Exercice 1 : Commun à tous les candidats

La scène se passe en haut d'une falaise au bord de la mer. Pour trouver une plage et aller se baigner, les touristes ne peuvent choisir qu'entre deux plages, l'une à l'Est et l'autre à l'Ouest.

A - Un touriste se retrouve deux jours consécutifs en haut de la falaise. Le premier jour, il choisit au hasard l'une des deux directions. Le second jour, on admet que la probabilité qu'il choisisse une direction opposée à celle prise la veille vaut 0,8.
Pour $i = 1$ ou $i = 2$, on note
-E_i l'évènement : " Le touriste se dirige vers l'Est le i-ème jour " et
-O_i l'évènement : " Le touriste se dirige vers l'Ouest le i-ème jour ".

1. Dresser un arbre de probabilités décrivant la situation.
2. Déterminer les probabilités suivantes : $P(\mathrm{E}_1)$; $P_{\mathrm{E}_1}(\mathrm{O}_2)$; $P(\mathrm{E}_1 \cap \mathrm{E}_2)$.
3. Calculer la probabilité que ce touriste se rende sur la même plage les deux jours consécutifs.

B - On suppose maintenant que n touristes ($n \geqslant 3$) se retrouvent un jour en haut de la falaise.
Ces n touristes veulent tous se baigner et chacun d'eux choisit au hasard et indépendamment des autres l'une des deux directions.
On note X la variable aléatoire donnant le nombre de ces touristes qui choisissent la plage à l'Est.

1. Déterminer la probabilité que k touristes ($0 \leqslant k \leqslant n$) partent en direction de l'Est.
2. On suppose ici que les deux plages considérées sont désertes au départ. On dit qu'un touriste est *heureux* s'il se retrouve seul sur une plage.
   (a) Peut-il y avoir deux touristes heureux?
   (b) Démontrer que la probabilité (notée p) qu'il y ait un touriste *heureux* parmi ces n touristes vaut : $p = \dfrac{n}{2^{n-1}}$.
   (c) **Application numérique :**
   Lorsque le groupe comprend 10 personnes, exprimer la probabilité, arrondie au centième, qu'il y ait un touriste heureux parmi les 10.

Exercice 2 : Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans le plan complexe muni du repère orthonormal $(\mathrm{O}\ ;\ \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, on considère les points M et M' d'affixes respectives z et z'. On pose $z = x + \mathrm{i}y$ et $z' = x' + \mathrm{i}y'$, où $x,\ x',\ y,\ y'$ sont des. nombres réels.
On rappelle que $\overline{z}$ désigne le conjugué de z et que $|z|$ désigne le module de z.

1. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{O}M}$ et $\overrightarrow{\mathrm{O}M'}$ sont orthogonaux si et seulement si $\mathrm{Re}(z'\overline{z}) = 0$.
2. Montrer que les points O, M et M' sont alignés si et seulement si $\mathrm{lm}(z'\overline{z}) = 0$.

Applications

3. N est le point d'affixe $z^2 - 1$. Quel est l'ensemble des points M tels que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{O}M}$ et $\overrightarrow{\mathrm{O}N}$ soient orthogonaux ?
4. On suppose z non nul. P est le point d'affixe $\dfrac{1}{z^2} - 1$.
   On recherche l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points O, N et P soient alignés.
   (a) Montrer que $\left(\dfrac{1}{z^2} - 1\right)\left(\overline{z^2 - 1}\right) = -\overline{z}^2\left|\dfrac{1}{z^2} - 1\right|^2$.
   (b) En utilisant l'équivalence démontrée au début de l'exercice, conclure sur l'ensemble recherché.

Exercice 2 : Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. On considère l'équation $(\mathcal{E}) \quad : \quad 17x - 24y = 9$, où $(x,\ y)$ est un couple d'entiers relatifs.
   (a) Vérifier que le couple $(9\ ;\ 6)$ est solution de l'équation $(\mathcal{E})$.
   (b) Résoudre l'équation $(\mathcal{E})$.

2. Dans une fête foraine, Jean s'installe dans un manège circulaire représenté par le schéma de l'annexe 2. Il peut s'installer sur l'un des huit points indiqués sur le cercle.
   Le manège comporte un jeu qui consiste à attraper un pompon qui, se déplace sur un câble formant un carré dans lequel est inscrit le cercle. Le manège tourne dans le sens des aiguilles d'une montre, à vitesse constante. Il fait un tour à vitesse constante. Il fait un tour en 24 secondes. Le pompon se déplace dans le même sens à vitesse constante. Il fait un tour en 17 secondes.
   Pour gagner, Jean doit attraper le pompon, et il ne peut le faire qu'aux points de contact qui sont notés A, B, C et D sur le dessin.
   À l'instant $t = 0$, Jean part du point H en même temps que le pompon part du point A.

   (a) On suppose qu'à un certain instant t Jean attrape le pompon en A. Jean a déjà pu passer un certain nombre de fois en A sans y trouver le pompon. À l'instant t, on note y le nombre de tours effectués depuis son premier passage en A et x le nombre de tours effectués par le pompon. Montrer que $(x,\ y)$ est solution de l'équation $(\mathcal{E})$ de la question 1.
   (b) Jean a payé pour 2 minutes ; aura-t-il le temps d'attraper le pompon ?
   (c) Montrer, qu'en fait, il n'est possible d'attraper le pompon qu'au point A.
   (d) Jean part maintenant du point E. Aura-t-il le temps d'attraper le pompon en A avant les deux minutes ?

Exercice 3 : Commun à tous les candidats

Dans tout l'exercice, λ désigne un nombre réel de l'intervalle $]0\ ;\ 1]$.

1. On se propose d'étudier les fonctions dérivables sur $\left]-\infty\ ;\ \dfrac{1}{2}\right[$ vérifiant l'équation différentielle $(\mathrm{E}_\lambda)\ :\ y' = y^2 + \lambda y$ et la condition $y(0) = 1$.

   On suppose qu'il existe une solution y_0 de (E_λ) strictement positive sur $\left]-\infty\ ;\ \dfrac{1}{2}\right[$ et on pose sur $\left]-\infty\ ;\ \dfrac{1}{2}\right[\ :\ z = \dfrac{1}{y_0}$
   Écrire une équation différentielle simple satisfaite par la fonction z.

2. **Question de cours**
   Pré-requis
   Les solutions de l'équation différentielle $y' = -\lambda y$ sont les fonctions $x \mapsto C\mathrm{e}^{-\lambda x}$ où C est une constante réelle.

   (a) Démontrer l'existence et l'unicité de la solution z de l'équation différentielle $(\mathrm{E'}_\lambda)\ :\ z' = -(\lambda z + 1)$ telle que $z(0) = 1$.

   (b) Donner l'expression de cette fonction que l'on notera z_0.

On veut maintenant montrer que la fonction z_0 ne s'annule pas sur l'intervalle $\left]-\infty\ ;\ \dfrac{1}{2}\right[$.

3. (a) Démontrer que $\ln(1+\lambda) > \dfrac{\lambda}{\lambda+1}$.
   On pourra étudier sur $]0\ ;\ 1]$ *la fonction f définie par* $f(x) = \ln(1+x) - \dfrac{x}{x+1}$.

   (b) En déduire que $\dfrac{1}{\lambda}\ln(1+\lambda) > \dfrac{1}{2}$.

4. En déduire que la fonction z_0 ne s'annule pas sur $\left]-\infty\ ;\ \dfrac{1}{2}\right[$.

   Démontrer alors que (E_λ) admet une solution strictement positive sur $\left]-\infty\ ;\ \dfrac{1}{2}\right[$ que l'on précisera.

Exercice 4 : Commun à tous les candidats

On considère dans l'espace un cube de 3 cm de côté, noté ABCDEFGH et représenté sur l'annexe.
Soit l le barycentre des points pondérés (E ; 2) et (F ; 1), J celui de (F ; 1) et (B ; 2) et enfin K celui de (G ; 2) et (C ; 1).

On veut déterminer l'ensemble des points M équidistants de I, J *et* K. *On note* Δ *cet ensemble.*

1. Placer les points l, J et K sur la figure de **l'annexe qui sera rendue avec la copie.**
2. Soit Ω le point de Δ situé dans le plan (IJK). Que représente ce point pour le triangle IJK ?

   Pour la suite de l'exercice, on se place maintenant dans le repère orthonormal suivant : $\left(\mathrm{A}\ ;\ \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AD}}\ ;\ \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\ ;\ \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.
3. Donner les coordonnées des points l, J et K.
4. Soit P(2 ; 0 ; 0) et Q(1 ; 3 ; 3) deux points que l'on placera sur la figure. Démontrer que la droite (PQ) est orthogonale au plan (IJK).
5. Soit M un point de l'espace de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$.
   (a) Démontrer que M appartient à Δ si, et seulement si, le triplet $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ est solution d'un système de deux équations linéaires que l'on écrira. Quelle est la nature de Δ ?
   (b) Vérifier que P et Q appartiennent à Δ. Tracer Δ sur la figure.
6. (a) Déterminer un vecteur normal au plan (IJK) et en déduire une équation cartésienne de ce plan.
   (b) Déterminer alors les coordonnées exactes de Ω.

Figure de l'exercice 4

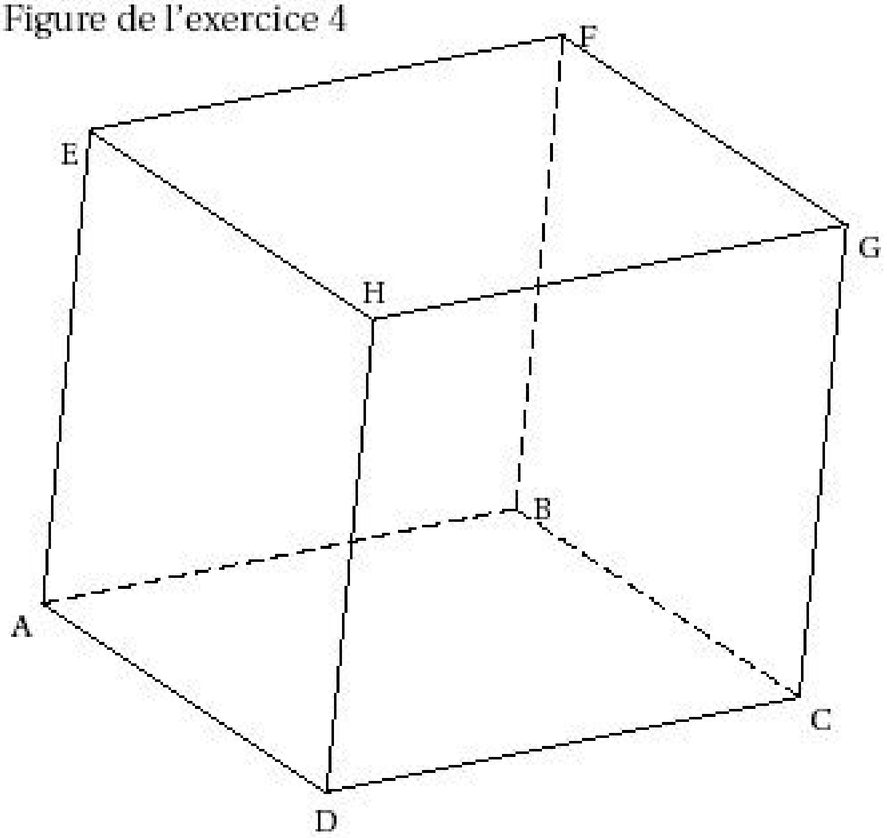

Schéma de l'exercice 2