

Amérique du Nord

Exercice 1

Le plan complexe est rapporté à un repère $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ orthonormal direct.

On considère les points A et B d'affixes respectives : $a = i$ et $b = 1 + i$.

On note :

- r_A la rotation de centre A, d'angle $\frac{\pi}{2}$,
- r_B la rotation de centre B, d'angle $\frac{\pi}{2}$,
- r_O la rotation de centre O, d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

Partie A

On considère le point C d'affixe $c = 3i$.

On appelle D l'image de C par r_A , G l'image de D par r_B et H l'image de C par r_O .

On note d, g et h les affixes respectives des points D, G et H.

1. $d = -2 + i$: d est l'affixe de D qui est l'image de C par r_A ;

Or r_A admet pour écriture complexe : $z' - z_A = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - z_A) \Leftrightarrow z' - a = i(z - a) \Leftrightarrow z' = i(z - i) + i = iz + 1 + i$;

Donc $d = z_D = iz_C + 1 + i = ic + 1 + i = i \times 3i + 1 + i = -2 + i$.

2. g et h : De même,

- g est l'affixe de G l'image de D par r_B ; Or r_B admet pour écriture complexe :

$$z' - z_B = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - z_B) \Leftrightarrow z' - b = i(z - b) \Leftrightarrow z' = i(z - (1+i)) + (1+i) = iz + 2$$
 ;

Donc $g = z_G = iz_D + 2 = id + 2 = i \times (-2 + i) + 2 = 1 - 2i$.

- h est l'affixe de H l'image de C par r_O ; Or r_O admet pour écriture complexe :

$$z' - z_O = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z - z_O) \Leftrightarrow z' = -iz$$
 ;

Donc $h = z_H = iz_C = -i \times 3i = 3$ (ou immédiatement !)

3. Le quadrilatère CDGH est un rectangle :

- CDGH est donc un parallélogramme :

○ *Méthode 1 :*

$$\frac{z_C + z_G}{2} = \frac{c + g}{2} = \frac{3i + (1 - 2i)}{2} = \frac{1 + i}{2} \text{ et } \frac{z_D + z_H}{2} = \frac{d + h}{2} = \frac{(-2 + i) + 3}{2} = \frac{1 + i}{2}$$
 ;

Les diagonales [CG] et [DH] ont donc le même milieu ; CDGH est donc un parallélogramme.

○ *Méthode 2 :*

$$z_{\overline{CH}} = z_H - z_C = h - c = 3 - 3i \text{ et } z_{\overline{DG}} = z_G - z_D = g - d = (1 - 2i) - (-2 + i) = 3 - 3i$$
 ;

Les vecteurs \overline{CH} et \overline{DG} sont donc égaux ; CDGH est donc un parallélogramme.

- CDGH est donc un rectangle :

○ *Méthode 1 :*

$$\rightarrow CG = |z_G - z_C| = |g - c| = |(1 - 2i) - 3i| = |1 - 5i| = \sqrt{26}$$
 ,

$$\rightarrow DH = |z_H - z_D| = |h - d| = |3 - (-2 + i)| = |5 - i| = \sqrt{26}$$
 ;

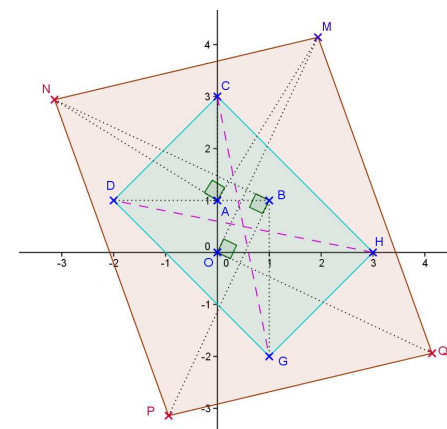
Les diagonales [CG] et [DH] ont donc la même longueur ; le parallélogramme CDGH est donc un rectangle ; CQFD !

○ *Méthode 2 :*

$$\frac{z_H - z_C}{z_D - z_C} = \frac{h - c}{d - c} = \frac{3 - 3i}{-2 + i - 3i} = \frac{3 - 3i}{-2 - 2i} = \frac{3 - 3i}{-2 - 2i} = \frac{(3 - 3i)(-2 + 2i)}{8} = \frac{-6 + 6i + 6i + 6}{8} = \frac{3}{2}$$
 ;

$$\text{donc } (\overline{CD}; \overline{CH}) = \arg\left(\frac{z_H - z_C}{z_D - z_C}\right) = \arg\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$
 ;

Les côtés [CD] et [CH] sont donc perpendiculaires ; le parallélogramme CDGH est donc un rectangle ; CQFD !



Partie B

On considère un point M, distinct de O et de A, d'affixe m .

On appelle N l'image de M par r_A , P l'image de N par r_B et Q l'image de M par r_O .

On note n, p et q les affixes respectives des points N, P et Q.

1. $n = im + 1 + i$: Puisque n est l'affixe de N qui est l'image de M par r_A qui admet pour écriture complexe :

$iz + 1 + i$ (cf. A.1.), $n = z_N = iz_M + 1 + i = im + 1 + i$; CQFD !

On admettra que $p = -m + 1 + i$ et $q = -im$.

2. Le quadrilatère MNPQ est un parallélogramme :

$$\frac{z_M + z_P}{2} = \frac{m + p}{2} = \frac{m + (-m + 1 + i)}{2} = \frac{1 + i}{2} \text{ et } \frac{z_N + z_Q}{2} = \frac{n + q}{2} = \frac{(im + 1 + i) + (-im)}{2} = \frac{1 + i}{2}$$
 ;

Les diagonales [MP] et [NQ] ont donc le même milieu ; MNPQ est donc un parallélogramme ; CQFD !

- 3.

$$\begin{aligned} \text{a. } \frac{m - n}{p - n} &= i + \frac{1}{m} : \frac{m - n}{p - n} = \frac{m - (im + 1 + i)}{(-m + 1 + i) - (im + 1 + i)} = \frac{(m - 1) - i(m + 1)}{-m - im} = \frac{(m - 1) - i(m + 1)}{-m(1 + i)} \\ &= \frac{[(m - 1) - i(m + 1)](1 - i)}{-m(1^2 + 1^2)} = \frac{(m - 1)(1 - i) - (i + 1)(m + 1)}{-2m} \\ &= \frac{\cancel{m} - 1 - im + i - im - i - \cancel{m} - 1}{-2m} = \frac{-2 - 2im}{-2m} = i + \frac{1}{m} ; \text{CQFD !} \end{aligned}$$

- b. Ensemble Γ des points M tels que le quadrilatère MNPQ soit un rectangle :

Le quadrilatère MNPQ, qui est déjà un parallélogramme, est un rectangle

⇔ il a deux côtés consécutifs perpendiculaires ;

⇔ ses côtés [NP] et [NM] sont donc perpendiculaires ;

$$\Leftrightarrow \left(\overline{NP}; \overline{NM} \right) = \pm \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \arg \left(\frac{m-n}{p-n} \right) = \pm \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \arg \left(\frac{1+i}{m} \right) = \pm \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{1+i}{m} \in i\mathbb{R} ;$$

Posons $m = x + iy$ avec $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ avec $(x; y) \neq (0; 0)$ car $M \neq O$ et $(x; y) \neq (0; 1)$ car $M \neq A$;

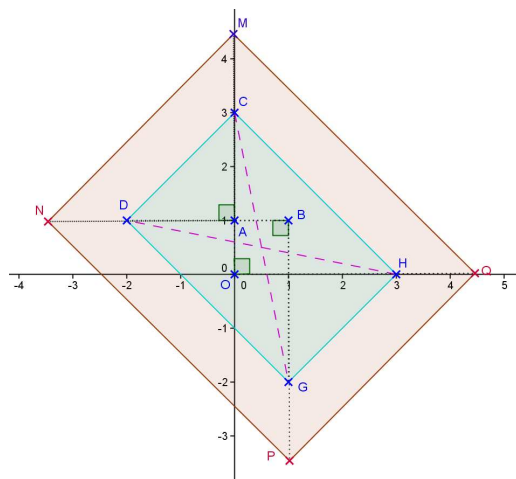
$$\text{Alors } \Leftrightarrow \frac{1}{m} + i = \frac{1}{x + iy} + i = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} + i = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{x^2 + y^2 - y}{x^2 + y^2} ;$$

$$\text{Donc } \frac{1}{m} + i \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{x^2 + y^2 - y}{x^2 + y^2} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{x}{x^2 + y^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ (x; y) \neq (0; 0) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m = iy \text{ avec } y \neq 0 \text{ et } y \neq 1 \Leftrightarrow m \in i\mathbb{R} \text{ avec } m \neq 0 \text{ et } m \neq i ;$$

L'ensemble Γ cherché des points M tels que le quadrilatère MNPQ soit un rectangle est donc l'axe des imaginaires purs privé des points O et A.

Remarque : Résultat conforme avec ceux établis dans la partie A.



Exercice 2

Partie A

Une salle informatique d'un établissement scolaire est équipée de 25 ordinateurs dont 3 sont défectueux.

Tous les ordinateurs ont la même probabilité d'être choisis.

On choisit au hasard deux ordinateurs de cette salle.

Probabilité que ces deux ordinateurs soient défectueux :

Situation d'équiprobabilité où il y a $\binom{25}{2} = 300$ cas possibles et $\binom{3}{2} = 3$ cas favorables à l'événement

E : "2 ordinateurs sur les 3 choisis soient défectueux" d'où : $p(E) = \frac{3}{300} = \frac{1}{100} = 0,01$.

Partie B

La durée de vie d'un ordinateur (c'est-à-dire la durée de fonctionnement avant la première panne), est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$.

Ainsi, pour tout réel t positif, la probabilité qu'un ordinateur ait une durée de vie inférieure à t années, notée $p(X \leq t)$, est donnée par : $p(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$.

Rappel :

$$p(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx = \left[-e^{-\lambda x} \right]_0^t = 1 - e^{-\lambda t}.$$

1. λ sachant que $p(X > 5) = 0,4$:

$$p(X > 5) = 0,4 \Leftrightarrow 1 - p(X \leq 5) = 0,4 \Leftrightarrow 1 - (1 - e^{-5\lambda}) = 0,4 \Leftrightarrow e^{-5\lambda} = 0,4 \Leftrightarrow -5\lambda = \ln 0,4 \Leftrightarrow \lambda = \frac{\ln 0,4}{-5} \approx 0,18.$$

2. Dans cette question on prendra $\lambda = 0,18$.

Sachant qu'un ordinateur n'a pas eu de panne au cours des 3 premières années, probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure à 5 ans :

On cherche donc la probabilité suivante : $p(X > 5 / X > 3)$;

Or une loi exponentielle exprimant un processus sans vieillissement, $p(X > 5 / X > 3) = P(X > 2)$;

$$\text{D'où } p(X > 5 / X > 3) = P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - (1 - e^{-2\lambda}) = e^{-2\lambda} \approx e^{-2 \times 0,18} \approx 0,698.$$

3. Dans cette question on admet que la durée de vie d'un ordinateur est indépendante de celle des autres et que $p(X > 5) = 0,4$.

- a. On considère un lot de 10 ordinateurs.

Probabilité que, dans ce lot, l'un au moins des ordinateurs ait une durée de vie supérieure à 5 ans :

- D'après les hypothèses faites, on est en présence d'un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 10$ et $p = 0,4$;
- Soit alors Y la variable aléatoire égale au nombre d'ordinateurs qui auront une durée de vie supérieure à 5 ans (sur les 10 choisis) ; Y suit la loi binomiale $B(10; 0,4)$ et $p(Y = k) = \binom{10}{k} \times 0,4^k \times 0,6^{10-k}$;
- La probabilité cherchée est alors : $p(Y \geq 1) = 1 - p(Y = 0) = 1 - 0,6^{10} \approx 0,994$.

- b. Nombre minimal d'ordinateurs qu'il faut choisir pour que la probabilité de l'événement « l'un au moins d'entre eux a une durée de vie supérieure à 5 ans » soit supérieure à 0,999 :

- D'après les hypothèses faites, on est toujours en présence d'un schéma de Bernoulli de paramètres n et $p = 0,4$;
- Soit alors Y la variable aléatoire égale au nombre d'ordinateurs qui auront une durée de vie supérieure à 5 ans (sur les n choisis) ; Y suit la loi binomiale $B(n; 0,4)$ et $p(Y = k) = \binom{n}{k} \times 0,4^k \times 0,6^{n-k}$;
- L'événement « l'un au moins d'entre eux a une durée de vie supérieure à 5 ans » est l'événement $(Y \geq 1)$; Sa probabilité est donc : $p(Y \geq 1) = 1 - p(Y = 0) = 1 - 0,6^n$;
- Le problème revient alors à résoudre dans \mathbb{N} l'inéquation suivante :

$$1 - 0,6^n > 0,999 \Leftrightarrow 10^{-3} > 0,6^n \Leftrightarrow \ln(10^{-3}) > \ln(0,6^n)$$

In croissante

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} -3\ln 10 > n \ln 0,6 \\ \ln x^n = n \ln x \text{ si } x > 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} n > \frac{-3\ln 10}{\ln 0,6} \\ \ln x < 0 \text{ si } 0 < x < 1 \end{matrix} \Leftrightarrow n \geq 14 ;$$

Il faut donc choisir au minimum 14 ordinateurs pour que la probabilité de l'évènement « l'un au moins d'entre eux a une durée de vie supérieure à 5 ans » soit supérieure à 0,999.

Exercice 3

Partie A : Restitution organisée de connaissances

On considère trois points A, B et C de l'espace et trois réels a, b et c de somme non nulle.

Démonstration du résultat suivant :

Pour tout réel k strictement positif, l'ensemble des points M de l'espace tels que $\|a\overline{MA} + b\overline{MB} + c\overline{MC}\| = k$ est une sphère dont le centre est le barycentre des points A, B et C affectés des coefficients respectifs a, b et c.

Soit G le barycentre, qui existe bien puisque a, b et c sont trois réels de somme non nulle, des points A, B et C affectés des coefficients respectifs a, b et c ; Alors pour tout point M on a : $a\overline{MA} + b\overline{MB} + c\overline{MC} = (a+b+c)\overline{MG}$;

$$\text{D'où } \|a\overline{MA} + b\overline{MB} + c\overline{MC}\| = k \Leftrightarrow \|(a+b+c)\overline{MG}\| = k \Leftrightarrow \begin{matrix} \|k\vec{u}\| = k \|\vec{u}\| \\ a+b+c \neq 0 \end{matrix} \Leftrightarrow |a+b+c| \times \|\overline{MG}\| = k \Leftrightarrow GM = \frac{k}{|a+b+c|} ;$$

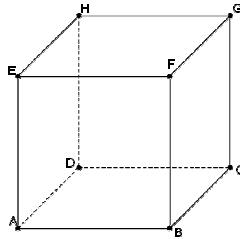
L'ensemble des points M de l'espace tels que $\|a\overline{MA} + b\overline{MB} + c\overline{MC}\| = k$ est donc bien une sphère de centre G, le barycentre des points A, B et C ; CQFD !

Partie B

On considère le cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1 représenté ci-contre.

Il n'est pas demandé de rendre le graphique avec la copie.

L'espace est rapporté au repère orthonormal (A ; \overline{AB} , \overline{AD} , \overline{AE}).



1. Le vecteur \vec{n} de coordonnées (1 ; 0 ; 1) est un vecteur normal au plan (BCE) :

$$\rightarrow \overline{BC}(0;1;0) \text{ donc } \vec{n} \cdot \overline{BC} = 1 \times 0 + 0 \times 1 + 1 \times 0 = 0 \Rightarrow \vec{n} \perp \overline{BC} ;$$

$$\rightarrow \overline{BE}(-1;0;1) \text{ donc } \vec{n} \cdot \overline{BE} = 1 \times (-1) + 0 \times 0 + 1 \times 1 = 0 \Rightarrow \vec{n} \perp \overline{BE} ;$$

\vec{n} étant orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan (BCE) est bien est un vecteur normal au plan (BCE) ; CQFD !

2. Une équation du plan (BCE) : $\vec{n}(1 ; 0 ; 1)$ étant un vecteur normal au plan (BCE), (BCE) admet une équation cartésienne de la forme : $x + z + d = 0$; Et comme B(1 ; 0 ; 0) \in (BCE), $1 + 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = -1$;

$$\text{D'où (BCE) : } x + z - 1 = 0.$$

3. On note (Δ) la droite perpendiculaire en E au plan (BCE) ; Une représentation paramétrique de (Δ) :

(Δ) étant perpendiculaire au plan (BCE), tout vecteur normal à (BCE) est un vecteur directeur de (Δ) ;

$$\text{Ainsi, } M(x; y; z) \in (\Delta) \Leftrightarrow \overline{EM} = k\vec{n} \Leftrightarrow \begin{cases} x-0 = k \times 1 \\ y-0 = k \times 0 \\ z-1 = k \times 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k \\ y = 0 \\ z = 1+k \end{cases} \text{ où } k \in \mathbb{R}.$$

4. La droite (Δ) est sécante au plan (ABC) en un point R, symétrique de B par rapport à A :

Le plan (ABC) admet pour équation cartésienne : $z = 0$;

$$\text{Ainsi, } M(x; y; z) \in (\Delta) \cap (ABC) \Leftrightarrow \begin{cases} x = k \\ y = 0 \\ z = 1+k \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x = k \\ y = 0 \\ 0 = 1+k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x = -1 \\ y = 0 \\ k = -1 \end{cases} ;$$

La droite (Δ) est donc sécante au plan (ABC) en le point R(-1 ; 0 ; 0) qui est bien le symétrique de B par rapport à A ; CQFD !

5.

a. Le point D est le barycentre des points R, B et C affectés des coefficients 1, -1 et 2 :

Soit G le barycentre, qui existe bien puisque $1 + (-1) + 2 \neq 0$, des points R, B et C affectés des coefficients

$$1, -1 \text{ et } 2 ; \text{ Alors G a pour coordonnées : } \begin{cases} x = \frac{x_R - x_B + 2x_C}{2} = \frac{-1 - 1 + 2}{2} = 0 = x_D \\ y = \frac{y_R - y_B + 2y_C}{2} = \frac{0 - 0 + 2}{2} = 1 = y_D ; \text{ Donc } G = D ; \\ z = \frac{z_R - z_B + 2z_C}{2} = \frac{0 - 0 + 0}{2} = 0 = z_D \end{cases}$$

Le point D est donc bien le barycentre des points R, B et C affectés des coefficients 1, -1 et 2 ; CQFD !

b. L'ensemble (S) des points M de l'espace tels que $\|\overline{MR} - \overline{MB} + 2\overline{MC}\| = 2\sqrt{2}$:

$$M \in (S) \Leftrightarrow \|\overline{MR} - \overline{MB} + 2\overline{MC}\| = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \|2\overline{MD}\| = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \cancel{2} \times MD = \cancel{2} \sqrt{2} \Leftrightarrow DM = \sqrt{2} ;$$

L'ensemble (S) est donc la sphère de centre D et de rayon $\sqrt{2}$.

Remarque : c'est un cas particulier du cas général établi dans la partie A.

c. Les points B, E et G appartiennent à l'ensemble (S) :

Il est clair que les points B, E et G appartiennent à l'ensemble (S) puisque $DB = DE = DG = \sqrt{2}$.

d. L'intersection du plan (BCE) et de l'ensemble (S) est un cercle dont on précisera le rayon :

L'intersection du plan (BCE) et de la sphère (S) contenant déjà 3 points est donc un cercle (C) ;

On retrouve ceci en calculant la distance de D au plan (BCE) :

$$d(D; (BCE)) = \frac{|x_D + z_D - 1|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{|0 + 0 - 1|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} < \sqrt{2} ;$$

Le centre de (C) est le projeté orthogonal de D sur le plan (BCE) qui est I le milieu de [DG] ;

Le rayon r de (C) est tel que $d(D; (BCE))^2 + r^2 = R^2 \Leftrightarrow r^2 = (\sqrt{2})^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Autre méthode :

$$\begin{aligned} M(x; y; z) \in (S) \cap (BCE) &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 2 \\ x+z-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+z=1 \\ x^2 + y^2 - 2y + z^2 = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x+z=1 \\ x^2 + y^2 - 2y + z^2 = x+z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+z=1 \\ x^2 - x + y^2 - 2y + z^2 - z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x+z=1 \\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + (y-1)^2 - 1 + \left(z-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

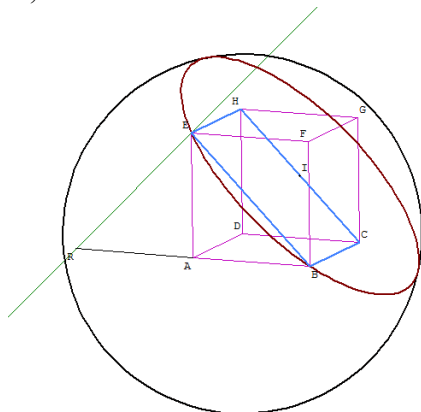
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+z-1=0 \\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 + \left(z-\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow M(x; y; z) \in (S') \cap (BCE)$$

où (S') est la sphère de centre $\Omega\left(\frac{1}{2}; 1; \frac{1}{2}\right)$ (c-à-d I) et de rayon $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$;

Ainsi, l'intersection du plan (BCE) et de la sphère (S) coïncide avec l'intersection du plan (BCE) et de la sphère (S') ; Et comme $x_{\Omega'} + z_{\Omega'} - 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow \Omega' \in (BCE)$, cette intersection est le cercle dans (BCE)

de centre $\Omega\left(\frac{1}{2}; 1; \frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{6}}{2}$.



Exercice 4

Partie A

On considère la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = e^x - x - 1$.

1. Les variations de la fonction g :

- g est dérivable sur $[0; +\infty[$ et $g'(x) = e^x - 1$;
- $g'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$;
- g' étant strictement positive sur l'intervalle $]0; +\infty[$, g est strictement croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

2. Le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x : $g(0) = e^0 - 0 - 1 = 0$;

Donc, g étant croissante, g est nulle en 0 et strictement positive sur l'intervalle.

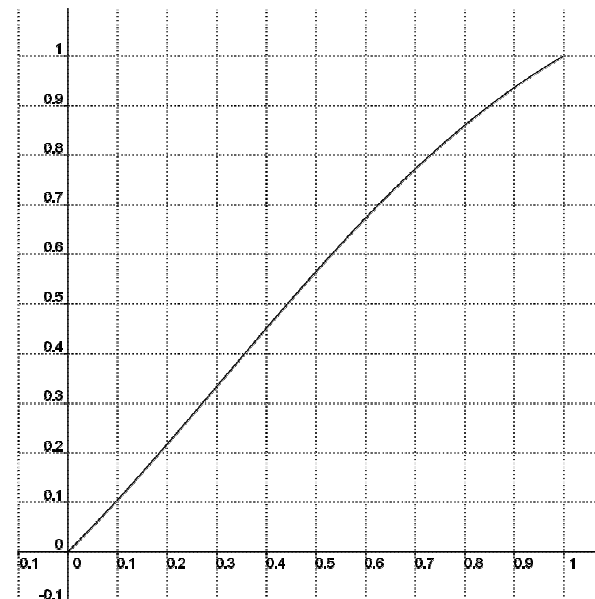
3. Pour tout x de $[0; +\infty[$, $e^x - x > 0$:

Donc, pour tout x de $[0; +\infty[$, $g(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x - x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x - x \geq 1 \Rightarrow e^x - x > 0$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$.

La courbe (C) représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal est donnée ci-après.



On admet que f est strictement croissante sur $[0; 1]$.

1. Pour tout x de $[0; 1]$, $f(x) \in [0; 1]$:

Comme f est strictement croissante sur $[0; 1]$, pour tout x de $[0; 1]$, $f(0) \leq f(x) \leq f(1)$;

Or $f(0) = \frac{e^0 - 1}{e^0 - 0} = \frac{0}{1} = 0$ et $f(1) = \frac{e^1 - 1}{e^1 - 1} = 1$; Donc pour tout x de $[0; 1]$, $f(x) \in [0; 1]$; CQFD !

2. Soit (D) la droite d'équation $y = x$.

a. Pour tout x de $[0; 1]$, $f(x) - x = \frac{(1-x)g(x)}{e^x - x}$;

$$\text{On a : } f(x) - x = \frac{e^x - 1}{e^x - x} - x = \frac{e^x - 1 - x(e^x - x)}{e^x - x} = \frac{e^x - 1 - xe^x + x^2}{e^x - x}$$

$$\text{Et : } \frac{(1-x)(e^x - x - 1)}{e^x - x} = \frac{(e^x - x - 1) - (xe^x - x^2 - x)}{e^x - x} = \frac{e^x - 1 - xe^x + x^2}{e^x - x}$$

Donc, on a bien, pour tout x de $[0; 1]$, $f(x) - x = \frac{(1-x)g(x)}{e^x - x}$; CQFD !

b. La position relative de la droite (D) et de la courbe (C) sur $[0; 1]$:

La position de la droite (D) et de la courbe (C) sur $[0; 1]$ est donnée par le signe de $f(x) - x$;

$$\text{Or, } f(x) - x > 0 \Leftrightarrow \frac{(1-x)g(x)}{e^x - x} > 0 \Leftrightarrow \frac{(1-x)g(x)}{e^x - x} > 0 \Leftrightarrow (1-x)g(x) > 0 \Leftrightarrow g(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0 ;$$

Donc la droite (D) est située au-dessous de la courbe (C) sur $]0; 1]$, et la coupe au point O .

3.

a. Une primitive de f sur $[0; 1]$: $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x} = \frac{u'(x)}{u(x)}$ où $u(x) = e^x - x$; Comme $u > 0$ sur $[0; 1]$ (cf.

A.3.), une primitive F de f sur $[0; 1]$ est définie par : $F(x) = \ln(u(x)) = \ln(e^x - x)$.

b. Aire, en unités d'aire, du domaine du plan délimité par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$:

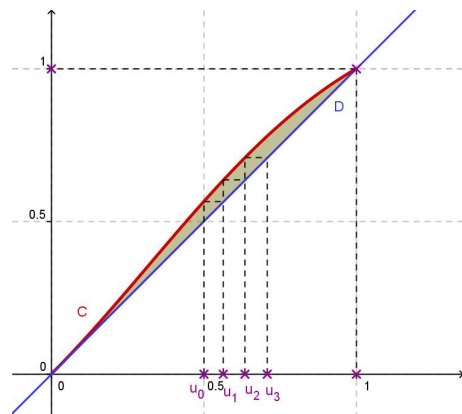
La courbe (C) étant située au-dessus la droite (D) sur l'intervalle $[0; 1]$, cette aire vaut en u.a. :

$$\int_0^1 f(x) - x \, dx = \left[F(x) - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 = \left[\ln(e^x - x) - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 = \ln(e - 1) - \frac{1}{2} \approx 0,04.$$

Partie C

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$, pour tout entier naturel n .

1. Construction sur l'axe des abscisses des quatre premiers termes de la suite :



2. Pour tout entier naturel n , $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$: Effectuons un raisonnement par récurrence ;

Appelons P_n la propriété : « $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$ » ;

- **Initialisation** : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_1 = f(u_0) = f(0,5) = \frac{e^{0,5} - 1}{e^{0,5} - 0,5} \approx 0,56$;

Donc on a bien : $\frac{1}{2} \leq u_0 \leq u_1 \leq 1$, soit P_0 est vraie (1)

- **Hérédité** : Supposons que, pour un n donné, P_n soit vraie, à savoir : $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$;

Mais f étant croissante sur $[0; 1]$, on en déduit que $f\left(\frac{1}{2}\right) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(1)$;

D'où puisque $f\left(\frac{1}{2}\right) \geq \frac{1}{2}$ et $f(1) = 1$: $\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 1$;

Ainsi la propriété P_{n+1} est vraie (si P_n l'est) (2)

- Finalement, de (1) et (2), la propriété P_n est vraie quelque soit $n \in \mathbb{N}$; CQFD !

3. La suite (u_n) est convergente :

Puisque $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$ pour tout n , la suite (u_n) est donc croissante et majorée (par 1) ; elle est donc

convergente, de limite $l \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

Sa limite : la fonction f étant continue, par passage à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = f(u_n)$, il vient :

$$l = f(l) \Leftrightarrow f(l) - l = 0 \Leftrightarrow (1-l)g(l) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} l=1 \\ l=0 \end{cases} ; \text{ Donc, puisque } l \in \left[\frac{1}{2}; 1\right], l=1.$$