

∞ Baccalauréat S Métropole 23 juin 2009 ∞

EXERCICE 1

4 points

Commun à tous les candidats

Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.

1. On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et, pour tout nombre entier naturel } n, u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 4.$$

On pose, pour tout nombre entier naturel n , $v_n = u_n - 6$.

- a. Pour tout nombre entier naturel n , calculer v_{n+1} en fonction de v_n . Quelle est la nature de la suite (v_n) ?
 - b. Démontrer que pour tout nombre entier naturel n , $u_n = -5\left(\frac{1}{3}\right)^n + 6$.
 - c. Étudier la convergence de la suite (u_n) .
2. On considère la suite (w_n) dont les termes vérifient, pour tout nombre entier $n \geqslant 1$:

$$nw_n = (n+1)w_{n-1} + 1 \quad \text{et} \quad w_0 = 1.$$

Le tableau suivant donne les dix premiers termes de cette suite.

w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19

- a. Détailler le calcul permettant d'obtenir w_{10} .
 - b. Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.
- Donner la nature de la suite (w_n) . Calculer w_{2009} .

EXERCICE 2

6 points

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = \ln(1 + xe^{-x}).$$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

On note \mathcal{C} la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal. La courbe \mathcal{C} est représentée en annexe 1 (à rendre avec la copie).

PARTIE I

1. Justifier que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
2. Justifier que pour tout nombre réel positif x , le signe de $f'(x)$ est celui de $1 - x$.
3. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

PARTIE II

Soit λ un nombre réel strictement positif. On pose $\mathcal{A}(\lambda) = \int_0^\lambda f(x)dx$. On se propose de majorer $\mathcal{A}(\lambda)$ à l'aide de deux méthodes différentes.

1. Première méthode

- a. Représenter, sur l'annexe jointe (à rendre avec la copie), la partie du plan dont l'aire en unité d'aire, est égale à $\mathcal{A}(\lambda)$.
b. Justifier que pour tout nombre réel λ strictement positif, $\mathcal{A}(\lambda) \leq \lambda \times f(1)$.

2. Deuxième méthode

- a. Calculer à l'aide d'une intégration par parties $\int_0^\lambda xe^{-x} dx$ en fonction de λ .
b. On admet que pour tout nombre réel positif u , $\ln(1+u) \leq u$.
Démontrer alors que, pour tout nombre réel λ strictement positif,
 $\mathcal{A}(\lambda) \leq -\lambda e^{-\lambda} - e^{-\lambda} + 1$.

3. Application numérique

Avec chacune des deux méthodes, trouver un majorant de $\mathcal{A}(5)$, arrondi au centième. Quelle méthode donne le meilleur majorant dans le cas où $\lambda = 5$?

EXERCICE 3**5 points****Commun à tous les candidats****I. Cette question est une restitution organisée de connaissances.**

On rappelle que si n et p sont deux nombres entiers naturels tels que $p \leq n$ alors

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Démontrer que pour tout nombre entier naturel n et pour tout nombre entier naturel p tels que $1 \leq p \leq n$ on a : $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$.

II. Un sac contient 10 jetons indiscernables au toucher :

7 jetons blancs numérotés de 1 à 7 et 3 jetons noirs numérotés de 1 à 3.

On tire simultanément deux jetons de ce sac.

1. a. On note A l'évènement « obtenir deux jetons blancs ».

Démontrer que la probabilité de l'évènement A est égale à $\frac{7}{15}$.

- b. On note B l'évènement « obtenir deux jetons portant des numéros impairs ».

Calculer la probabilité de B.

- c. Les évènements A et B sont-ils indépendants ?

2. Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de jetons blancs obtenus lors de ce tirage simultané.

- a. Déterminer la loi de probabilité de X .

- b. Calculer l'espérance mathématique de X .

EXERCICE 4**5 points****Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on associe à tout point M d'affixe z non nulle, le point M' milieu du segment $[MM_1]$ où M_1 est le point d'affixe $\frac{1}{z}$.

Le point M' est appelé l'image du point M .

1.
 - a. Montrer que les distances OM et OM_1 vérifient la relation $OM \times OM_1 = 1$ et que les angles $(\vec{u} ; \overrightarrow{OM_1})$ et $(\vec{u} ; \overrightarrow{OM})$ vérifient l'égalité des mesures suivantes $(\vec{u} ; \overrightarrow{OM_1}) = -(\vec{u} ; \overrightarrow{OM})$ à 2π près.
 - b. Sur la figure donnée en annexe 2 (à rendre avec la copie) le point A appartient au cercle de centre O et de rayon 2.
Construire le point A' image du point A. (On laissera apparents les traits de construction).
2.
 - a. Justifier que pour tout nombre complexe z non nul, le point M' a pour affixe $z' = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$.
 - b. Soient B et C les points d'affixes respectives $2i$ et $-2i$. Calculer les affixes des points B' et C' images respectives des points B et C.
 - c. Placer les points B, C, B' et C' sur la figure donnée en annexe 2 (à rendre avec la copie).
3. Déterminer l'ensemble des points M tels que $M' = M$.
4. *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Montrer que si le point M appartient au cercle de centre O et de rayon 1 alors son image M' appartient au segment [KL] où K et L sont les points d'affixes respectives -1 et 1 .

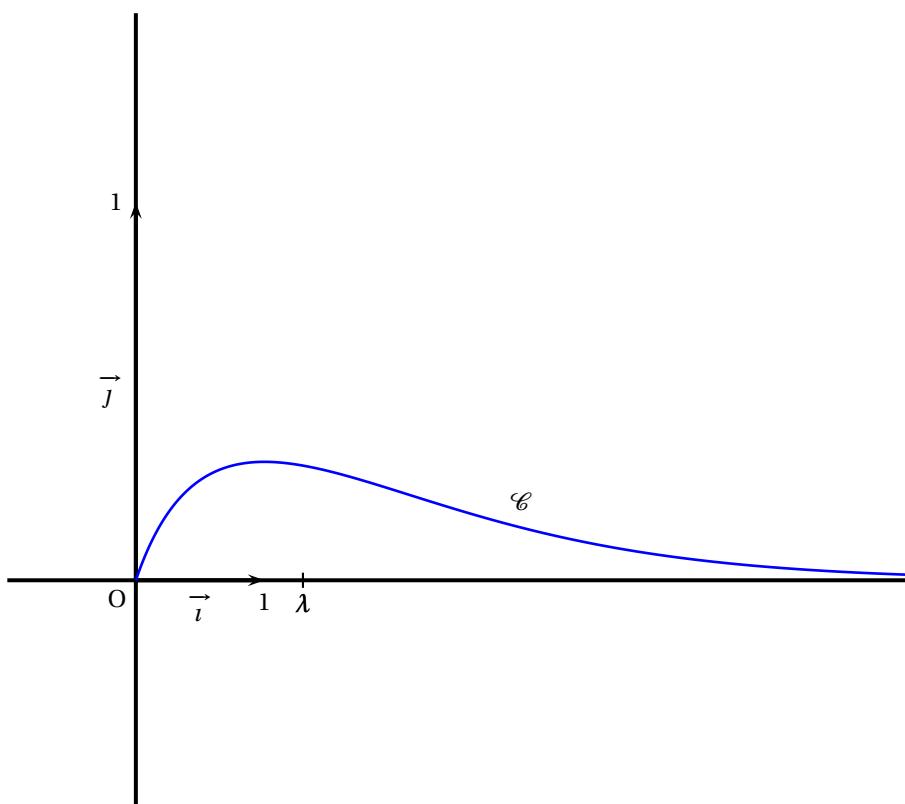
EXERCICE 4**5 points****Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

Les trois questions de cet exercice sont indépendantes.

1.
 - a. Déterminer l'ensemble des couples (x,y) de nombres entiers relatifs, solution de l'équation (E) : $8x - 5y = 3$.
 - b. Soit m un nombre entier relatif tel qu'il existe un couple (p, q) de nombres entiers vérifiant $m = 8p + 1$ et $m = 5q + 4$.
Montrer que le couple (p, q) est solution de l'équation (E) et en déduire que $m \equiv 9 \pmod{40}$.
 - c. Déterminer le plus petit de ces nombres entiers m supérieurs à 2 000.
2.
 - a. Démontrer que pour tout nombre entier naturel k on a : $2^{3k} \equiv 1 \pmod{7}$.
 - b. Quel est le reste dans la division euclidienne de 2^{2009} par 7 ?
3. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Soient a et b deux nombres entiers naturels inférieurs ou égaux à 9 avec $a \neq 0$. On considère le nombre $N = a \times 10^3 + b$. On rappelle qu'en base 10 ce nombre s'écrit sous la forme $N = \overline{a00b}$.
On se propose de déterminer parmi ces nombres entiers naturels N ceux qui sont divisibles par 7.
 - a. Vérifier que $10^3 \equiv -1 \pmod{7}$.
 - b. En déduire tous les nombres entiers N cherchés.

ANNEXE 1**Exercice 2**

(À rendre avec la copie)



ANNEXE 2**Exercice 4****Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

(À rendre avec la copie)

