

Correction du baccalauréat S Pondichéry

16 avril 2009

EXERCICE 1

7 points

La fonction f est définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par : $f(x) = xe^{-x^2}$.

Partie A

1. a. On remarque que, pour tout $x > 0$, $f(x) = \frac{1}{x} \frac{x^2}{e^{x^2}}$.

$$\text{Or } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{X}{e^X} = 0 \quad (\text{Inverse de limite de référence.}) \end{cases}$$

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et, par produit des limites,
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

- b. La fonction f est dérivable sur son ensemble de définition comme produit de fonctions dérivables.

$$\text{Pour tout } x \geq 0, g'(x) = e^{-x^2} + x \times (-2x)e^{-x^2}.$$

Formules utilisées $(uv)' = u'v + uv'$ et $(e^u)' = u'e^u$.

Donc $g'(x) = (1 - 2x^2)e^{-x^2}$. Comme $e^{-x^2} > 0$, $g'(x)$ est du signe de $1 - 2x^2$, polynôme du second degré nul pour $x^2 = 1/2$ et négatif sauf entre ses

racines. Donc $g'(x) > 0$ si $x \in \left[0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right[$ et $g'(x) < 0$ si $x \in \left]\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty\right[$. La

fonction g est donc croissante puis décroissante et admet un maximum

$$\text{en } \frac{\sqrt{2}}{2}. \text{ Enfin, } g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}e}.$$

2. $F(a) = \int_0^a xe^{-x^2} dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^a = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-a^2}.$

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} F(a) = \frac{1}{2} \text{ car } \lim_{a \rightarrow +\infty} e^{-a^2} = 0.$$

Partie B $u_n = \int_n^{n+1} f(x) dx$

1. a. La fonction f est décroissante sur $\left]\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty\right[$ et $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq 1$ donc, pour tout entier naturel $n \geq 1$, f est décroissante sur $[n; n+1]$ et pour tout $x \in [n; n+1]$, $f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$. L'inégalité de la moyenne permet de dire que

$$(n+1-n)f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq (n+1-n)f(n)$$

c.-à-d. $f(n+1) \leq u_n \leq f(n)$

- b. Pour tout $n \geq 1$, $u_n \geq f(n+1) \geq u_{n+1}$ donc la suite est décroissante à partir du rang 1.

- c. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = 0$, que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n+1) = 0$ et que pour tout $n \geq 1$, $f(n+1) \leq u_n \leq f(n)$, la suite (u_n) converge vers 0. (*Théorème de comparaison*)

2. a. Pour tout $n \geq 1$, $\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \underbrace{\int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx + \dots + \int_{n-1}^n f(x) dx}_{n \text{ termes}}$. En

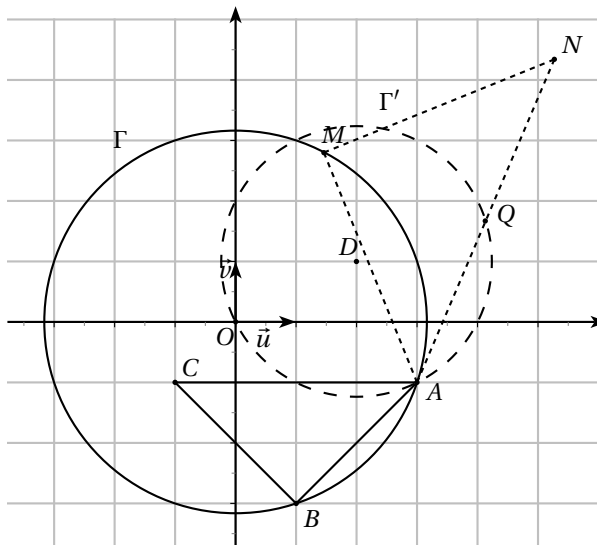
utilisant la relation de Chasles, $\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \int_0^n f(x) dx = F(n)$.

- b. Le tableau illustre le fait que $(F(n))$ converge vers $1/2$, conséquence du résultat démontré en A.2. Mais il illustre aussi le fait que la convergence est très rapide. En effet, $1/2 - F(n) = \frac{1}{2}e^{-n^2}$ et, pour tout $n \geq 5$, on a $\frac{1}{2}e^{-n^2} \leq \frac{1}{2}e^{-25} < 7 \cdot 10^{-12}$. Donc $F(5)$ est une bonne approximation de l'aire sous la courbe entre 0 et $+\infty$.

EXERCICE 2

5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité



1.
 - a.
 - b. $\frac{c-b}{a-b} = \frac{-2+2i}{2+2i} = \frac{i(2+2i)}{2+2i} = i$ de module 1 et d'argument $\pi/2$ donc $BA = BC$ et $(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}) = \pi/2$. (Interprétation géométrique d'un quotient). Le triangle ABC est donc rectangle isocèle de sommet B .
 - c. $|a| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$ et $|b| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$ donc $OA = OB = \sqrt{10}$. Les points sur le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{10}$.
2.
 - a. La rotation de centre $M(m)$ et d'angle $\pi/2$ a pour expression complexe : $z' = e^{i\pi/2}(z-m) + m$ soit $z' = iz + (1-i)m$.
 - b. $N(n)$ est l'image de A par r , donc $n = ia + (1-i)m = 1 + 3i + (1-i)m$.
3. Le milieu Q du segment $[AN]$ a pour affixe $q = \frac{a+n}{2} = 2+i + \frac{(1-i)m}{2}$.
4. Dans cette question, M est un point du cercle Γ .
 - a. Le point $M(z)$ est sur le cercle de centre $\Omega(\omega)$ et de rayon r si et seulement s'il existe un réel θ tel que $z = \omega + re^{i\theta}$ (Représentation paramétrique d'un cercle). Ici, M est sur le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{10}$ donc il existe un réel θ tel que : $m = \sqrt{10}e^{i\theta}$.
 - b. $|q - 2 - i| = \left| \frac{(1-i)m}{2} \right| = \frac{1}{2}|1-i||m| = \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{10} = \sqrt{5}$. Si D est le point d'affixe $d = 2+i$, alors $DQ = \sqrt{5}$ donc Q est sur le cercle de centre D et de rayon $\sqrt{5}$.
Plus précisément, $q-d = \frac{(1-i)m}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}e^{-i\pi/4}\sqrt{10}e^{i\theta} = \sqrt{5}e^{i(\theta-\pi/4)}$. Quand M décrit le cercle Γ , θ décrit \mathbb{R} , $\theta - \pi/4$ décrit \mathbb{R} et le point Q décrit **tout le cercle** de centre D et de rayon $\sqrt{5}$.

EXERCICE 2

5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

$$z_A = i \text{ et } z_B = 1 + 2i.$$

1. Les points O et A sont distincts et les points A et B aussi, il existe donc une unique similitude directe S telle que : $S(O) = A$ et $S(A) = B$. (*Similitude définie par les images distinctes de deux points distincts*)

2. On note $z' = az + b$ l'écriture complexe de la similitude S .

$$S(O) = A \iff z_A = a \times 0 + b \iff b = i,$$

$$S(A) = B \iff z_B = az_A + b \iff 1 + 2i = ai + i \iff ai = 1 + i \iff a = 1 - i.$$

L'écriture complexe de S est donc $z' = (1 - i)z + i$

$$\text{Le complexe } 1 - i \text{ a pour module } \sqrt{2} \text{ et pour argument } \theta \text{ tel que } \begin{cases} \cos(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\text{soit } \theta = -\frac{\pi}{4}$$

Le point invariant par S est le point $\Omega(\omega)$ vérifiant :

$$w = (1 - i)\omega + i \iff i\omega = i \iff \omega = 1$$

S est une similitude directe de centre $\Omega(1)$, de rapport $\sqrt{2}$ et d'argument $-\frac{\pi}{4}$.

3. a. Les affixes z_n des points A_n vérifient $z_0 = 0$ et $z_{n+1} = (1 - i)z_n + i$. En outre, puisque $\Omega(1)$ est centre de S , on a $z_{n+1} - 1 = (1 - i)(z_n - 1)$. La suite $(z_n - 1)$ est donc géométrique de raison $1 - i$ et de premier terme $z_0 - 1 = -1$. Et pour tout n , $z_n - 1 = (-1)(1 - i)^n$, soit $z_n = 1 - (1 - i)^n$.

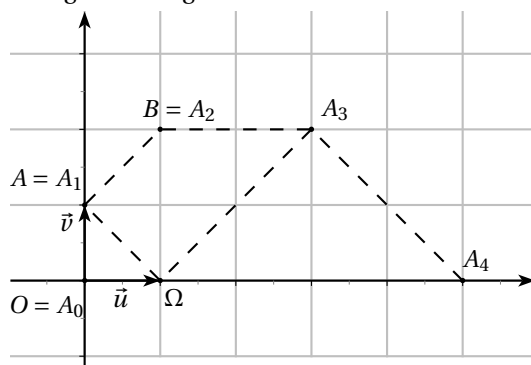
- b. $\overrightarrow{\Omega A_n}$ a pour affixe $z_n - 1 = -(1 - i)^n$.

$$\overrightarrow{A_n A_{n+1}} \text{ a pour affixe } z_{n+1} - z_n = (1 - i)^n - (1 - i)^{n+1} = (1 - i)^n i.$$

Pour tout n , $\frac{z_{n+1} - z_n}{z_n - 1} = -i = e^{-i\pi/2}$ donc (*Interprétation géométrique*

$$\text{d'un quotient}), \overrightarrow{\Omega A_n} = \overrightarrow{A_n A_{n+1}} \text{ et } (\overrightarrow{\Omega A_n}, \overrightarrow{A_n A_{n+1}}) = -\frac{\pi}{2}.$$

- c. Le triangle $\Omega A_n A_{n+1}$ est donc un triangle rectangle isocèle indirect de sommet A_n . Les points successifs se construisent donc en traçant des triangles rectangles isocèles.



4. Le point (A_n) appartient à la droite (ΩB) si et seulement si $(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega A_n}) = k\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$).

$$\text{Or } (\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega A_n}) = \text{Arg}\left(\frac{z_n - 1}{z_2 - 1}\right) = \text{Arg}((1 - i)^{n-2}) = (n - 2) \left(-\frac{\pi}{4}\right) \text{ donc}$$

$$(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega A_n}) = k\pi \iff -\frac{n-2}{4} = k \iff n - 2 = -4k \iff n \equiv 2 \pmod{4}$$

EXERCICE 3**4 points****Commun à tous les candidats**

Dans un repère orthonormé de l'espace $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ A a pour coordonnées (1, 1, 0), B (2, 0, 3), C (0, -2, 5) et D(1, -5, 5).

Proposition 1 : L'ensemble des points M de coordonnées (x, y, z) tels que $y = 2x + 4$ est une droite. **FAUX**

L'équation $y = 2x + 4$ caractérise un plan passant E(0,4,0) et de vecteur normal $\vec{n}(2, -1, 0)$

Proposition 2 : La transformation qui, à tout point M de l'espace associe le point M' tel que $\vec{MM}' = \vec{MA} + \vec{MB} + 2\vec{MC}$ est l'homothétie de centre G, où G désigne le barycentre du système $\{(A, 1), (B, 1), (C, 2)\}$, et de rapport 3. **FAUX**.

L'égalité vectorielle s'écrit encore $\vec{MM}' = 4\vec{MG}$ (réduction vectorielle), soit encore $\vec{GM}' = -3\vec{GM}$, caractérisant une homothétie de centre G et de rapport -3.

Proposition 3 : A, B, C et D sont quatre points coplanaires. **FAUX**

Les vecteurs $\vec{DA}(0, 6, -5)$, $\vec{DB}(1, 5, -2)$ et $\vec{DC}(-1, 3, 0)$ ne sont pas coplanaires. En effet, les vecteurs \vec{DA} et \vec{DC} ne sont pas colinéaires (composantes nulles différentes) et \vec{DB} n'est pas combinaison linéaire de \vec{DA} et \vec{DC} .

$$\text{En effet } \vec{DB} = x\vec{DA} + y\vec{DC} \iff \begin{cases} -y & = 1 \\ 6x + 3y & = 5 \\ -5x & = -2 \end{cases} \text{ Équations incompatibles.}$$

Proposition 4 : La sphère de centre Ω de coordonnées (3, 3, 0) et de rayon 5 est tangente au plan d'équation : $2x + 2y + z + 3 = 0$. **VRAI**.

La distance du point Ω au plan est égale à $\frac{|2 \times 3 + 2 \times 3 + 0 + 3|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = 5$ donc est égale au rayon de la sphère.

EXERCICE 4**4 points****Commun à tous les candidats**

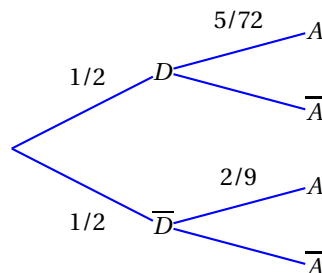
1. a. Il s'agit d'une expérience à deux issues avec une probabilité de succès $p = \frac{1}{6}$ et une probabilité d'échec $q = \frac{5}{6}$ que l'on répète de manière indépendante 3 fois. X représente le nombre de succès et suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = \frac{1}{6}$.

- b. L'espérance d'une loi binomiale de paramètres n et p est np. Donc

$$E(X) = 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

- c. $P(X = 2) = \binom{3}{2} p^2 q^1 = 3 \times \frac{5}{6^3} = \frac{5}{72}$.

2. a.



L'événement « choisir le dé équilibré et obtenir exactement deux six » correspond à $D \cap A$

$$p(D \cap A) = p(D) \times p_D(A) = \frac{1}{2} \times \frac{5}{72} = \frac{5}{144}.$$

L'événement « choisir le dé truqué et obtenir exactement deux six » correspond à $\overline{D} \cap A$.

$$p(\overline{D} \cap A) = p(\overline{D}) \times p_{\overline{D}}(A).$$

On utilise un raisonnement analogue au 1.c.,

$$p_{\overline{D}}(A) = \binom{3}{2} p'^2 q'^1 \text{ où } p' = \frac{1}{3}. \text{ Donc } p_{\overline{D}}(A) = \frac{2}{9} \text{ et } p(\overline{D} \cap A) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{9} = \frac{1}{9}.$$

b. On en déduit que $p(A) = p(D \cap A) + p(\overline{D} \cap A) = \frac{5}{144} + \frac{16}{144} = \frac{21}{144} = \frac{7}{48}$.

c. Il s'agit de calculer $p(\overline{D} \mid A) = \frac{p(\overline{D} \cap A)}{p(A)} = \frac{1}{9} \times \frac{48}{7} = \frac{16}{21}$.

3. a. $p_D(B_n) = 1 - p_D(\text{« n'obtenir aucun 6 »}) = 1 - q^n = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$. De même

$p_{\overline{D}}(B_n) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$. On applique alors la formule des probabilités totales :

$$p_n = p(B_n) = p(D) \times p_D(B_n) + p(\overline{D}) \times p_{\overline{D}}(B_n) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{5}{6}\right)^n - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

b. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ car $\frac{5}{6}$ et $\frac{2}{3}$ appartiennent à $] -1; 1[$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 1$. Ce résultat est prévisible car, quel que soit le dé, à condition de jouer suffisamment longtemps, on a une quasi certitude d'obtenir au moins une fois un 6. (ici, $p_{22} > 0,99$ et $p_{100} \approx 1$).