Exercice 1

1. Les coordonnées des trois A, B et C vérifient bien l'équation $2x + 2y - z - 11 = 0$.

   De plus, ces trois points ne sont pas alignés et définissent donc bien un plan.

   De plus, l'équation $2x + 2y - z - 11 = 0$ est bien celle d'un plan.

   Donc, une équation du plan (ABC) est bien $2x + 2y - z - 11 = 0$.

2. Le point E est le projeté orthogonal de D sur (ABC) si et seulement si la droite (DE) est orthogonale au plan (ABC) et $E \in (ABC)$.

   Le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(2; 2; -1)$ est normal au plan (ABC)

   On a bien $E \in (ABC)$ mais les vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{n}$ ne sont pas colinéaires.

   On en déduit que (DE) n'est pas orthogonale à (ABC), donc E n'est pas le projeté orthogonal de D sur (ABC).

3. On vérifient simplement que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$, donc (AB) et (CD) sont orthogonales.

4. Le point (D) a pour coordonnées (1 , 0 , -2).

   Pour que l'équation paramètrique soit celle de (CD), il faut au moins qu'il existe un réel t tel que:

   $$\begin{cases} 1 & = & -1 + 2t \\ 0 & = & -1 + t \\ -2 & = & 1 - t \end{cases}$$

   On vérifie sans problème qu'une telle valeur t n'exsite pas, donc, ce n'est pas l'équation paramétrique de (CD).

5. On utlise les coordonnées des points pour voir que les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires, donc I est sur la droite (AB).

CONCLUSION

1. VRAI
2. FAUX
3. VRAI
4. FAUX
5. VRAI

Exercice 2

1. (a) $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^2e^{-x}\times e = +\infty}$ car $\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$

   $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x}\times e = 0}$

   La droite des abscisses est donc asymptote à la courbe de f en $+\infty$.

   (b) f est produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   De plus, $f'(x) = e^{1-x}(-x^2+2x)$.

   (c) Pour tout x réel, $e^{1-x} > 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $(-x^2+2x)$.
   $-x^2+2x = -x(x-2)$ d'où : $f'(x) \leq 0 \iff x \in]-\infty;0] \cup [2;+\infty[$.

   f est donc décroissante sur $]-\infty;0]$, puis croissante sur $[0;2]$ et enfin décroissante sur $[2;+\infty[$.

2. $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x}dx$

   (a) On a : $I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1}e^{1-x}dx$. Posons alors $u(x) = x^{n+1}$ et $v(x) = -e^{1-x}$.

   On a alors $u'(x) = (n+1)x^n$ et $v(-x) = e^{1-x}$.

   Donc,

   $$I_{n+1} = \int_0^1 u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u'(x)v(x)dx = [-x^{n+1}e^{1-x}]_0^1 + \int_0^1 (n+1)x^ne^{1-x}dx$$

   D'où $\boxed{I_{n+1} = -1+(n+1)I_n}$.

   (b) Pour le calcul de I_1, on effectue une intégration par parties:
   $I_1 = \int_0^1 xe^{1-x}dx = [-xe^{1-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{1-x}dx = [(-x-1)e^{1-x}]_0^1 = e-2$.

   D'après la question précédente, $I_2 = -1+2I_1 = -1+2(e-2) = 2e-5$

   (c) I_2 correspond à l'aire de la parie du plan délimitée par la courbe de f, les droites d'équations $x=0$ et $x=1$, et l'axe des abscisses.

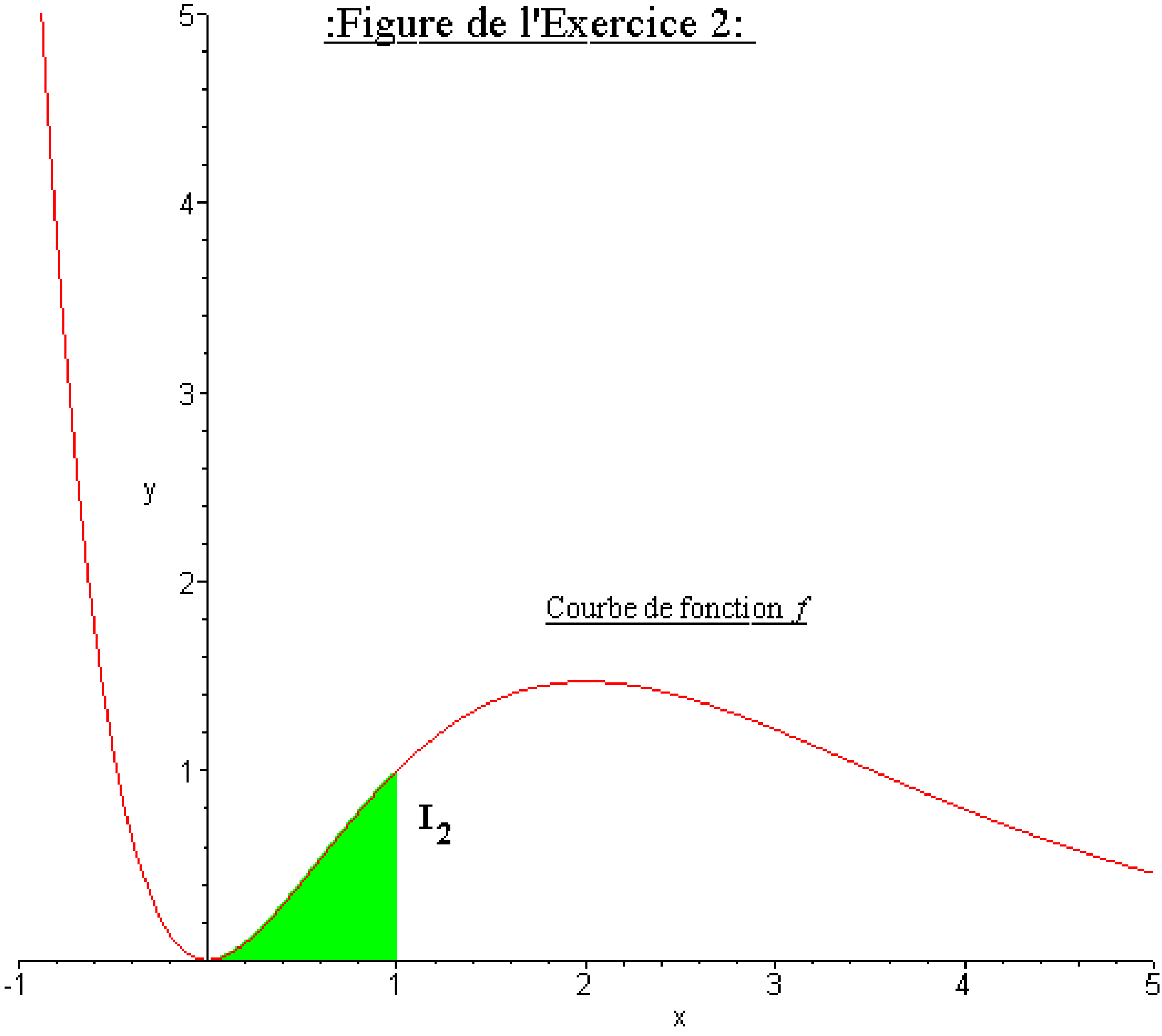
3. (a) Pour tout $x \in [0;1]$, on a: $0 \leq 1-x \leq 1$, donc comme (e^x) est croissante sur $\mathbb{R}$, on a:
   $e^0 \leq e^{1-x} \leq e^1$ d'où $1 \leq e^{1-x} \leq e$.
   Comme pour tout $x \in [0;1]$, $x^n \geq 0$, on a alors : $x^n \leq x^ne^{1-x} \leq e.x^n$.

   (b) On en déduit alors que : $\int_0^1 x^ndx \leq I_n \leq e\int_0^1 x^ndx$, d'où :

   $$\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$$

   Or, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, d'où,

   $$\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$$


:Figure de l'Exercice 2:
Courbe de fonction f
I_2
y
x
-1
1
2
3
4
5

Exercice 3 Spécialité

Partie A

1. **Théorème de Bézout:**
   Soit a et b deux entiers relatifs. Alors:
   a et b sont premiers entre eux si et seulement il existe u et v dans $\mathbb{Z}$ tels que $au + bv = 1$.

   Théorème de Gauss:
   Soit a, b et c trois entiers relatifs. Alors
   Si a divise bc et si a et b sont premiers entre eux, alors a divis c.

2. Si a et b sont premiers entre eux alors il existe u et v dans $\mathbb{Z}$ tel que $au + bv = 1$.
   D'où, en multiplant par c, $acu + bcv = c$.
   Si de plus, a divise bc, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $bc = ka$. On a alors $acu + kav = c$.
   D'où $a(cu + kv) = c$, donc a divise c.

Partie B

1. les entiers 19 et 12 sont premiers entre eux, donc, d'après le Théorème de bezout, il existe u et v entiers relatifs tels que $19u + 12v = 1$.

   $N = 13 \times 12v + 6 \times 19u$.
   Comme $19u + 12v = 1$, on a $19u \equiv 1[12]$ et $12v \equiv 1[19]$.
   Comme $N \equiv 13 \times 12v[19]$, on a: $N \equiv 13[19]$ De même: $N \equiv 6 \times 19v[12]$ donc $N \equiv 6[12]$.
   N est bien solution de (S).

2. (a) n_0 est solution de (S), ce qui signifie que $n_0 \equiv 13[19]$ et $n_0 \equiv 6[12]$
   Donc, n est solution de (S) si et seulement si $n \equiv n_0[19]$ et $n \equiv n_0[12]$.

   (b) $n \equiv n_0[19]$ signifie que $(n - n_0)$ est divisible par 19.
   $n \equiv n_o[12]$ signifie que $(n - n_0)$ est divisible par 12.
   Donc, le système équivaut à $(n - n_0)$ divisible par 19 et par 12.
   Or, 19 et 12 sont premiers entre eux, donc $(n - n_0)$ divisible par 19 et 12 équivaut à $(n - n_0)$ divisible par 19×12.
   ce qui est équivalent à $n \equiv n_0[19 \times 12]$.

   Voir remarque à la fin de cet exercice.

3. (a) Pour déterminer un couple solution de $19u + 12v = 1$, on peut utiliser l'algorithme d'Euclide.
   $19 = 1 \times 12 + 7$, $12 = 1 \times 7 + 5$, $7 = 1 \times 5 + 2$, $5 = 2 \times 2 + 1$
   Ce qui conduit à $-5 \times 19 + 8 \times 12 = 1$, d'où une solution (-5 ; 8).
   On peut aussi passer par les congruences et voir que si $(u; v)$ est solution,
   alors $19u \equiv 1[12]$. Or, $19u \equiv 7u[12]$ et $7 \times 7 \equiv 1[12]$.
   D'où une autre solution, (7 ; -11).
   Pour la solution (-5 ; 8), la valeur de N correspondante est : $N = 678$.
   Pour la solution (7 ; -11), la valeur de N correspondante est: $N = -918$.

(b) D'après le résultat de la question 2.b), on peut alors dire que n est solution de (S) si et seulement si:

$$n \equiv 678[12 \times 19] \text{ ou bien } n \equiv -918[12 \times 19]$$

C'est à dire, n de la forme :$228k + 678$ ou $228k - 918$, avec k entier relatif queconque. Comme $678 \equiv 222[228]$ ou encore $-918 \equiv 222[228]$, on peut tout aussi bien dire que n est solution de (S) si et seulement si $n = 228k + 222$ avec k entier relatif quelconque.

4. L'entier n vérifie ces conditions si et seulement si $n \equiv 13[19]$ et $n \equiv 6[12]$.

   Donc, si et seulement si n est solution de (S), donc si et seulement si $n = 228k + 222$, avec k dans $\mathbb{Z}$.

   Comme $222 \in \{0; 1; 2; \cdots ; 227\}$, l'écriture $n = 228k + 222$ est la division euclidienne de n par 228.

   Donc, le reste de cette division est 222.

Petites remarques concernant l'exercce de Spécialité

1. L'exercice proposé de résoudre l'équation

$$(S) : \begin{cases} n \equiv 13 \quad [19] \\ n \equiv 6 \quad [12] \end{cases}$$

   On a en fait un résultat très général, connu sous le nom de *Théorème des restes chinois*

Etant donné deux entiers naturels premiers entre m et n et supérieurs à 2. Alors, pour tout couple $(a\ ,\ b)$ d'éléments de $\mathbb{Z}$, il existe x dans $\mathbb{Z}$ tel que $\begin{cases} x \equiv a \quad [m] \\ x \equiv b \quad [n] \end{cases}$
De plus, pour tout $y \in \mathbb{Z}$, on a: $\begin{cases} y \equiv a \quad [m] \\ y \equiv b \quad [n] \end{cases} \Longleftrightarrow y \equiv x \quad [mn]$

2. Le Théorème de Gauss a deux conséquences classiques dont une est utlisée dans cet exercice.

   (a) $\boxed{\text{Si } a \text{ et } b \text{ sont premiers entre eux et si } c \text{ est divisible par } a \text{ et } b \text{ alors } c \text{ est divisible par } ab.}$

   Effectivement , on a:
   Il existe q et q' dans $\mathbb{Z}$ tels que $c = q.a$ et $c = q'.b$.
   De plus, d'après Bezout, il existe u et v dans $\mathbb{Z}$ tels que $au + bv = 1$.
   En multipliant par c, on obtient alors:
   $acu + bcv = c$ d'où $(q'.b)au + (q.a)bv = c$ d'où : $ab(q'.u + q.v) = c$.
   c est donc bien divisible par ab.

   (b) $\boxed{\text{Si } p \text{ est un nombre premier qui divise } ab \text{ avec } a \text{ et } b \text{ dans } \mathbb{Z}, \text{ alors } p \text{ divise } a \text{ ou } b.}$

   Ce résultat vient directement du fait que, si p premier ne divise pas un entier n, alors p et n sont premiers entre eux.
   Donc, si p divise ab mais ne divise pas (par exemple ....) b, alors p et b sont premiers entre eux, donc, d'après Gauss, p divise a.

Exercice 4

On sait que la probabilité de crever le ballon sur un tir est $0,2$.
Donc la probabilité de ne pas crever le ballon sur un tir est $0,8$.
De plus, les tirs successifs sont supposés indépendants.

1. Appelons C_k l'événement "le ballon est crevé au k-ème tir.

   L'événement contaire de C_k est noté $\overline{C_k}$.

   Par hypothèse, les événements C_k et C_m sont indépendants si $k \neq m$.

   (a) L'événements "Le ballon est intact au bout de 2 tirs" est "$\overline{C_1} \cap \overline{C_2}$".
   Comme $\overline{C_1}$ est $\overline{C_2}$ sont indépendants, on a :

   $$P(\overline{C_1} \cap \overline{C_2}) = P(\overline{C_1}) \times P(\overline{C_2}) = 0,8 \times 0,8 = 0,64$$

   Donc, la probabilité d'avoir un ballon intact au bout de 2 tirs est 0,64.

   (b) Il faut bien comprendre la question ! On veut la probabilité que 2 tirs suffissent pour crever le ballon, et non la probabilité que 2 tirs soient nécessaires pour crever le ballon!
   L'événement contraire de "2 tirs suffisent pour crever le ballon" est "Ballon non crevé après 2 tirs".
   On a donc: Probailité que 2 tirs suffisent pour crever le ballon = 1 - 0,64 = 0,36.

   (c) C'est la même démarche que pour la question prcédente.
   L'événement "n tirs suffisent pour crever le ballon" est le contraire de "Ballon non crevé après n tirs" .
   Or, l'événement "Ballon non crevé après n tirs" est $\overline{C_1} \cap \overline{C_2} \cap \cdots \cap \overline{C_n}$.
   Ces événements sont indépendants 2 à 2 , et ont tous pour probabilité 0,8, donc:

   $$P(\overline{C_1} \cap \overline{C_2} \cap \cdots \cap \overline{C_n}) = (0,8)^n$$

   D'où : Probabilité que n tirs suffisent pour crever le ballon = 1 - $(0,8)^n$
   Donc, $p_n = 1 - (0,8)^n$.

   (d) On cherche n tel que $p_n > 0,99$, c'est à dire, tel que $1 - (0,8)^n > 0,99$ ou encore, tel que

   $$(0,8)^n < 0,01$$

   En utilisant alors la fonction ln qui strictement croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$, on a alors:

   $$n > \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,8)}$$

   D'où, comme n est entier,

   $$n \geq 21$$

   (e) Passons par l'événement contraire, et les probabilités conditionnelles.
   La probabilité P_k qu'en lançant le dé, on obtienne la face k , pour $k \in \{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\}$ est

   $$P_k = \frac{1}{4}$$

   Donc, la probabilité de ne pas crever le ballon, sachant que la face k a été obtenue est

   $$\frac{1}{4} \times (0,8)^k$$

Donc, d'après la loi des probabilités totales , la probabilité de ne pas crever le ballon est

$$\sum_{k=1}^{4} \frac{1}{4} \times (0,8)^k = \frac{1}{4} \times 0,8 \times \frac{1-(0,8)^4}{1-(0,8)} = 0,5904$$

D'où, la probabilité de crever le ballon est

$$1 - 0,5904 = 0,4096$$

(f) Rien de spécial ... on fait le calcul des fréquences ...

Face k	1	2	3	4
Nombres de sorties de la face k	58	49	52	41
Fréquence f_k	0,29	0,245	0,26	0,205

(g) D'où la calcul de d^2.

$$d^2 = \sum_{k=1}^{4} \left(\frac{1}{4} - f_k\right)^2$$

$$d^2 = (0,29-0,25)^2 + (0,245-0,25)^2 + (0,26-0,25)^2 + (0,205-0,25)^2 = 0,00375$$

(h) On constate que $d^2 > D_9$, donc la valeur de d^2 est conforme avec 90% des résultats de la similation sur un dé bien équilibré.

Donc, en acceptant un risque de 10%, on ne peut pas considérer que le dé soit pipé.