

Baccalauréat S Pondichéry 16 avril 2009

**EXERCICE 1**

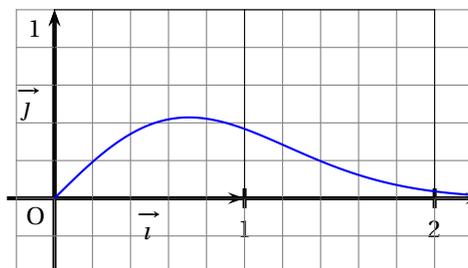
**7 points**

**Commun à tous les candidats**

Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  par :

$$f(x) = xe^{-x^2}.$$

On désigne par  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  du plan. Cette courbe est représentée ci-contre.



**Partie A**

1. a. Déterminer la limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$ .

(On pourra écrire, pour  $x$  différent de 0 :  $f(x) = \frac{1}{x} \times \frac{x^2}{e^{x^2}}$ ).

- b. Démontrer que  $f$  admet un maximum en  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  et calculer ce maximum.

2. Soit  $a$  un nombre réel positif ou nul. Exprimer en unités d'aire et en fonction de  $a$ , l'aire  $F(a)$  de la partie du plan limitée par la courbe  $\mathcal{C}$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives  $x = 0$  et  $x = a$ .

Quelle est la limite de  $F(a)$  quand  $a$  tend vers  $+\infty$  ?

**Partie B**

On considère la suite  $(u_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par :

$$u_n = \int_n^{n+1} f(x) dx.$$

On ne cherchera pas à expliciter  $u_n$ .

1. a. Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$  différent de 0 et de 1

$$f(n+1) \leq u_n \leq f(n).$$

- b. Quel est le sens de variation de la suite  $(u_n)_{n \geq 2}$  ?

- c. Montrer que la suite  $(u_n)$  converge. Quelle est sa limite ?

2. a. Vérifier que, pour tout entier naturel strictement positif  $n$ ,  $F(n) = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$ .

- b. Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

On donne ci-dessous les valeurs de  $F(n)$  obtenues à l'aide d'un tableur, pour  $n$  entier compris entre 3 et 7.

$n$	3	4	5	6	7
$F(n)$	0,499 938 295 1	0,499 999 943 7	0,5	0,5	0,5

Interpréter ces résultats.

**EXERCICE 2****5 points****Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . On prendra pour unité graphique 2 cm.

Soit A, B et C les points d'affixes respectives :

$$a = 3 - i, \quad b = 1 - 3i \quad \text{et} \quad c = -1 - i.$$

1.
  - a. Placer ces points sur une figure que l'on complètera au fur et à mesure.
  - b. Quelle est la nature du triangle ABC?
  - c. Démontrer que les points A et B appartiennent à un même cercle  $\Gamma$  de centre O, dont on calculera le rayon.
2. Soit  $M$  un point quelconque du plan d'affixe notée  $m$  et  $N$  le point d'affixe notée  $n$ , image de A dans la rotation  $r$  de centre  $M$  et d'angle de mesure  $\frac{\pi}{2}$ .
  - a. Donner l'écriture complexe de la rotation  $r$ .
  - b. En déduire une expression de  $n$  en fonction de  $m$ .
3. On appelle  $Q$  le milieu du segment  $[AN]$  et  $q$  son affixe.  
Montrer que :  $q = \frac{(1-i)m}{2} + 2 + i$ .
4. Dans cette question,  $M$  est un point du cercle  $\Gamma$ .
  - a. Justifier l'existence d'un réel  $\theta$  tel que :  $m = \sqrt{10}e^{i\theta}$ .
  - b. Calculer  $|q - 2 - i|$ . Quel est le lieu  $\Gamma'$  de  $Q$  lorsque  $M$  décrit le cercle  $\Gamma$ ?

**EXERCICE 2****5 points****Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . On prendra pour unité graphique 2 cm. Soit A et B les points d'affixes respectives  $z_A = i$  et  $z_B = 1 + 2i$ .

1. Justifier qu'il existe une unique similitude directe  $S$  telle que :

$$S(O) = A \quad \text{et} \quad S(A) = B.$$

2. Montrer que l'écriture complexe de  $S$  est :

$$z' = (1 - i)z + i.$$

Préciser les éléments caractéristiques de  $S$  (on notera  $\Omega$  le centre de  $S$ ).

On considère la suite de points  $(A_n)$  telle que :

- $A_0$  est l'origine du repère et,
- pour tout entier naturel  $n$ ,  $A_{n+1} = S(A_n)$ .

On note  $z_n$ , l'affixe de  $A_n$ . (On a donc  $A_0 = O$ ,  $A_1 = A$  et  $A_2 = B$ ).

3.
  - a. Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $z_n = 1 - (1 - i)^n$ .
  - b. Déterminer, en fonction de  $n$ , les affixes des vecteurs  $\overrightarrow{\Omega A_n}$  et  $\overrightarrow{A_n A_{n+1}}$ .  
Comparer les normes de ces vecteurs et calculer une mesure de l'angle  $(\overrightarrow{\Omega A_n}, \overrightarrow{A_n A_{n+1}})$ .
  - c. En déduire une construction du point  $A_{n+1}$  connaissant le point  $A_n$ .  
Construire les points  $A_3$  et  $A_4$ .
4. Quels sont les points de la suite  $(A_n)$  appartenant à la droite  $(\Omega B)$ ?

**EXERCICE 3****4 points****Commun à tous les candidats**

Dans un repère orthonormé de l'espace  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  on considère les points :

A de coordonnées  $(1; 1; 0)$ , B de coordonnées  $(2; 0; 3)$ , C de coordonnées  $(0; -2; 5)$  et D de coordonnées  $(1; -5; 5)$ .

Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est VRAIE ou par FAUSSE en justifiant chaque fois la réponse :

**Proposition 1 :** L'ensemble des points  $M$  de coordonnées  $(x, y, z)$  tels que  $y = 2x + 4$  est une droite.

**Proposition 2 :** La transformation qui, à tout point  $M$  de l'espace associe le point  $M'$  tel que  $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$  est l'homothétie de centre  $G$ , où  $G$  désigne le barycentre du système  $\{(A, 1), (B, 1), (C, 2)\}$ , et de rapport 3.

**Proposition 3 :** A, B, C et D sont quatre points coplanaires.

**Proposition 4 :** La sphère de centre  $\Omega$  de coordonnées  $(3, 3, 0)$  et de rayon 5 est tangente au plan d'équation :  $2x + 2y + z + 3 = 0$ .

**EXERCICE 4****4 points****Commun à tous les candidats**

On dispose de deux dés cubiques dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Ces dés sont en apparence identiques mais l'un est bien équilibré et l'autre truqué. Avec le dé truqué la probabilité d'obtenir 6 lors d'un lancer est égale à  $\frac{1}{3}$ .

*Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.*

1. On lance le dé bien équilibré trois fois de suite et on désigne par  $X$  la variable aléatoire donnant le nombre de 6 obtenus.
  - a. Quelle loi de probabilité suit la variable aléatoire  $X$  ?
  - b. Quelle est son espérance ?
  - c. Calculer  $P(X = 2)$ .
2. On choisit au hasard l'un des deux dés, les choix étant équiprobables. Et on lance le dé choisi trois fois de suite.
 

On considère les évènements D et A suivants :

  - $D$  « le dé choisi est le dé bien équilibré » ;
  - $A$  : « obtenir exactement deux 6 ».
  - a. Calculer la probabilité des évènements suivants :
    - « choisir le dé bien équilibré et obtenir exactement deux 6 » ;
    - « choisir le dé truqué et obtenir exactement deux 6 ».
 (On pourra construire un arbre de probabilité).
  - b. En déduire que :  $p(A) = \frac{7}{48}$ .
  - c. Ayant choisi au hasard l'un des deux dés et l'ayant lancé trois fois de suite, on a obtenu exactement deux 6. Quelle est la probabilité d'avoir choisi le dé truqué ?
3. On choisit au hasard l'un des deux dés, les choix étant équiprobables, et on lance le dé  $n$  fois de suite ( $n$  désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2).
 

On note  $B_n$  l'évènement « obtenir au moins un 6 parmi ces  $n$  lancers successifs ».

  - a. Déterminer, en fonction de  $n$ , la probabilité  $p_n$  de l'évènement  $B_n$ .
  - b. Calculer la limite de la suite  $(p_n)$ . Commenter ce résultat.