Durée : 4 heures

Corrigé du baccalauréat S France septembre 2005

EXERCICE 1 **5 points**

Partie A

1. En posant $X = \dfrac{x}{2}$, on a $f(X) = (40X+10)\mathrm{e}^{-X} = 40\dfrac{X}{\mathrm{e}^X} + \dfrac{10}{\mathrm{e}^X}$. La limite de ces deux termes en plus l'infini est nulle :

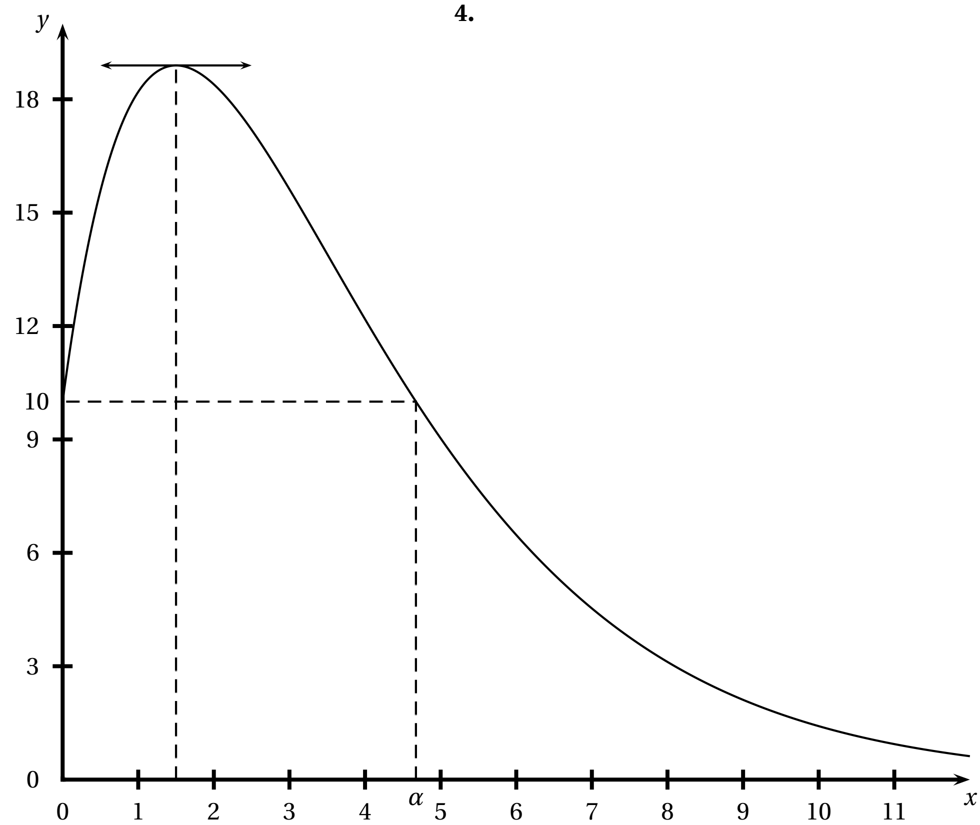
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

2. $f'(x) = (20-10x-5)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} = (15-10x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$ qui est du signe de $(15-10x)$ car $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} > 0$. Cette dérivée s'annule en $\dfrac{3}{2}$. D'où le tableau de variations :

x	0		$3/2$		α		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$			
f	10	$\nearrow$	$40\mathrm{e}^{-3/4}$	$\searrow$	10	$\searrow$	0

3. Sur $]0~;~3/2]$, $f(x) > 10$, donc l'équation $f(x) = 10$ n'a pas de solution ; sur l'intervalle $]3/2~;~+\infty[$, la fonction f est continue (car dérivable, monotone décroissante de $40\mathrm{e}^{-3/4} \approx 18,9$ à 0. Il existe donc un réel unique $\alpha \in]3/2~;~+\infty[$ tel que $f(x) = 10$. La calculatrice donne $\alpha \approx 4,673$.

4.



5. On intègre I par parties. En posant : $\begin{cases} u(x) = 20x+10 & v'(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} \\ u'(x) = 20 & v(x) = -2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} \end{cases}$

On a $\mathrm{I} = \left[-2(20x+10)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\right]_0^3 + \int_0^3 40\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\mathrm{d}x = \left[-2(20x+10)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\right]_0^3 - \left[80\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\right]_0^3 =$ $\left[-40x-100\mathrm{e}^{-3/2}\right]_0^3 = 100-220\mathrm{e}^{-3/2}$.

$$\mathrm{I} = 100-220\mathrm{e}^{-3/2} \approx 50,91 \text{ (u.a.)}$$

Partie B

1. On a effectivement $f(t)+\frac{1}{2}f'(t) = (15-10t)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}+(10t+5)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t} = 20\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$. Donc f est une solution de (E) sur $[0 ; +\infty[$.

2. **a.** Par définition on a $g'(t)+\frac{1}{2}g(t) = 20\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$ et $g(0) = 10$. On vient de voir que $f(t)+\frac{1}{2}f'(t) = 20\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$ d'où par différence de ces deux équations : $g'-f'+\frac{g}{2}-\frac{f}{2} = 0 \iff (g-f)'+\frac{1}{2}(g-f) = 0$.
Conclusion : la fonction $g-f$ est solution, sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, de l'équation différentielle : (E′) $y'+\frac{1}{2}y = 0$.

   b. Les solutions de l'équation (E′) sont les fonctions $t \longmapsto K\mathrm{e}^{-t/2}$.

   c. La fonction $(g-f)$ est l'une de ces solutions. Or $(g-f)(0) = g(0)-f(0) = K = 10-10 = 0$. La fonction $g-f$ est donc la fonction nulle.
Conclusion : l'équation différentielle (E) a une solution unique vérifiant $y'(0) = 10$, c'est la fonction f de la **partie A**.

3. D'après la question **3.** de la partie A, cela correspond à la valeur α telle que $f(\alpha) = 10$. On a vu que $\alpha \approx 4,673\text{h} \approx 4$ h 41min.

4. $\theta = \dfrac{1}{3-0}\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{100-220\mathrm{e}^{-3/2}}{3} \approx 17$ (degrés).

EXERCICE 2 — 5 points

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

1. On a $z = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{3}}$; donc $z^{14} = (\sqrt{2})^{14}\mathrm{e}^{\frac{14\mathrm{i}\pi}{3}} = 2^7\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}} = 128\left(-\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right) =$
$z^{14} = -64+64\mathrm{i}\sqrt{3}$.
Réponse C

2. $|z-3| = |3-4\mathrm{i}| = 5 \iff \mathrm{S}M = 3 \iff M$ appartient au cercle de centre S et de rayon 3.
Réponse D

3. D'après le théorème d'Al-Kashi les diagonales AC a pour longueur $\sqrt{1^2+1^2-2\cos 120} = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$.
ACF est un triangle rectangle en A, donc CF = 2. $\overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CF}} = -\mathrm{AC} \times \mathrm{CA} = -3$.
Réponse : B

4. $g(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-2x}}{x-3} = g(x) = \dfrac{\sqrt{x^2\left(1-\frac{2}{x}\right)}}{x-3} = \dfrac{-x\sqrt{1-\frac{2}{x}}}{x-3} = \dfrac{-\sqrt{1-\frac{2}{x}}}{1-\frac{3}{x}}$ (en effet pour $x \leqslant 0$, $\sqrt{x^2} = |x| = -x$).
La limite du dénominateur est -1 et celle du numérateur au voisinage de moins l'infini estégale à 1, donc leur quotient a pour limite -1.
Réponse : A (au voisinage de moins l'infini).

5. On a par définition $f'(x) = \int_0^x e^{-x^2}$ et en dérivant par rapport à x,
$f''(x) = -2xe^{-x^2}$.
Réponse : C

EXERCICE 2 — 5 points

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

1. Réponse **D**

2. Réponse **C**

3. Réponse **C**

4. Réponse **A**

5. Réponse **D**

EXERCICE 3 — 5 points

1. Un vecteur normal au plan $\mathscr{R}$ est le vecteur $\overrightarrow{r}\,(1\,;\,2\,;\,0)$. Or $\overrightarrow{r}\cdot\overrightarrow{n} = -2+2+0 = 0$. Ces vecteurs étant orthogonaux, les plans sont perpendiculaires.

2. Équation du plan $\mathscr{P}$. Son équation est de la forme $-2x+y+5z+d=0$ et $\mathrm{B}\in\mathscr{P} \iff -2-2+5+d=0 \iff d=-1$. Une équation de $\mathscr{P}$ est donc $-2x+y+5z-1=0$.
Les points communs aux deux plans vérifient les deux équations. On résout donc :
$\begin{cases} x+2y \quad -7 & = \; = 0 \\ -2x+y+5z-1 & = \; 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+2y & = \; 7 \\ -2x+y & = \; -5z+1 \end{cases} \Longrightarrow 5x = 10z+5 \iff x = 2z+1$ et en reportant dans l'une des des équations du plan,
$y = -z+3$.
Les deux plans étant perpendiculaires, leur intersection est bien une droite Δ défini par les équations $\begin{cases} x = 2z+1 \\ y = -z+3 \\ z = z \end{cases}$ ou en remplaçant z par t : $\begin{cases} x = 2t+1 \\ y = -1t+3 \\ z = 1t+0 \end{cases}$.
Ceci est l'équation d'une droite ayant pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}\,(2\,;\,-1\,;\,1)$ et l'on vérifie aisément que pour $t=-1$, elle contient le point $\mathrm{C}(-1\,;\,4\,;\,-1)$.

3. On a $d(\mathrm{A},\,\mathscr{P}) = \dfrac{|-10-2-5-1|}{\sqrt{4+1+25}} = \dfrac{18}{\sqrt{30}} = \dfrac{18\sqrt{30}}{30} = \dfrac{3\sqrt{30}}{5}$.
De même $d(\mathrm{A},\,\mathscr{R}) = \dfrac{|5-4-7|}{\sqrt{1+4}} = \dfrac{6}{\sqrt{5}} = \dfrac{6\sqrt{5}}{5}$.

4. Dans le plan contenant A et perpendiculaire aux deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{R}$, le théorème de Pythagore peut s'appliquer et :
$d^2(\mathrm{A},\,\Delta) = d^2(\mathrm{A},\,\mathscr{P}) + d^2(\mathrm{A},\,\mathscr{R}) = \dfrac{270}{25} + \dfrac{180}{25} = \dfrac{450}{25} = 18$.
Conclusion : $d(\mathrm{A},\,\Delta) = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

1. $\mathrm{A}M_t^2 = (-4+2t)^2 + (5-t)^2 + (t+1)^2 = 6t^2 - 24t + 42 = 6\left(t^2-4t+7\right)$.
Le trinôme t^2-4t+7 a pour discriminant $\Delta = -40$. Il ne s'annule donc pas et est positif (coefficient de t^2 positif) quel que soit t. On peut donc calculer $\mathrm{A}M_t = \sqrt{6\left(t^2-4t+7\right)} = \varphi(t)$.
On pouvait également écrire : $t^2-4t+7 = (t-2)^2+3$ somme de deux carrés qui est positive, et permet de prévoir le minimum de la question suivante.

2. $\varphi'(t) = \dfrac{12t-24}{2\sqrt{6\left(t^2-4t+7\right)}} = \dfrac{6(t-2)}{\sqrt{6\left(t^2-4t+7\right)}}$ qui est du signe de $t-2$. La fonction φ est donc décroissante sur $[0\,;\,2]$, puis croissante sur $[2\,;\,+\infty[$. Elle a donc un minimum en $t=2$ qui est égal à $\varphi(2) = \sqrt{6(4-8+7)} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

3. On reconnaît que M_t est un point de la droite Δ (question **1. b.**) et on a vu à la question **1. d.** que la plus courte distance de A à Δ était égale à $3\sqrt{2}$. On pouvait donc sans calcul prévoir ce résultat.

EXERCICE 4 **3 points**

Partie A

1. En construisant un arbre de probabilités pondérées, on trouve que $p(\text{VV}) = p(\text{E}) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{16}$.

De même $p(\text{F}) = p(\text{VV}) + p(\text{BB}) + p(\text{RR}) = \dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{6}{16} = \dfrac{3}{8} = 0,375$.

2. On a une expérience de Bernoulli avec $n = 10$ et $p = \dfrac{3}{8}$.

On a $p_{\text{F}}(\text{E}) = \dfrac{p(\text{E} \cap \text{F})}{p(\text{F})} = \dfrac{\frac{1}{16}}{\frac{6}{16}} = \dfrac{1}{6}$.

Calculons la probabilité d'obtenir moins de deux fois l'évènement F.

$p(0 \text{ fois F}) + p(1 \text{ fois F}) = \binom{10}{0}\left(\dfrac{3}{8}\right)^0 \times \left(\dfrac{5}{8}\right)^{10} + \binom{10}{1}\left(\dfrac{3}{8}\right)^1 \times \left(\dfrac{5}{8}\right)^9 = \dfrac{5^{10}}{8^{10}} + \dfrac{30 \times 5^9}{8^{10}} = \dfrac{7 \times 5^{10}}{8^{10}}$.

La probabilité d'obtenir au moins deux fois l'évènement F au cours de ces dix parties est donc $1 - \dfrac{7 \times 5^{10}}{8^{10}} \approx 0,936\,3 \approx 0,936$.

Partie A Exercice en suspens ; il me semble que le tableau est incorrect car la somme des effectifs n'est pas égaleà 160 et il difficile pour un tétraèdre de tomber en équilibre sur un de ses sommets …