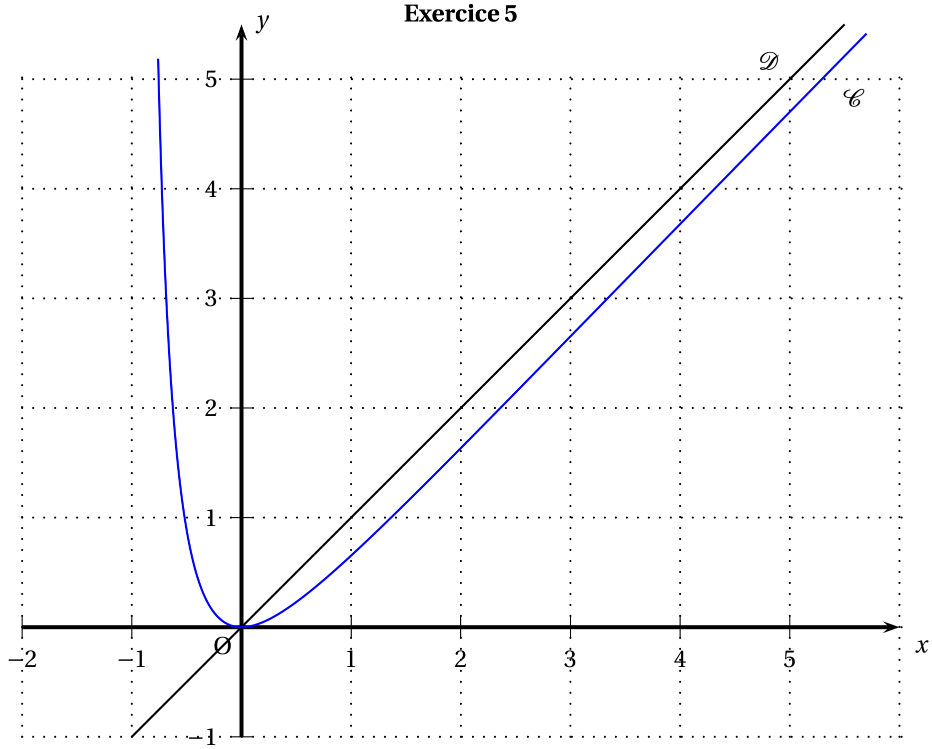
d. Démontrer que la suite (u_n) est convergente. On désigne par ℓ sa limite.

e. Utiliser la partie A pour donner la valeur de ℓ.

ANNEXE

À compléter et à rendre avec la copie

Exercice 5

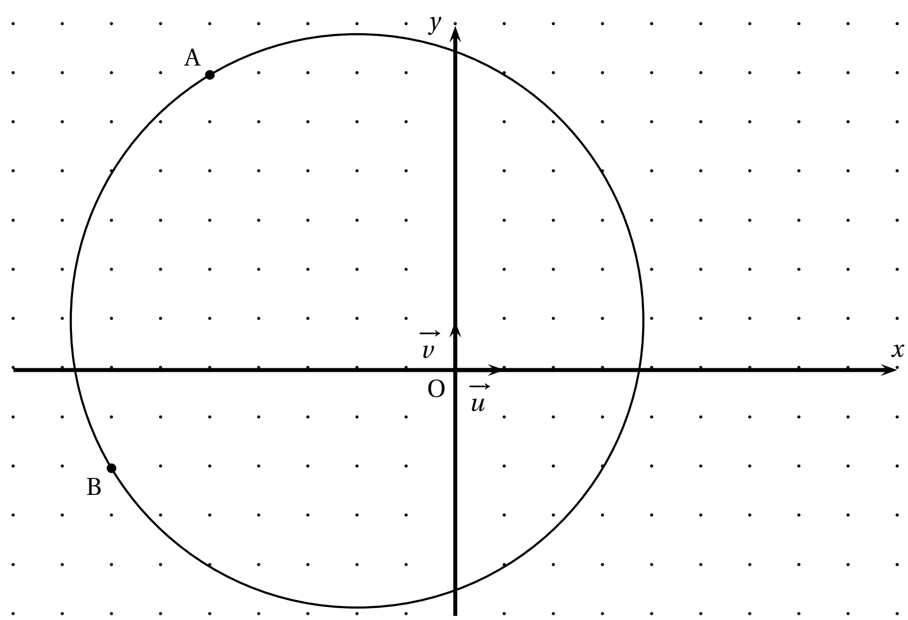


ANNEXE 1

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

À compléter et à rendre avec la copie

Exercice 3



Durée : 4 heures

Baccalauréat S La Réunion juin 2007

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats Soient a et b deux nombres réels strictement positifs tels que $a < b$.

On désigne par A et par B les points d'abscisses respectives a et b de la courbe Γ représentative de la fonction logarithme népérien dans un repère orthononnal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Les points Q et R sont les projetés orthogonaux respectifs des points A et B sur l'axe des ordonnées.

1. **a.** Donner l'équation réduite de la tangente (T) au point A à la courbe Γ.

   b. Déterminer l'ordonnée du point d'intersection P de (T) avec l'axe des ordonnées.
   Calculer la longueur PQ. En déduire une construction simple de (T) ; la réaliser sur la figure en annexe).
2. **Restitution organisée de connaissances**
   On suppose connue la propriété :
   « Pour tout couple $(x\,;\,y)$ de nombres réels strictement positifs, on a $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$. »
   En déduire que, pour tout nombre réel m strictement positif, on a $\ln\left(\sqrt{m}\right) = \dfrac{1}{2}\ln(m)$.
3. Utiliser le résultat de la question 2 pour placer sur l'axe des abscisses le point G d'abscisse $\sqrt{ab}$. Expliquer la construction et la réaliser sur la figure de l'annexe 1 (on laissera les traits de construction apparents).

EXERCICE 2 **4 points**

Commun à tous les candidats

Soit a un nombre réel tel que $-1 < a < 0$.

On considère la suite u définie par $u_0 = a$, et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n^2 + u_n$.

1. Étudier la monotonie de la suite u.
2. **a.** Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^2 + x$. Étudier le sens de variations de la fonction h.
   En déduire que pour tout x appartenant à l'intervalle $]-1\,;\,0[$, le nombre $h(x)$ appartient aussi à l'intervalle $]-1\,;\,0[$.

   b. Démontrer que pour tout entier naturel n on a : $-1 < u_n < 0$.
3. Étudier la convergence de la suite u. Déterminer, si elle existe, sa limite.

EXERCICE 3 **6 points**

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) &= \dfrac{x\text{e}^x}{\text{e}^x - 1} \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) &= 1. \end{cases}$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. **a.** Déterminer la limite de f en $-\infty$.

b. Établir que, pour tout nombre réel x non nul, on a $f(x) = x\left(1 + \dfrac{1}{\text{e}^x - 1}\right)$.
En déduire la limite de f en $+\infty$.

2. Donner, sans démontrer, la limite suivante : $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x}{\text{e}^x - 1}$ et démontrer que f est continue en 0.

3. a. Démontrer que, pour tout nombre réel x, on a : $\text{e}^x \geqslant x+1$, et que l'égalité n'a lieu que pour $x = 0$.

b. Calculer la dérivée f' de la fonction f et déterminer la fonction g telle que, pour tout nombre réel x non nul, $f'(x) = \dfrac{\text{e}^x g(x)}{(\text{e}^x - 1)^2}$.

c. Donner le tableau des variations de f.

4. Soient x un nombre réel non nul et les points $M(x\ ;\ f(x))$ et $M'(-x\ ;\ f(-x))$ de la courbe $\mathscr{C}$.

a. Établir que $f(-x) = \dfrac{x}{\text{e}^x - 1}$, puis déterminer le coefficient directeur de la droite (MM').

b. On admet que la fonction f est dérivable en 0. Que suggère alors le résultat précédent ?

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats n 'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$. A, B, C désignent les points d'affixes respectives $a = -2\sqrt{3},\ b = \sqrt{3} - 3\text{i}$ et $c = 2\text{i}$.

1. a. Écrire b sous forme exponentielle.

b. Les points A et C sont représentés sur la figure jointe en annexe 2.
Construire à la règle et au compas le point B sur ce dessin (laisser les traces de construction apparentes).

2. On désigne par E le barycentre du système {(A ; 1) ; (C ; 3)} et par F le barycentre du système {(A ; 2) ; (B ; 1)}.

a. Établir que l'affixe e du point E est égale à $-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}\text{i}$.

b. Déterminer l'affixe f du point F.

3. a. Démontrer que le quotient $\dfrac{e-c}{e-b}$ peut s'écrire $k\text{i}$ où k est un nombre réel à déterminer.
En déduire que, dans le triangle ABC, le point E est le pied de la hauteur issue de B. Placer le point E sur le dessin.

b. Démontrer que le point F possède une propriété analogue. Placer F sur le dessin.

4. On désigne par H le barycentre du système {(A ; 2) ; (B ; 1) ; (C ; 6)}. Démontrer que le point H est le point d'intersection des droites (BE) et (CF).
Qu'en déduit-on pour le point H ?

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement d spécialité

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$. A, B, C, désignent les points d'affixes respectives $a = -2\sqrt{3},\ b = \sqrt{3} - 3\text{i}$ et $c = 2\text{i}$.

1. a. Écrire b sous forme exponentielle.

b. Les points A et C sont représentés sur la figure jointe en annexe 2.
Construire à la règle et au compas le point B sur ce dessin (laisser les traces de construction apparentes).

c. Déterminer une mesure en radians de l'angle $\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{\text{AB}}\right)$ et de l'angle $\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{\text{AC}}\right)$.

2. Les points E et F ont pour affixes respectives $e = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}\text{i}$ et $f = -\sqrt{3} - \text{i}$.

a. Démontrer que les points A, E et C, d'une part, et les points A, F et B, d'autre part, sont alignés,

b. Démontrer que le quotient $\dfrac{e-c}{e-b}$ peut s'écrire $k\text{i}$ où k est un nombre réel à déterminer.
Interpréter géométriquement ce résultat.
On admet que, de façon analogue, $\dfrac{f-c}{f-b}$ peut s'écrire $k'\text{i}$ où k' est un nombre réel non nul que l'on ne demande pas de déterminer.

c. Placer les points E et F sur la figure.

3. On désigne par S la similitude indirecte dont l'écriture complexe est

$$z \longmapsto \frac{1}{2}\overline{z} - \sqrt{3}.$$

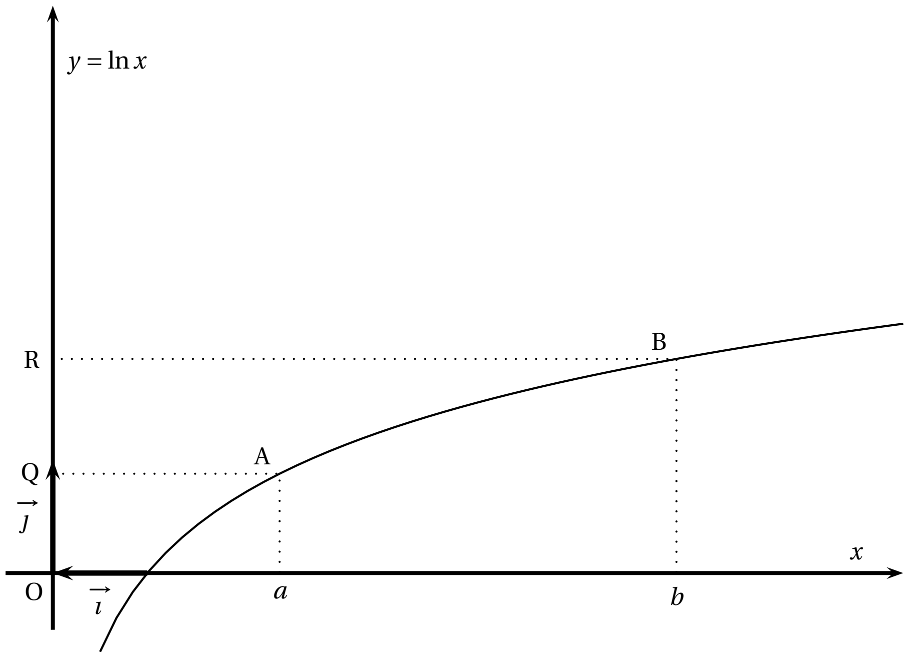
Déterminer les images par S des trois points A, B et C.

4. Soit H le point d'intersection des droites (BE) et (CF). Placer le point S(H) sur la figure.

ANNEXE 1

(*À rendre avec la copie)*

Exercice 1



Baccalauréat S Polynésie juin 2007

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Pour réaliser une loterie, un organisateur dispose d'une part d'un sac contenant exactement un jeton blanc et 9 jetons noirs indiscernables au toucher et d'autre part d'un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
Il décide des règles suivantes pour le déroulement d'une partie.
Le joueur doit tirer un jeton puis jeter le dé :

- si le jeton est blanc, le joueur perd lorsque le jet du dé donne 6 ;
- si le jeton est noir, le joueur gagne lorsque le jet du dé donne 6. À la fin de la partie, le jeton est remis dans le sac.

On note B l'évènement « le jeton tiré est blanc » et G l'évènement « le joueur gagne le jeu ». L'événement contraire d'un évènement E sera noté . La probabilité d'un évènement E sera notée $p(\text{E})$.

Partie A

1. Montrer que $p(\text{G}) = \dfrac{7}{30}$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
2. Quelle est la probabilité que le joueur ait tiré le jeton blanc sachant qu'il a perdu ?
3. Un joueur fait quatre parties de façon indépendante.
Calculer la probabilité qu'il en gagne exactement deux et en donner une valeur approchée à 10^{-3}, près.
4. Quel nombre minimal de parties un joueur doit-il faire pour que la probabilité d'en gagner au moins une soit supérieure à $0,99$?

Partie B

L'organisateur décide de faire de sa loterie un jeu d'argent :

- chaque joueur paie 1 € par partie ;
- si le joueur gagne la partie, il reçoit 5 € ;
- si le joueur perd la partie, il ne reçoit rien.

1. On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique (positif ou négatif) du joueur à l'issue d'une partie.
   a. Donner la loi de probabilité de X et son espérance $\text{E}(X)$.
   b. On dit que le jeu est favorable à l'organisateur si $\text{E}(X) < 0$. Le jeu est-il favorable à l'organisateur ?
2. L'organisateur décide de modifier le nombre n de jetons noirs (n entier naturel non nul) tout en gardant un seul jeton blanc. Pour quelles valeurs de l'entier n le jeu est-il défavorable à l'organisateur ?

EXERCICE 2 **4 points**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$. On prendra 1 cm pour unité graphique. Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Résoudre, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation :

$$\overline{z} - 3\text{i}z - 3 + 6\text{i} = 0,\ \ \overline{z} \text{ étant le conjugué de} z.$$

2. On considère le point A d'affixe $4-2\text{i}$.
Déterminer la forme algébrique de l'affixe du point B tel que OAB soit un triangle équilatéral de sens direct.

3. Soit D le point d'affixe 2i.

a. Représenter l'ensemble (E) des points M d'affixe z différente de 2i tels que :

$$\arg(z-2\text{i}) = \frac{\pi}{4} + k \times 2\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

b. Représenter l'ensemble (F) des points M d'affixe z tels que $z = 2\text{i}+2\text{e}^{\text{i}\theta}$, θ appartenant à $\mathbb{R}$.

4. À tout point M d'affixe $z \neq -2$, on associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = \dfrac{z-1}{\overline{z}+2}$.
Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z différente de -2 tels que $|z'| = 1$.

Exercice 3 **5 points**

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. on considère les points A $(1\,;3\,;2)$, B$(4\,;\,6\,;\,-4)$ et le cône (Γ) d'axe $\left(\text{O}, \vec{k}\right)$, de sommet O et contenant le point A.

Partie A

1. Montrer qu'une équation de (Γ) est $x^2+y^2 = \dfrac{5}{2}z^2$.

2. Soit (P) le plan parallèle au plan $(x\text{O}y)$ et contenant le point B.

a. Déterminer une équation de (P).

b. Préciser la nature de l'intersection (C_1) de (P) et de (Γ).

3. Soit (Q) le plan d'équation $y=3$. On note (C_2) l'intersection de (Γ) et de (Q).
Sans justification, reconnaître la nature de (C_2) parmi les propositions suivantes :

- deux droites parallèles ;
- deux droites sécantes ;
- une parabole ;
- une hyperbole ;
- un cercle.

Partie B Soient x, y et z trois entiers relatifs et M le point de coordonnées (x, y, z). Les ensembles (C_1) et (C_2) sont les sections définies dans la partie A.

1. On considère l'équation (E) : $x^2+y^2 = 40$ où x et y sont des entiers relatifs.

a. Résoudre l'équation (E).

b. En déduire l'ensemble des points de (C_1) dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

2. **a.** Démontrer que si le point M de coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ où x, y et z désignent des entiers relatifs est un point de (Γ) alors z est divisible par 2 et x^2+y^2 est divisible par 10.

b. Montrer que si M est un point de (C_2), intersection de (Γ) et de (Q), alors $x^2 \equiv 1$ modulo 10.

c. Résoudre, dans l'ensemble des entiers relatifs, l'équation $x^2 \equiv 1$ modulo 10.

d. Déterminer un point de (C_2), distinct de A, dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

EXERCICE 3 **5 points**

Enseignement obligatoire

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les points $\text{A}\left(\dfrac{2}{3}~;~-3~;~2\right)$ et $\text{B}\left(-\dfrac{4}{3}~;~0~;~-4\right)$.

On note I le milieu du segment [AB] et (S) la sphère de diamètre [AB].

1. Soit E le barycentre des points pondérés (A ; 2) et (B ; 1).
   a. Calculer les coordonnées de E.
   b. Montrer que l'ensemble (P) des points M de l'espace tels que $\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\| = 3\left\|\overrightarrow{MO}\right\|$ est le plan médiateur du segment [OE].
   c. Montrer qu'une équation du plan (P) est $y = -1$.
2. a. Calculer le rayon de la sphère (S) et la distance du centre I de la sphère au plan (P).
   En déduire que l'intersection (C) du plan (P) et de la sphère (S) n'est pas vide.
   b. Montrer qu'une équation de (C) dans le plan (P) est $\left(x+\dfrac{1}{3}\right)^2+(z+1)^2 = 12$.
   En déduire que (C) est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.
3. Soit D le point de coordonnées $\left(-\dfrac{1}{3}~;~-\dfrac{1}{2}~;~4\sqrt{3}-1\right)$.
   a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (ID).
   b. En déduire que la droite (ID) est sécante au cercle (C) en un point noté F dont on donnera les coordonnées.

EXERCICE 4 **6 points**

On considère la fonction f définie sur $]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = 1 + x\ln x.$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal (0 ; I, J) Toutes les aires considérées dans ce problème seront exprimées en unités d'aire.

Partie A

Le but de cette partie est de déterminer un encadrement de l'aire $\mathcal{A}$ du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}_f$, et les deux droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

On note M et N les points de $\mathcal{C}_f$ d'abscisses respectives 1 et 2, P et Q leurs projetés orthogonaux respectifs sur l'axe des abscisses. La figure est donnée en annexe.

1. a. Montrer que f est positive sur [1 ; 2].
   b. Montrer que le coefficient directeur de la droite (MN) est $2\ln 2$.
   c. Soit E le point d'abscisse $\dfrac{4}{\text{e}}$.
   Montrer que, sur l'intervalle [1 ; 2], le point E est l'unique point de $\mathcal{C}_f$ en lequel la tangente à $\mathcal{C}_f$ est parallèle à (MN).
   d. On appelle T la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point E.
   Montrer qu'une équation de T est : $y = (2\ln 2)x - \dfrac{4}{\text{e}} + 1$.
2. Soit g la fonction définie sur [1 ; 2] par : $g(x) = f(x) - \left[(2\ln 2)x - \dfrac{4}{\text{e}} + 1\right]$.
   a. Montrer que pour tout x de [1 ; 2] : $g'(x) = 1 + \ln\left(\dfrac{x}{4}\right)$.

b. Étudier les variations de g sur $[1\,;\,2]$ et en déduire la position relative de $\mathscr{C}_f$ et de la tangente T sur cet intervalle.

3. Soient M′ et N′ les points d'abscisses respectives 1 et 2 de la droite T. On admet que la courbe $\mathscr{C}_f$ reste sous la droite (MN) sur l'intervalle $[1\,;\,2]$ et que les points M′ et N′ ont des ordonnées strictement positives.

a. Calculer les aires des trapèzes MNQP et M′N′QP.

b. En déduire, à l'aide de la calculatrice, un encadrement de $\mathscr{A}$ d'amplitude 10^{-1}.

Partie B

Le but de cette partie est de déterminer la valeur exacte de $\mathscr{A}$.

1. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_1^2 x \ln x \, \mathrm{d}x$.

2. En déduire la valeur exacte de $\mathscr{A}$.

ANNEXE
Cette page ne sera pas à remettre avec la copie

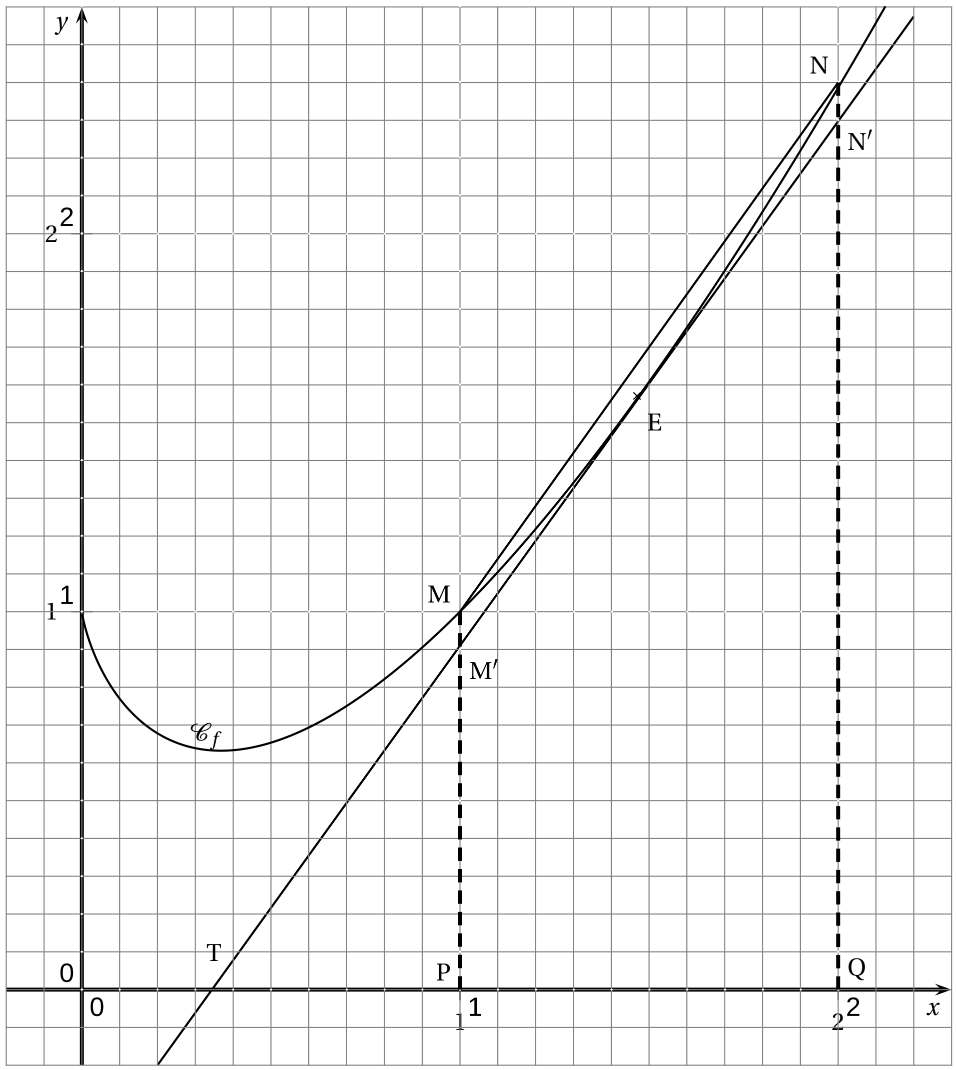


FIG. 1 – Annexe (à rendre avec la copie)