Corrigé du baccalauréat S Pondichéry 21 avril 2010

Exercice 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

Partie A : Restitution organisée de connaissances

f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ donc $g - f$ est continue sur $[a\ ;\ b]$ Pour tout x de $[a\ ;\ b]$, $f(x) \leqslant g(x)$ donc $g(x) - f(x) \geqslant 0$ donc $\displaystyle\int_a^b [g(x) - f(x)]\,\mathrm{d}x \geqslant 0$

$\displaystyle\int_a^b [g(x) - f(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_a^b [g(x) - f(x)]\,\mathrm{d}x \geqslant 0$ donc $\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$ soit $\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Partie B

1. **a.** Pour tout x de $[0\ ;\ +\infty[$, $f_1(x) = \ln(1+x)$.
   Soit $X = 1 + x$, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} X = +\infty$;
   $f_1(x) = \ln X$ or $\displaystyle\lim_{X \to +\infty} \ln X = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f_1(x) = +\infty$.

   b. f_1 est la composée de deux fonctions :
   $x \longmapsto 1 + x$ continue et dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$, à valeurs dans $[1\ ;\ +\infty[$ et
   $x \longmapsto \ln x$, continue et dérivable sur $[1\ ;\ +\infty[$, donc f_1 est continue et dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$.
   $f_1'(x) = \dfrac{1}{x+1}$ donc pour tout x de $[0\ ;\ +\infty[$, $f_1'(x) > 0$ donc f_1 est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

   c. Soit : $\begin{array}{ll} u'(x) = 1 & u(x) = x + 1 \\ v(x) = \ln(1+x) & v'(x) = \dfrac{1}{x+1} \end{array}$
   u et v sont continues et dérivables sur $[0\ ;\ +\infty[$, de même que u' et v' donc
   $I_1 = [u(x)v(x)]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$;
   $I_1 = [(x+1)\ln(x+1)]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 \dfrac{x+1}{x+1}\,\mathrm{d}x = [(x+1)\ln(x+1)]_0^1 - \int_0^1 1\,\mathrm{d}x = 2\ln 2 - 0 - 1$;

   $$I_1 = 2\ln 2 - 1.$$

   $f_1(0) = 0$ et f_1 est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$ donc f_1 est positive sur $[0\ ;\ 1]$.
   f_1 est continue sur $[0\ ;\ 1]$ donc I_1 est l'aire (en unité d'aires) du domaine limité par l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = 0$, $x = 1$ et la courbe représentative de f_1.

2. a. Pour tout entier naturel non nul n, f_n est la composée de deux fonctions continues sur $[0~;~+\infty[$:
$x \longmapsto 1 + x^n$ et $x \longmapsto \ln x$ donc f_n est continue sur $[0~;~+\infty[$.
Pour tout x de $[0~;~1]$, $0 \leqslant x^n \leqslant 1$ donc $1 \leqslant 1 + x^n \leqslant 2$.
La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0~;+\infty[$ donc $\ln 1 \leqslant \ln(1 + x^n) \leqslant \ln 2$.
La fonction f_n est continue sur $[0~;~1]$ et pour tout x de $[0~;~1]$, $0 \leqslant f_n(x) \leqslant \ln 2$.
Donc pour tout entier naturel non nul n, $0 \leqslant I_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 \ln 2\,\mathrm{d}x$, soit $0 \leqslant I_n \leqslant \ln 2$.

b. Pour tout x de $[0~;~1]$, $0 \leqslant x \leqslant 1$ donc par produit par $x^n \geqslant 0$,
$0 \leqslant x^{n+1} \leqslant x^n$ puis $1 \leqslant 1 + x^{n+1} \leqslant 1 + x^n$.
La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0~;+\infty[$ donc $\ln 1 \leqslant \ln\left(1 + x^{n+1}\right) \leqslant \ln(1 + x^n)$, soit $0 \leqslant f_{n+1} \leqslant f_n$.
Les fonctions f_{n+1} et f_n sont continues sur $[0~;~1]$ et pour tout x de $[0~;~1]$, $0 \leqslant f_{n+1} \leqslant f_n$ donc $0 \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$.
La suite (I_n) est décroissante et minorée par 0.

c. La suite (I_n) décroissante et minorée par 0 est donc convergente vers un nombre positif.

3. a. g est la différence de deux fonctions continues dérivables sur $[0~;+\infty[$:
$x \longmapsto x$ et $x \longmapsto f_1(x)$ donc g est continue et dérivable sur $[0~;~+\infty[$ et $g'(x) = \dfrac{1}{x+1} - 1 = \dfrac{-x}{x+1}$.
Pour tout $x > 0$, $g'(x) < 0$ et $g'(0) = 0$ donc g est strictement décroissante sur $[0~;~+\infty[$.

b. g est strictement décroissante sur $[0~;~+\infty[$ et $g(0) = 0$ donc g est strictement négative sur $[0~;~+\infty[$.
Si x est un réel positif alors pour tout entier naturel n non nul, x^n est un réel positif donc $g(x^n) \leqslant 0$ donc pour tout entier naturel n non nul, et pour tout x réel positif, on a : $\ln(1 + x^n) - x^n \leqslant 0$ soit $\ln(1 + x^n) \leqslant x^n$.

c. Les fonctions f_n et $x \longmapsto x^n$ sont continues sur $[0~;~+\infty[$ et pour tout x de $[0~;~+\infty[$ on a : $0 \leqslant \ln(1 + x^n) \leqslant x^n$; donc $0 \leqslant I_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x$, soit
$0 \leqslant I_n \leqslant \left[\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1$, ou encore $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
Comme $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$ d'après le théorème des gendarmes appliqué aux suites, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$.

Exercice 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

1. Un vecteur directeur de la droite D de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l c l} x & = & t+2 \\ y & = & -2t \\ z & = & 3t-1 \end{array}\right.$ est $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $(1~;~-2~;~3)$.

   Un vecteur normal au plan P est $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(1~;2~;1)$. Or $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{n} = 1\times 1+(-2)\times 2+3\times 1 = 0$ donc $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{n}$ sont orthogonaux, la droite D est parallèle au plan P dont une équation cartésienne est : $x+2y+z-3 = 0$.

   Il était possible aussi de chercher le(s) point(s) d'intersection de D et de P et chercher t tel que $(t+2)+2(-2t)+(3t-1) = 0$ ceci est équivalent à $1 = 0$ ce qui est impossible, donc D et P n'ont pas de point commun, D est strictement parallèle à P. **VRAI**

2. Pour chercher les points communs à ces trois plans il faut résoudre le système : $\left\{\begin{array}{l c l l} x-2y+3z & = & 3 & L_1 \\ 2x+3y-2z & = & 6 & L_2 \\ 4x-y+4z & = & 12 & L_3 \end{array}\right.$

   $L_1+L_2+L_3$ et L_3-L_1 conduisent au système : $\left\{\begin{array}{l c l} x-2y+3z & = & 3 \\ 7x+5z & = & 21 \\ 7x+5z & = & 21 \end{array}\right.$ soit

   $\left\{\begin{array}{l c l} x-2y+3z & = & 3 \\ 7x+5z & = & 21 \end{array}\right.$

   L'intersection de deux plans est une droite donc **FAUX**.

3. Pour déterminer l'éventuel point d'intersection des droites citées, il faut chercher des réels t et u tels que

   $\left\{\begin{array}{l l l} x = & 2-3t = & 7+2u \\ z = & -3+2t = & -6-u \\ y = & 1+t = & 2+2u \end{array}\right.$ donc résoudre le système $\left\{\begin{array}{l c l} 3t+2u & = & -5 \\ 2t+u & = & -3 \\ t-2u & = & 1 \end{array}\right. \Rightarrow$

   $\left\{\begin{array}{l c l} 2t+u & = & -3 \\ t-2u & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l c l} 5t & = & -5 \\ t-2u & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l c l} t & = & -1 \\ u & = & -1 \end{array}\right.$ et dans ce cas on a bien $3t+2u = -5$ donc les deux droites sont sécantes et leur point d'intersection est $A(5~;~0~;~-5)$. **VRAI**

4. On considère les points A, de coordonnées $(-1~;~0~;~2)$, B de coordonnées $(1~;4~;0)$, et C, de coordonnées $(3~;~-4~;~-2)$. Le plan (ABC) a pour équation $x+z = 1$.

   $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(2~;~4~;~-2)$

   $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(4~;~-4~;~-4)$

   Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc le plan (ABC) existe. Les coordonnées de A, B et C vérifient $x+z = 1$ donc le plan (ABC) a pour équation $x+z = 1$. **VRAI**.

5. $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(3~;~0~;~-3)$

   $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(5~;~-2~;~2)$

   Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc C n'appartient pas à la droite (AB).

   On ne peut pas écrire C comme barycentre des points A et B donc **FAUX**.

EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

1. Le joueur tire deux fois successivement et sans remise une boule de l'urne donc on est en situation d'équiprobabilité.

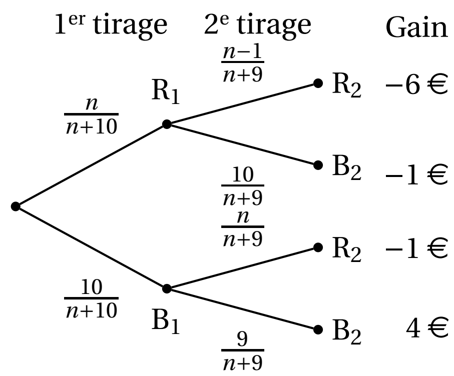
   Le nombre initial de boules est $n+10$, le joueur choisit une boule donc a $(n+10)$ choix possibles et ne remet pas cette boule dans l'urne donc le nombre de boules possibles lors du second tirage est $(n+9)$.

   a. Lors d'un tirage de deux boules,
   - soit le joueur tire deux boules blanches, et gagne 4 €
   - soit le joueur tire une boule blanche et une boule rouge, et gagne $2-3=-1$ €
   - soit le joueur tire deux boules rouges, et gagne -6 €.

   Si le joueur tire une boule rouge au premier tirage, l'urne contient 10 boules blanches et $n-1$ boules rouges.

   Si le joueur tire une boule blanche au premier tirage, l'urne contient 9 boules blanches et n boules rouges.

   D'où l'arbre de choix :



   $p(X=-1)=\dfrac{n}{n+10}\times\dfrac{10}{n+9}+\dfrac{10}{n+10}\times\dfrac{9}{n+9}=\dfrac{20n}{(n+10)(n+9)}$.

   b. $p(X=-6)=\dfrac{n}{n+10}\times\dfrac{n-1}{n+9}=\dfrac{n(n-1)}{(n+10)(n+9)}$.

   $p(X=4)=\dfrac{10}{n+10}\times\dfrac{9}{n+9}=\dfrac{90}{(n+10)(n+9)}$.

   c. $\mathrm{E}(X)=4p(X=4)+(-1)p(X=-1)+(-6)p(X=-6)$ donc

   $\mathrm{E}(X)=\dfrac{360}{(n+10)(n+9)}-\dfrac{20n}{(n+10)(n+9)}-\dfrac{6n(n-1)}{(n+10)(n+9)}$.

   $\mathrm{E}(X)=\dfrac{-6n^2+6n-20n+360}{(n+10)(n+9)}=\dfrac{-6n^2-14n+360}{(n+10)(n+9)}$.

   d. $\mathrm{E}(X)>0 \iff -6n^2-14n+360>0$.

   $-6x^2-14x+360=0$ or $\Delta=14^2+4\times6\times360=94^2$, donc les solutions sont $x_1=-9,\ x_2=\dfrac{20}{3}$. Le trinôme est négatif sauf entre les racines, donc n étant un entier supérieur ou égal à 2, l'espérance mathématique est strictement positive si $2 \leqslant n \leqslant 6$.

2. Les évènements « obtenir au moins une boule rouge au cours de ces 20 tirages » et « obtenir 20 boules blanches au cours de ces 20 tirages » sont contraires donc : $p = 1 - \left(\dfrac{10}{n+10}\right)^{20}$.

$p > 0,999 \iff \left(\dfrac{10}{n+10}\right)^{20} < 1 - 0,999 \iff \left(\dfrac{10}{n+10}\right)^{20} < 0,001 \iff$
$\dfrac{10}{n+10} < \sqrt[20]{0,001} \iff n+10 > \dfrac{10}{\sqrt[20]{0,001}} \iff n > \dfrac{10}{\sqrt[20]{0,001}} - 10 \iff$
$n \geqslant 5$.

3. $P(Z \leqslant k) = \displaystyle\int_0^k 0,01\mathrm{e}^{-0,01x}\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-0,01x}\right]_0^k$ donc $P(Z \leqslant k) = 1 - \mathrm{e}^{-0,01k}$.

a. $P(Z \leqslant 50) = 1 - \mathrm{e}^{-0,01\times 50} = 1 - \mathrm{e}^{-0,5}$ donc $P(Z \leqslant 50) \approx 0,39$.

b. $P(Z \leqslant 60 / Z > 50) = \dfrac{P(50 < Z \leqslant 60)}{P(Z > 50)}$.

$P(50 < Z \leqslant 60) = \displaystyle\int_{50}^{60} 0,01\mathrm{e}^{-0,01x}\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-0,01x}\right]_{50}^{60} = \mathrm{e}^{-0,5} - \mathrm{e}^{-0,6}$.

$P(Z \leqslant 50) = 1 - \mathrm{e}^{-0,5}$ donc $P(Z > 50) = 1 - P(Z \leqslant 50) = \mathrm{e}^{-0,5}$, donc $P(Z \leqslant 60 / Z > 50) = \dfrac{\mathrm{e}^{-0,5} - \mathrm{e}^{-0,6}}{\mathrm{e}^{-0,5}} = 1 - \mathrm{e}^{-0,1}$.

EXERCICE 4 — 4 points

Commun à tous les candidats

1. Si $n = 0$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + n - 2$ devient :

$u_1 = \dfrac{1}{3}u_0 + 0 - 2$ soit $u_1 = \dfrac{1}{3} - 2 = -\dfrac{5}{3}$;

Si $n = 1$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + n - 2$ devient :

$u_2 = \dfrac{1}{3}u_1 + 1 - 2$ soit $u_2 = -\dfrac{14}{9}$.

Si $n = 2$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + n - 2$ devient :

$u_3 = \dfrac{1}{3}u_2 + 2 - 2$ soit $u_3 = -\dfrac{14}{27}$.

2. a. Si $n = 3$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + n - 2$ devient :

$u_4 = \dfrac{1}{3}u_3 + 3 - 2$ soit $u_4 = \dfrac{67}{81}$, donc $u_4 \geqslant 0$.

La propriété est vraie pour $n = 4$.

Montrons que la propriété est héréditaire c'est-à-dire que pour tout $n \geqslant 4$, si $u_n \geqslant 0$ alors $u_{n+1} \geqslant 0$.

$u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + n - 2$; comme $n \geqslant 4$, $n - 2 > 0$, de plus $\dfrac{1}{3}u_n \geqslant 0$.

La somme de nombres positifs étant un nombre positif, donc

$\dfrac{1}{3}u_n + n - 2 \geqslant 0$ soit $u_{n+1} \geqslant 0$.
La propriété est héréditaire donc vraie pour tout entier naturel $n \geqslant 4$.

b. En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 5,\ u_n \geqslant n-3$.
$u_5 = \dfrac{1}{3}u_4 + 4 - 2 = \dfrac{553}{243}$, soit $u_5 \approx 2,28$ donc $u_5 \geqslant 5-3$.
La propriété est vraie pour $n = 5$;
Montrons que la propriété est héréditaire c'est-à-dire que pour tout $n \geqslant 5$, si $u_n \geqslant n-3$ alors $u_{n+1} \geqslant n+1-3$ ou encore $u_{n+1} \geqslant n-2$.
$u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + n - 2,\ n \geqslant 5$ donc $u_n \geqslant n-3$ donc
$u_n + 1 \geqslant \dfrac{1}{3}(n-3) + n - 2$ soit $u_{n+1} \geqslant \dfrac{1}{3}n + n - 1 - 2$; comme $n \geqslant 5$,
$\dfrac{1}{3}n \geqslant 1$ donc $u_{n+1} \geqslant 1 + n - 1 - 2$ soit $u_{n+1} \geqslant n-2$.
La propriété est héréditaire donc vraie pour tout entier naturel $n \geqslant 5$.
Remarque : On peut également montrer que l'on vient de démontrer que pour $n \geqslant 4,\ u_n \geqslant 0$, d'où $\dfrac{1}{3}u_n \geqslant 0 \Rightarrow \dfrac{1}{3}u_n + n - 2 \geqslant n-2 \iff u_{n+1} \geqslant n-2 \iff u_{n+1} \geqslant (n+1)-3 \iff u_n \geqslant n-3$.

c. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(n-3) = +\infty$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 5,\ u_n \geqslant n-3$ donc d'après le théorème de comparaison : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

3. **a.** $v_{n+1} = -2u_n + 1 + 3(n+1) - \dfrac{21}{2} \iff$
$v_{n+1} = -2\left(\dfrac{1}{3}u_n + n - 2\right) + 3n + 3 - \dfrac{21}{2}$;
$v_{n+1} = -\dfrac{2}{3}u_n - 2n + 4 + 3n + 3 - \dfrac{21}{2} = -\dfrac{2}{3}u_n + n - \dfrac{7}{2} \iff$
$v_{n+1} = \dfrac{1}{3} \times (-2u_n) + \dfrac{1}{3} \times 3n - \dfrac{1}{3} \times \dfrac{21}{2}$;
$v_{n+1} = \dfrac{1}{3}\left(-2u_n + 3n - \dfrac{21}{2}\right) \iff v_{n+1} = \dfrac{1}{3}v_n$.
La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = -2u_0 + 3 \times 0 - \dfrac{21}{2} = -\dfrac{25}{2}$.
Donc $v_n = -\dfrac{25}{2}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

b. $v_n = -2u_n + 3n - \dfrac{21}{2} = -\dfrac{25}{2}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ donc $-2u_n = -\dfrac{25}{2}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n - 3n + \dfrac{21}{2}$
soit $2u_n = \dfrac{25}{2}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n + 3n - \dfrac{21}{2}$;
$u_n = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{25}{2}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n + 3n - \dfrac{21}{2}\right]$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{25}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3n}{2} - \frac{21}{4}.$$

c. $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \frac{25}{4}\,\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} + \frac{3}{2}\,\frac{n(n+1)}{2} - \frac{21}{4}(n+1),$

soit $S_n = \dfrac{75}{8}\left[1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}\right] + \dfrac{3n^2}{4} - \dfrac{9n}{2} - \dfrac{21}{4}.$

EXERCICE 2 — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1. Soit $(a,\ b)$ un tel couple et $d = \text{PGCD}(a,\ b)$. Il existe deux entiers u et v premiers entre eux tels que $a = du$ et $b = dv$.
   Donc en remplaçant : $(du)^2 = (dv)^3$ soit $d^2u^2 = d^3v3$ et comme
   $d \neq 0,\ u^2 = dv^3$.
2. $u^2 = dv^3$ donc v divise u^2, soit v divise $u \times u$; d'après le théorème de Gauss, v divise $u \times u$ et v et u sont premiers entre eux, donc v divise u.
   $\text{PGCD}(u\ ;\ v) = 1$ or si v divise u, $\text{PGCD}(u\ ;\ v) = v$ donc $v = 1$.
3. si $a^2 = b^3$, d'après la question précédente $v = 1$ donc en remplaçant dans $b = dv$ et $u^2 = dv^3$, on obtient $b = d$ et $u^2 = d$ donc $a = du = u^3$ et $b = u^2$ donc a et b sont respectivement le cube et le carré d'un même entier.
   Réciproquement :
   Si a et b sont respectivement le cube et le carré d'un même entier d, alors $a = d^3$ et $b = d^2$ donc $a^2 = \left(d^3\right)^2 = d^6$ et $b^3 = \left(d^2\right)^3 = d^6$ donc $a^2 = b^3$.
   Conclusion : $a^2 = b^3$ si et seulement si a et b sont respectivement le cube et le carré d'un même entier.
4. Montrer que si n est le carré d'un nombre entier naturel et le cube d'un autre entier, alors $n \equiv 0 \quad [7]$ ou $n \equiv 1 \quad [7]$.
   S'il existe deux entiers a et b tels que $n = a^2 = b^3$ alors d'après la question précédente il existe un entier d tel que $a = d^3$ et $b = k^2$ donc tel que
   $n = d^6$.

d	0	1	2	3	4	5	6
d^6	0	1	64	729	4 096	15 625	46 656
$d^6 \equiv \ldots \quad [7]$	0	1	1	1	1	1	1

donc $n \equiv 0 \quad [7]$ ou $n \equiv 1 \quad [7]$.

Remarque : On peut également dire :

- si $d = 0$, alors $n \equiv 0 \quad [7]$;
- si $d = 1$, alors $n \equiv 1 \quad [7]$;
- si $d > 1$ et n multiple de 7, alors $n \equiv 0 \quad [7]$;

- si $d > 1$ et d non multiple de 7, donc d premier, alors d'après le petit théorème de Fermat :
  $d^{7-1} \equiv 1 \quad [7]$ ou encore $d^6 = n \equiv 1 \quad [7]$.

Partie B

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ on considère 1a surface S d'équation $x^2 \times y^2 = z^3$.
Pour tout réel λ, on note $\mathcal{C}_\lambda$ la section de S par le plan d'équation $z = \lambda$.

1. $\mathcal{C}_\lambda$ a pour équations : $x^2 \times y^2 = \lambda^3$ et $z = \lambda$.
Si $\lambda < 0$ il est impossible que $x^2 \times y^2$ qui est positif ou nul, soit égal à λ donc $\mathcal{C}_\lambda$ est le graphique 2.
Si $\lambda = 0$ alors $x^2 \times y^2 = 0 \iff x = 0$ ou $y = 0$ donc $\mathcal{C}_\lambda = \mathcal{C}_0$ est le graphique 1, $\mathcal{C}_\lambda$ est la réunion des deux axes dans le plan d'équation $z = \lambda = 0$.
Si $\lambda > 0$ par élimination, le graphique 3 représente la courbe $\mathcal{C}_\lambda$.
Si $\lambda > 0$, $\mathcal{C}_\lambda$ est l'ensemble des points du plan d'équation $z = \lambda$ tels que $x^2 \times y^2 = \lambda^3$ ce qui se décompose en deux parties : $xy = \sqrt{\lambda^3}$ et $xy = -\sqrt{\lambda^3}$ soit $y = \dfrac{\sqrt{\lambda^3}}{x}$ et $y = -\dfrac{\sqrt{\lambda^3}}{x}$.
$\mathcal{C}_\lambda$, quand $\lambda > 0$, est donc la réunion de deux hyperboles équilatères.

2. **a.** $\mathcal{C}_{25}$ a pour équations : soit $y = \dfrac{\sqrt{25^3}}{x}$ soit $y = -\dfrac{\sqrt{25^3}}{x}$ dans le plan d'équation $z = 25$.
Donc $\mathcal{C}_{25}$ a pour équations : soit $y = \dfrac{125}{x}$ soit $y = -\dfrac{125}{x}$ dans le plan d'équation $z = 25$.
Si les coordonnées des points de $\mathcal{C}_{25}$ sont des nombres entiers strictement positifs alors $y > 0$ et $\dfrac{125}{x}$ est un entier strictement positif donc x est un entier strictement positif qui divise 125, soit $x = 1$ ou $x = 5$ ou $x = 25$ ou $x = 125$.
Les points cherchés ont donc pour coordonnées $(1~;~125~;~25)$, $(5~;~25~;~25)$, $(25~;~5~;~25)$ et $(125~;~1~;~25)$

b. $\mathcal{C}_{2010}$ a pour équations : $(xy)^2 = z^3$ avec $z = 2\,010$.
D'après la question 3. a. : $a^2 = b^3$ si et seulement si a et b sont respectivement le cube et le carré d'un même entier, avec ici $a = xy$ et $b = z$; or $2\,010$ n'est pas le carré d'un nombre entier ($2\,010 = 2 \times 3 \times 5 \times 67$) donc l'équation $(xy)^2 = 2010^3$ n'a pas de solutions entières.