Exercice 1 : Commun à tous les candidats

Commençons par traduire l'énoncé !
On nous dit que le touriste choisit le premier jour Est ou Ouest avec la même probabilité ....
Donc .. $P(E_1) = p(O_1) = \frac{1}{2}$

De plus, on nous dit que le second jour, il choisit une direction opposée à celle prise la veille avec une probabilité de 0,8.
Donc .. $P_{E_1}(O_2) = 0,8$, $P_{O_1}(E_2) = 0,8$...donc .. $P_{E_1}(E_2) = 0,2$ et $P_{O_1}(O_2) = 0,2$

A -

1. Vous faites l'arbre tout seul ......très simple !
2. $P(E_1) = 0,5$
   $P_{E_1}(O_2) = 0,8$
   $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \times P_{E_1}(E_2) = 0,5 \times 0,2 = 0,1$
3. On veut donc la probabilité de l'événement $(E_1 \cap E_2) \cup (O_1 \cap O_2)$.
   Or ... $P[(E_1 \cap E_2) \cup (O_1 \cap O_2)] = P(E_1 \cap E_2) + P(O_1 \cap O_2) = 0,1 + 0,1 = 0,2$

B -

1. On nous dit que les n touristes choisissent une direction indépendamment les uns des autres.
   Donc, si on appelle X la variable aléatoire donnant le nombre de touristes qui choisissent l'Est, comme il y a 10 touristes, on peut dire que X suit la loi binomiale de paramètre $n = 10$, $p = \frac{1}{2}$.
   $$X \hookrightarrow \mathcal{B}(n = 10, p = \frac{1}{2})$$
   Donc,
   $$P(X = k) = \binom{n}{k}(\frac{1}{2})^n = \binom{n}{k}\frac{1}{2^n}$$
2. (a) Biensur, ... on ne peut pas avoir deux touristes heureux !!!
   (b) L'événement "Avoir UN touriste heureux" correspond à l'événement $\{X = 1 \text{ ou } X = n - 1\}$.
   Donc, la probabilité d'avoir UN touriste heureux est :
   $$P(X = 1) + P(X = n - 1) = \binom{n}{1}\frac{1}{2^n} + \binom{n}{n-1}\frac{1}{2^n} = \frac{n}{2^n} + \frac{n}{2^n} = \frac{n}{2^{n-1}}$$
   (c) Pour $n = 10$ .. On a alors :
   $$Proba = \frac{10}{2^9} \simeq 0,019$$

Exercice 2 : Non spécialité

Rappel:
M a pour affixe $z = x + iy$ avec x et y réel
$\overline{z} = x - iy$, $z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$, $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$.

1. M a pour affixe $z = x + iy$ et M' a pour affixe $z' = x' + iy'$, avec x , y , x' et y' réels.

   Donc, les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ ont pour coordonnées respectives : $(x; y)$ et $(x'; y')$.

   Le repère est orthonormé, donc $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul ...

   C'est à dire , si et seulement si $xx' + yy' = 0$.

   Or , $z'\overline{z} = (x' + iy')(x - iy) = (xx' + yy') + i(y'x - x'y)$.

   Donc, $Re(z'\overline{z}) = xx' + yy'$ et $Im(z'\overline{z}) = xy' - x'y$

   Donc, $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'} = 0$ si et seulement si $xx' + yy' = 0$.

   Donc, $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont orthogonaux si et seulement si $Re(z'\overline{z}) = 0$

2. On sait que les vecteurs $\overrightarrow{OM}x; y)$ et $\overrightarrow{OM'}(x'; y')$ sont colinéaires si et seulement si $xy' - x'y = 0$.

   On a déjà vu que $Im(z'\overline{z}) = xy' - x'y$.

   Donc, $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont colinéaires si et seulement si $Im(z'\overline{z}) = 0$.

   Donc .. O , M et M' alignés si et seulement si $Im(z'\overline{z}) = 0$.

3. N a pour affixe $z^2 - 1$. D'après la question 1., on peut donc dire que:

   $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ orthogonaux si et seulement si $Re((z^2 - 1)\overline{z}) = 0$.

   Or:

$$\begin{array}{rcl} Re((z^2-1)\overline{z}) & = & Re(z^2\overline{z} - \overline{z}) \\ & = & Re(z \times |z|^2 - \overline{z}) \quad car \quad z\overline{z} = |z|^2 \\ & = & |z|^2 Re(z) - Re(z) \quad car \quad Re(z) = Re(\overline{z}) \\ & = & (|z|^2 - 1)Re(z) = 0 \end{array}$$

   Donc, $Re((z^2 - 1)\overline{z}) = 0$ si et seulement si $|z|^2 = 1$ OU $Re(z) = 0$.

   C'est à dire ... si et seulement si $|z| = 1$ OU $Re(z) = 0$.

   On donc le cercle de centre O et de rayon 1 OU la droite d'équation $x = 0$.

   Conclusion:

   $\overrightarrow{ON}$ et $\overrightarrow{OM}$ sont orthogonaux si et seulement si M appartient à $(\mathcal{C}) \cup (D)$,

   où $(\mathcal{C})$ = cercle de centre O et de rayon 1 et (D) = droite d'équation $x = 0$ .. axe des ordonnées.

4. P d'affixe $\dfrac{1}{z^2} - 1$.

   (a)

$$\begin{array}{rcl} \left(\dfrac{1}{z^2} - 1\right)\left(\overline{z^2 - 1}\right) & = & \left(\dfrac{1}{z^2} - 1\right) \times \overline{z^2} \times \overline{\left(1 - \dfrac{1}{z^2}\right)} \\ & = & -\overline{z}^2 \times \left(\dfrac{1}{z^2} - 1\right) \times \overline{\left(\dfrac{1}{z^2} - 1\right)} \\ & = & -\overline{z}^2 \times \left|\dfrac{1}{z^2} - 1\right|^2 \end{array}$$

(b) Donc, d'après la question 2. , on peut dire que O , N et P sont alignés si et seulement si

$$Im(\left(\frac{1}{z^2}-1\right)(\overline{z^2-1}))=0$$

Donc, d'après l'égalité montrée dans la question précédente, si et seulement si

$$Im(-\overline{z}^2\times\left|\frac{1}{z^2}-1\right|^2)=0$$

.

Or $z^2=x^2-y^2+2ixy$, donc

$$Im(-\overline{z}^2\times\left|\frac{1}{z^2}-1\right|^2)=-2xy\left|\frac{1}{z^2}-1\right|^2$$

D'où O , N et P alignés si et seulement si $x=0$ OU $y=0$ OU $z^2=1$.
C'est à dire .... $x=0$ OU $y=0$.
Conclusion:
L'ensemble cherché est la réunion des deux droites de coordonnées.

Exercice 2 : Spécialité

1. (a) $17 \times 9 - 24 \times 6 = 9$ .... donc le couple $(9\ ;\ 6)$ est bien solution de $(\mathcal{E})$.

   (b) $(; y)$ est solution de $(\mathcal{E})$ si et seulement si $17x - 24y = 17 \times 9 - 24 \times 6$.
   D'où ... si et seulement si $17(x-9) = 24(y-6)$.
   17 et 24 sont premiers entre eux. 24 divise $17(x-9)$, donc, d'après le théorème de Gauss, , on peut dire que 24 divise $(x-9)$.
   Donc, il existe un entier relatifs k tels que $(x-9) = 24k$ ... ou encore .. $x = 24k + 9$.
   On a alors: $17(x-9) = 17 \times 24k$ donc $17 \times 24k = 24(y-6)$.
   D'où . $y = 17k + 6$.
   Donc, Si $(x; y)$ est solution de $(\mathcal{E})$, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 24k + 9$ et $y = 17k + 6$.
   Réciproquement, le couple $(24k + 9; 17k + 6)$ est bien solution de $(\mathcal{E})$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.
   Donc, l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$ est

$$\{(24k + 9; 17k + 6) \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}\}$$

2. (a) Jean va du point H au point A en 9 secondes.
   De plus, il effectue un tour en 24 secondes.
   Donc, en partant du point H, si on note y le nombre de tours effectué par Jean , il passe sur le point A toutes les $(24x + 9)$ secondes.
   De même, le pompon effectue un tour en 17 secondes et il part de point A.
   Donc, si on note x le nombre de tout effectué par le pompon, ce pompon reppase par le point A toutes les $17x$ secondes.
   Jean et le pompon se retrouvent donc ensembles sur le point A si et seulement si $17x = 24y + 9$.
   D'où, $(x; y)$ est solution de $17x - 24y = 9$....ce qui est bien $(\mathcal{E})$....
   D'après le résolution de $(\mathcal{E})$, on a alors : $x = 24k + 9 \qquad et \qquad y = 17k + 6 \qquad$ avec $k \in \mathbb{N}$
   car les tours sont comptés en positifs!

   (b) La plus petite solution en x et y entiers naturels est alors $x = 9$, $y = 6$.
   Jean devrait faire alors 9 tours en 24 secondes, donc, en 216 secondes.
   Mais 2 minutes = 120 secondes ..... donc, il n'a pas assez de temps pour attraper le pompon!

   (c) Les autres points où Jean pourrait attraper le pompon sont les points D, C et B.

   Jean passe sur le point D toutes les $(24y + 3)$secondes.
   Le pompon passe sur D toutes les $(17x + \dfrac{17}{8})$secondes.
   On ne peux pas avoir $24y + 3 = 17x + \dfrac{17}{8}$ avec x et y entiers ....donc Jean et le pompon ne se rencontrent jamais en D.

   Pour le point B , Jean y passe toutes les $(24y + 15)$secondes.
   Le pompn y passe toutes les $(17x + (\frac{3}{4})1)$secondes.
   On ne peut pas avoir $24y + 15 = 17y + (\frac{3}{4})17$ avec x et y entiers ... donc Jean et le pompon ne se rencontrent jamais en B.

   Pour le point C .... on vous laisse voir tout(e) seul(e) .... même idée !

   (d) SI Jean part du point E, alors il passe sur le point A toutes les $(24y + 3)$secondes.
   On a alors Jean et le pompon sur A si et seulement si $24y + 3 = 17x$.
   D'où, l'équation $17x + 24y = 3$.
   Un solution particulière de cette équation est (3;2).
   Donc, Jean et le pompon se rencontrent en A quand Jean a fait 2 tours et le pompon 3 tours.
   Jean a alors tourné sur le manège pendant 48 secondes.
   Il a alors le temps d'attraper ce pompon !!

Exercice 3 : Commun à tous les candidats

$\lambda \in =]0\ ;\ 1]$ ..... (E_λ) : $y' = y^2 + \lambda y$ sur l'intervalle $I =]-\infty; \frac{1}{2}[$
y_0 solution de (E_λ) vérifiant $y_0(0) = 1$.

1. Soit $z = \dfrac{1}{y_0}$. Alors $y_0 = \dfrac{1}{z}$.
   y_0 est dérivable sur I donc z l'est aussi est on a :
   $$y_0' = -\frac{z'}{z^2}$$
   D'où :
   $$y_0^2 + \lambda y_0 = -\frac{z'}{z^2}$$
   D'où :
   $$\frac{1}{z^2} + \lambda\frac{1}{z} = -\frac{z'}{z^2}$$
   D'où :
   $$z' = -(\lambda z + 1)$$
   z est donc solution de l'équaton différentielle : $Y' = -(\lambda Y + 1)$

2. (a) Les solutions de l'équations différentielle $y' = -\lambda y$ sont $y(x) = Ce^{-\lambda x}$ où C est une constante réelle.
   Une solution particulière de $z' = -\lambda z - 1$ est la fonction constante $Z(x) = -\frac{1}{\lambda}$.
   Donc, z vérifie $z' = -(\lambda z + 1)$ si et seulement si $z' + \lambda z = 1$
   c'est à dire ... si et seulement si $z' + \lambda z = Z' + \lambda Z$
   c'est à dire ... si et seulement si $(z - Z)' = -\lambda(z - Z)$
   c'est à dire ... si et seulement si $(z - Z)$ est solution de $y' = -\lambda y$.
   Donc, si et seulement si , $(z - Z) = Ce^{-\lambda x}$ où C est une constante réelle.
   Donc, si et seulement si $z(x) = Ce^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda}$.
   La condtion $z(0) = 1$ s'écrit alors : $C - \frac{1}{\lambda} = 1$ .... Donc .. $C = \frac{1+\lambda}{\lambda}$.
   Il exsite donc une solution unique de $z' = -(\lambda z + 1)$ vérifiant $z(0) = 1$..

   (b) C'est :
   $$z_0(x) = \frac{1}{\lambda}\left[(\lambda + 1)e^{-\lambda x} - 1\right]$$

3. (a) On pose $f(x) = \ln(1 + x) - \dfrac{x}{x+1}$ sur $]0\ ;\ 1]$.
   f est dérivable $f'(x) = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{(x+1)^2} = \dfrac{x}{(x+1)^2} \geq 0$ et $f'(x) > 0$ pour $x > 0$. f est donc strictement croissante sur $[0\ ;\ 1]$.
   On a $f(0) = 0$, donc pour tout $x \in]0;1]$, on a $f(x) > 0$..d'où $\ln(x + 1) > \dfrac{x}{x+1}$.
   D'où .. $\ln(1 + \lambda) > \dfrac{\lambda}{\lambda + 1}$

   (b) $\lambda \in]0; 1]$ donc $\dfrac{\lambda}{\lambda+1} > \dfrac{\lambda}{2}$, d'où $\ln(1 + \lambda) > \dfrac{\lambda}{2}$ ....
   D'où $\dfrac{1}{\lambda}\ln(1 + \lambda) > \dfrac{1}{2}$

4. $z_0(x) = \dfrac{1}{\lambda}\left[(\lambda+1)e^{-\lambda x} - 1\right]$ avec $\lambda \in]0;1]$ donc z_0 est strictement décroissante sur $]+\infty;\frac{1}{2}]$.

   $z_0(\frac{1}{2})$ est donc le minimum de z_0 sur cet intervalle.

   Or $\dfrac{1}{\lambda}\ln(1+\lambda) > \dfrac{1}{2}$ donc $\ln(1+\lambda) - \dfrac{1}{2}\lambda > 0$...donc .. $\ln(1+\lambda) + \ln(e^{-\frac{1}{2}\lambda}) > 0$.

   Donc ... $\ln\left((1+\lambda)e^{-\frac{1}{2}\lambda}\right) > 0$

   Donc ... $(1+\lambda)e^{-\frac{1}{2}\lambda} > 1$

   D'où ... $\dfrac{1}{\lambda}\left((1+\lambda)e^{-\frac{1}{2}\lambda} - 1\right) > 0$

   Ce qui signifie que $z_0(\frac{1}{2}) > 0$.

   Donc, le minimum de z_0 sur $]-\infty;\frac{1}{2}$ est ¿ 0.

   Donc, la fonction z_0 est ¿ 0 et ne peut pas s'annuler sur cet intervalle.

   D'où , (E_λ) admet la solution $y_0 = \frac{1}{z_0}$ comme solution strictement positive sur $]-\infty;\frac{1}{2}]$.

$$\boxed{y_0(x) = \frac{\lambda}{(\lambda+1)e^{-\lambda x} - 1}}$$

Exercice 4 : Commun à tous les candidats

1. On sait que I est le barycentre des points pondérés $(E\ ;\ 2)$ et $(F\ ;\ 1)$.
   Donc $\overrightarrow{EI} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{EF}$.
   De même , $\overrightarrow{BJ} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{GK} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{GC}$.
   On place alors tout seul les points I , J et K ....

2. Ω est equidistant de I , J et K. Donc, comme Ω est coplaire avec les points I , J et K, on peut dire que Ω est le centre du cercle circonscrit au triangle IJK.

   On se place dans le repère $\left(\mathrm{A}\ ;\ \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AD}}\ ;\ \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\ ;\ \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.

3. Les coordonnées des sommets du cube sont :
   A(0 ; 0 ; 0) B(0 ; 3 ; 0) C(3 ; 3 ; 0) D(3 ; 0 ; 0)
   E(0 ; 0 ; 3) F(0 ; 3 ; 3) G(3 ; 3 ; 3) H(3 ; 0 ; 3)
   I = bary{(E ; 2) , (F ; 1)} donc I(0 ; 1 ; 3)
   J = bary{(F ; 1) , (B ; 2)} donc J(0 ; 3 ; 1)
   K = bary{(G ; 2) , (C ; 1)} donc K(3 ; 3 : 2)

4. P(2 ; 2 ; 0) et Q(1 ; 3 ; 3). La droite (PQ) orthogonale au plan (IJK) si et seulement si $\overrightarrow{PQ}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$.
   C'est à dire ... si et seulement si $\overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{IJ} = 0$ et $\overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{IK} = 0$.
   Or , $\overrightarrow{PQ}$(-1 ; 3 ; 3) , $\overrightarrow{IJ}$(0 ; 2 ; -2) et $\overrightarrow{IK}$(3 ; 2 ; 1).
   Donc : $\overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{IJ} = -1\times 0 + 3\times 2 + 3\times(-2) = 0$ et $\overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{IK} = -1\times 3 + 3\times 2 + 3\times 1 = 0$.
   Donc, (PQ) est bien orthogonale à (IJK).

5. M(x ; y ; z)

   (a) Soit L le milieu de [IJ]. Alors MI = MJ $\Longleftrightarrow \overrightarrow{LM}.\overrightarrow{IJ} = 0$.
   Or, L(0 ; 2 ; 2) et $\overrightarrow{LM}(x; y-2; z-2)$.
   Donc $\overrightarrow{LM}.\overrightarrow{IJ} = 2y - 2z$.
   D'où IM = JM $\Longleftrightarrow y - z = 0$.

   De même, si S est le milieu de [IK] , alors IM = IK $\Longleftrightarrow \overrightarrow{SM}.\overrightarrow{IK} = 0$.
   On a S($\dfrac{3}{2}$; 2 ; $\dfrac{5}{2}$) donc $\overrightarrow{SM}$(x - $\dfrac{3}{2}$; y - 2 ; z - $\dfrac{3}{2}$).
   D'où , $\overrightarrow{SM}.\overrightarrow{IK} = 3(x - \dfrac{3}{2}) + 2(y-2) - (z - \dfrac{5}{2}) = 3x + 2y - z - 6$.
   Donc, IM = IK $\Longleftrightarrow 3x + 2y - z = 6$.

   D'où , M $\in \Delta \Longleftrightarrow \begin{cases} 3x + 2x - z = 6 \\ y - z = 0 \end{cases}$

   Δ est une droite, intersection des plans médiateurs des segments [IJ] et [IK].

   (b) Comme P(2 ; 0 ; 0) et Q(1 ; 3 ; 3), on vérifie tout de suite que P et Q appartiennent bien à Δ.

6. (a) On a vu que $\overrightarrow{PQ}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$.
Donc, $\overrightarrow{PQ}$ est un vecteur normal au plan (IJK).
On a $\overrightarrow{PQ}$(-1 : 3 : 3) , donc une équation cartésienne de (IJK) est de la forme

$$-x+3y+3z=d \quad , \qquad \text{avec } d \in \mathbb{R}$$

Comme I(0 ; 1 ; 3) appartient au plan (IJK), on a $d = 12$ ....d'où

$$\boxed{\text{Equation cartésienne du plan (IJK)} \quad : \quad -x+3y+3z=12}$$

(b) Le point Ω appartient à Δ et au plan (IJK).
Donc, ses coordonnées sont solutions du système

$$\begin{cases} y-z=0 \\ 3x+2y-z=6 \\ -x+3y+3z=12 \end{cases}$$

Ce qui donne $x = \dfrac{24}{19}$, $y = \dfrac{42}{19}$, $z = \dfrac{42}{19}$
D'où $\Omega(\dfrac{24}{19} ; \dfrac{42}{19} ; \dfrac{42}{19})$