

Durée : 4 heures

Corrigé du baccalauréat S Polynésie
septembre 2006

EXERCICE 1

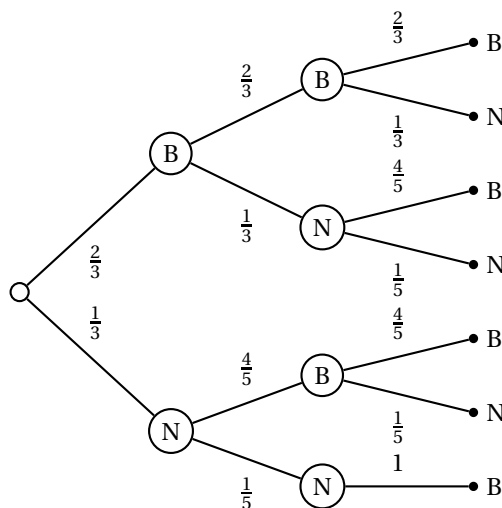
4 points

1.
 - a. On a $c - a = 2 + 2i$ et $b - a = 2 - 2i$; or $c - a = 2 + 2i = i(2 - i) = i(b - a)$. Cette égalité signifie que C est l'image de B dans le quart de tour direct de centre A. Donc le triangle ABC est rectangle en A.
 - b. On a $\frac{z-3}{z-5+2i} = \frac{z-z_A}{z-z_B}$. Donc $\arg\left(\frac{z-3}{z-5+2i}\right) = (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM})$
 - c. Le nombre $\frac{z-3}{z-5+2i}$ est un réel strictement négatif si et seulement si l'un des ses arguments est égal à π . D'après le b, on a donc $\frac{z-3}{z-5+2i} \in \mathbb{R}_- \iff (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) = \pi \pmod{2\pi} \iff M \in]AB[$. L'ensemble cherché est donc le segment ouvert $]AB[$.
2.
 - a. Si z' est l'affixe du point image du point d'affixe z dans la rotation r de centre Ω et d'angle $-\frac{\pi}{2}$, cette affixe vérifie $z' - z_\Omega = -i(z - z_\Omega) \iff z' - 2 + i = -i(z - 2 + i) \iff z' = -iz - 2i + 1 + 2 - i \iff z' = -iz + 3 - 3i$.
 - b. ABC étant rectangle isocèle en A, le centre du cercle circonscrit Γ est le milieu de $[BC]$ d'affixe 5 et son rayon est égal à 2. On a donc $M \in \Gamma \iff |z - 5| = 2 \iff z = 5 + 2e^{i\theta}$, avec $\theta \in [0; 2\pi[$.
L'image M' de M par r est donc :
 $z' = -i(5 + 2e^{i\theta}) + 3 - 3i = -5i + 2i(\cos\theta + i\sin\theta) + 3 - 3i = 3 - 8i + 2(-\sin\theta + i\cos\theta) = 3 - 8i + 2[\cos(\theta + \frac{\pi}{2}) + i\sin(\theta + \frac{\pi}{2})] = z' = 3 - 8i + 2e^{i(\theta + \frac{\pi}{2})} \iff |z' - (3 - 8i)| = 2$.
Cette égalité signifie que M' appartient au cercle de centre le point d'affixe $3 - 8i$ (image du milieu de $[BC]$ dans la rotation) et de rayon 2 (même rayon puisque la rotation est une isométrie).

EXERCICE 2

4 points

1.
 - a. On dresse l'arbre pondéré suivant :



Les valeurs prises par X sont (de haut en bas) : 0, 1, 1, 2, 1, 2, 2.

b. On a $P(X = 0) = P(BBB) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$.

c. – La probabilité demandée s'obtient en suivant la troisième branche.

Elle est égale à $P(BNB) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{45}$.

– On a de même $P(NBB) = \frac{1}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{16}{75}$.

$P(BBN) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{27}$.

Finalement $P(X = 1) = P(BBB) + P(BNB) + P(BBN) = \frac{8}{45} + \frac{16}{75} + \frac{4}{27} = \frac{120 + 144 + 100}{27 \times 25} = \frac{367}{675}$.

2. – $P(A) = \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \times \frac{1}{3} = \frac{2^{k-1}}{3^k}$.

– $P_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \times \frac{1}{3}}{\frac{2^{k-1}}{3^k}} = \frac{2^{n-1} \times 3^k}{3^n \times 2^{k-1}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k}$.

– $P(N) = n \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \times \frac{1}{3} = \frac{n2^{n-1}}{3^n}$.

EXERCICE 3

7 points

1. a. En écrivant $f(x) = 2x^3e^{-x} - 4x^2e^{-x}$ qui ont tous deux pour limite moins l'infini, on obtient $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

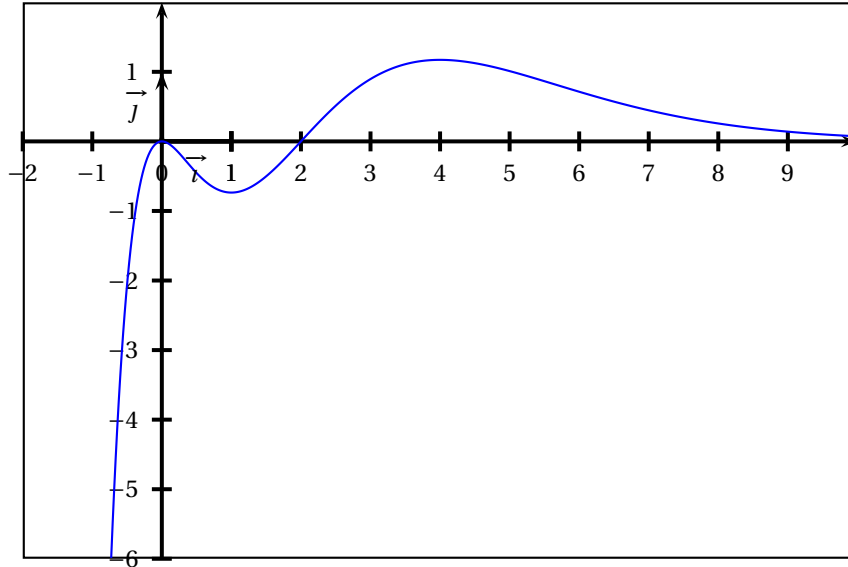
De la même façon en plus l'infini, les deux termes ont pour limite 0, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

b. La dérivée de la fonction f est donnée par $f'(x) = e^{-x}(6x^2 - 8x - 2x^3 + 4x^2) = e^{-x}(-2x^3 + 10x^2 - 8x) = 2xe^{-x}(-x^2 + 5x - 4)$.

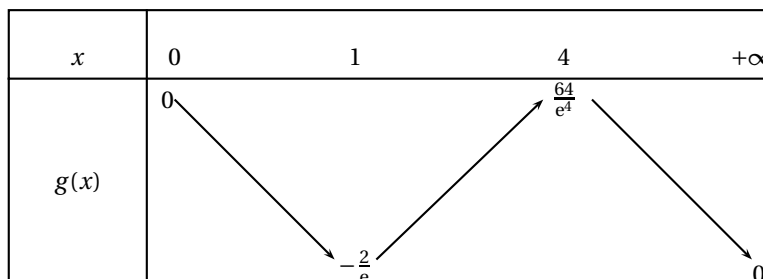
c. Comme quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$, le signe de la dérivée est celui de $x(-x^2 + 5x - 4)$. Le trinôme a pour racines 1 et 4, donc le signe de la dérivée dépend de la position de x par rapport aux nombres 0, 1 et 4. D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$	0	1	4	$+\infty$		
x	-	0	+	+	+		
trinôme	+	+	0	-	0	+	
f'	+	0	-	0	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	0	$-\frac{2}{e}$	$\frac{64}{e^4}$	0		

d. Courbe représentative (\mathcal{C}) :



2. a. $I_1 = \int_0^1 xe^{-x} dx$.
- Avec $\begin{cases} u(x) = x & dv(x) = e^{-x} \\ du(x) = 1 & v(x) = -e^{-x} \end{cases}$ on obtient en intégrant par parties, toutes les fonctions étant dérivables, $I_1 = [-xe^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx = [-xe^{-x} - e^{-x}]_0^1 = 1 - \frac{2}{e}$.
- b. L'égalité $I_n = nI_{n-1} - \frac{1}{e}$ donne pour $n = 2$, $I_2 = 2I_1 - \frac{2}{e} = 2 - \frac{5}{e}$.
 Pour $n = 3$, $I_3 = 3I_2 - \frac{1}{e} = 3\left(2 - \frac{5}{e}\right) - \frac{1}{e} = 6 - \frac{16}{e}$.
- c. L'aire du domaine défini est égal (en unités d'aire) à la valeur absolue de l'intégrale $\int_0^1 (2x^3 - 4x^2)e^{-x} dx = 2 \int_0^1 x^3 e^{-x} dx - 4 \int_0^1 x^2 e^{-x} dx = 2I_3 - 4I_2$ (par linéarité de l'intégrale).
 On a donc $\int_0^1 (2x^3 - 4x^2)e^{-x} dx = 2\left(6 - \frac{16}{e}\right) - 4\left(2 - \frac{5}{e}\right) = 4 - \frac{12}{e}$.
 Conclusion $\mathcal{A} = \frac{12}{e} - 4 \approx 4,4$.
 Effectivement sur la figure, sur l'intervalle $[0; 1]$, la fonction est négative et l'aire vaut moins de $\frac{1}{2}$ carreau (cm^2).
3. a. u est croissante sur $[a; b]$ signifie $0 < a < x < b \Rightarrow u(a) < u(x) < u(b) \Leftrightarrow v\left(\frac{1}{a}\right) < v\left(\frac{1}{x}\right) < v\left(\frac{1}{b}\right)$.
 Or $0 < a < x < b \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{x} < \frac{1}{a}$.
 On a donc $\frac{1}{b} < \frac{1}{x} < \frac{1}{a} \Rightarrow v\left(\frac{1}{a}\right) < v\left(\frac{1}{x}\right) < v\left(\frac{1}{b}\right)$ ce qui démontre que la fonction v est décroissante sur $\left[\frac{1}{b}; \frac{1}{a}\right]$.
- b. On a donc $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{2}{x^3} - \frac{4}{x^2}\right)e^{-\frac{1}{x}}$.
 En posant $\frac{1}{x} = \alpha$, $g(\alpha) = (2\alpha^3 - 4\alpha^2)e^{-\alpha}$. On obtient alors facilement $\lim_{\alpha \rightarrow 0} g(\alpha) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ et $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} g(\alpha) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$.
- c. De même qu'au 2 a, on démontrerait que si u est décroissante; alors v est croissante. Le tableau de variations de g se déduit donc de celui de f :



EXERCICE 4

5 points

1. Un vecteur \vec{n}_1 normal à (P_1) est $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Un vecteur \vec{n}_2 normal à (P_2) est

$\vec{n}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Ces deux vecteurs sont non nuls et $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = -2 \times 1 + 1 \times (-2) + 1 \times 4 = 0$. Ces vecteurs étant orthogonaux, les deux plans sont perpendiculaires.

2. En posant $z = t$ les coordonnées de la droite commune aux deux plans vérifient $\begin{cases} -2x + y = 6 - t \\ x - 2y = 9 - 4t \end{cases} \iff \begin{cases} -2x + y = 6 - t \\ 2x - 4y = 18 - 8t \end{cases} \Rightarrow -3y = 24 - 9t \iff y = -8 + 3t$ et en reportant dans l'une des équations des plans $x = -7 + 2t$.

Conclusion : $M(x; y; z) \in (P_1 \cap P_2) = (D) \iff \begin{cases} x = -7 + 2t \\ y = -8 + 3t \\ z = t \end{cases}$.

3. a. On a $-18 - 4 - 1 - 6 = 0$ Faux et $-9 + 8 - 4 - 9 = 0$ Faux

b. $AM^2 = (x+9)^2 + (y+4)^2 + (z+1)^2 = (2+2t)^2 + (-4+3t)^2 + (t+1)^2 = 14t^2 - 14t + 21 = 7(2t^2 - 2t + 3)$.

c. $f(t) = 2t^2 - 2t + 3 = 2\left(t^2 - t + \frac{3}{2}\right) = 2\left[\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \frac{3}{2}\right] = 2\left[\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}\right] \geq \frac{5}{2} > 0$. Ce trinôme est donc décroissant sur $]-\infty; \frac{1}{2}[$, croissant sur $]\frac{1}{2}; +\infty[$ et a un minimum en $\frac{1}{2}$.

le point correspondant est $M_{\text{mini}} = I\left(-6; -\frac{13}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

4. a. La représentation paramétrique de (D) donne les coordonnées d'un vecteur directeur de (D) , donc un vecteur normal à (Q) , c'est le vecteur $\vec{q} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Une équation de (Q) est donc : $2x + 3y + z + \alpha = 0$. $A \in (Q) \iff -18 - 12 - 1 + \alpha = 0 \iff \alpha = 31$.

Une équation de (Q) est donc : $M \in (Q) \iff 2x + 3y + z + 31 = 0$.

5. Le triangle AMI est rectangle en I . Le côté $[AI]$ a une longueur inférieure à celle de l'hypoténuse $[AM]$: I est bien le projeté orthogonal de A sur $(D) = (IM)$.