

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat S Polynésie septembre 2006 ∞

EXERCICE 1

4 points

- Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .
On pose $a = 3$, $b = 5 - 2i$ et $c = 5 + 2i$. On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives a , b et c .
Soit M un point d'affixe z du plan, distinct des points A et B.
 - Montrer que ABC est un triangle rectangle isocèle.
 - Donner une interprétation géométrique de l'argument du nombre complexe $\frac{z-3}{z-5+2i}$.
 - Déterminer alors l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\frac{z-3}{z-5+2i}$ soit un nombre réel strictement négatif.
- Soit Γ le cercle circonscrit au triangle ABC et Ω le point d'affixe $2 - i$.
 - Donner l'écriture complexe de la rotation r de centre Ω et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
 - Déterminer l'image Γ' de Γ par la rotation r . Déterminer une équation paramétrique de Γ' .

EXERCICE 2

4 points

Une urne contient 4 boules blanches et 2 boules noires indiscernables au toucher.

- On effectue trois tirages successifs au hasard d'une boule selon la procédure suivante : après chaque tirage si la boule tirée est blanche, on la remet dans l'urne et si elle est noire, on ne la remet pas dans l'urne. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de boules noires obtenues à l'issue des trois tirages. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
 - Quelles sont les valeurs prises par X ?
 - Calculer $P(X = 0)$.
 - On se propose de déterminer maintenant $P(X = 1)$.
 - Montrer que la probabilité que la seule boule noire tirée soit obtenue au second tirage est égale à $\frac{8}{45}$.
 - En remarquant que la seule boule noire peut être tirée soit au premier, soit au deuxième, soit au troisième tirage, calculer $P(X = 1)$.
- On reprend l'urne dans sa composition initiale : 4 boules blanches et 2 boules noires indiscernables au toucher. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
On effectue maintenant n tirages successifs au hasard d'une boule dans l'urne selon la même procédure : après chaque tirage, si la boule tirée est blanche, on la remet dans l'urne et si elle est noire, on ne la remet pas dans l'urne.
Soit k un entier compris entre 1 et n .
Soit N l'évènement : « la k -ième boule tirée est noire et toutes les autres sont blanches ».
Soit A l'évènement : « on obtient une boule blanche dans chacun des $k - 1$ premiers tirages et une boule noire au k -ième ».
Soit B l'évènement : « on obtient une boule blanche dans chacun des $(n - k)$ derniers tirages ».
Calculer $P(A)$, $P_A(B)$ et $P(N)$.

EXERCICE 3

7 points

1. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = (2x^3 - 4x^2) e^{-x}.$$

- Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
- Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = 2x(-x^2 + 5x - 4) e^{-x}$.
- Dresser le tableau de variations de f .
- Tracer la courbe (\mathcal{C}) représentative de f dans un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) (unité graphique : 1 cm).

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx.$$

- À l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1 .
- On admet que, pour tout n supérieur ou égal à 2, $I_n = nI_{n-1} - \frac{1}{e}$.
Déterminer I_2 et I_3 .
- Soit \mathcal{A} l'aire, exprimée en cm^2 , du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe (\mathcal{C}) et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$. Calculer \mathcal{A} .

3. Soit u une fonction définie et dérivable sur \mathbb{R} .

On définit la fonction v sur $]0; +\infty[$ par $v(x) = u\left(\frac{1}{x}\right)$.

- On suppose que u est croissante sur l'intervalle $[a; b]$ (où $0 < a < b$).
Déterminer le sens de variation de v sur $\left[\frac{1}{b}; \frac{1}{a}\right]$.
- On définit maintenant la fonction g par $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ sur $]0; +\infty[$, où f est la fonction définie dans la question 1.
Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$.
- Déduire des questions précédentes le tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

EXERCICE 4

5 points

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit (P_1) le plan d'équation cartésienne $-2x + y + z - 6 = 0$ et (P_2) le plan d'équation cartésienne $x - 2y + 4z - 9 = 0$.

1. Montrer que (P_1) et (P_2) sont perpendiculaires.
On rappelle que deux plans sont perpendiculaires si et seulement si un vecteur normal non nul à l'un est orthogonal à un vecteur normal non nul à l'autre.

2. Soit (D) la droite d'intersection de (P_1) et (P_2) .

Montrer qu'une représentation paramétrique de (D) est :
$$\begin{cases} x = -7 + 2t \\ y = -8 + 3t \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

3. Soit M un point quelconque de (D) de paramètre t et soit A le point de coordonnées $(-9; -4; -1)$.

- Vérifier que A n'appartient ni à (P_1) , ni à (P_2) .
- Exprimer AM^2 en fonction de t .
- Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(t) = 2t^2 - 2t + 3$.
 - Étudier les variations de f .
 - Pour quel point M , la distance AM est-elle minimale?
Dans la suite, on désignera ce point par I .
 - Préciser les coordonnées du point I .

4. Soit (Q) le plan orthogonal à (D) passant par A .

- Déterminer une équation de (Q) .
- Démontrer que I est le projeté orthogonal de A sur (D) .