

# BACCALAUREAT GENERAL

SESSION 2006

## MATHÉMATIQUES

SERIE : ES

**Obligatoire**

DUREE DE L'EPREUVE : 3 heures - COEFFICIENT : 5

Ce sujet comporte 6 pages dont 1 feuille ANNEXE.

*L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.*

*L'usage des formulaires de mathématiques n'est pas autorisé.*

*Le candidat doit traiter les quatre exercices.  
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements  
entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*La feuille ANNEXE est à rendre avec la copie.*

## EXERCICE 1 (3 points)

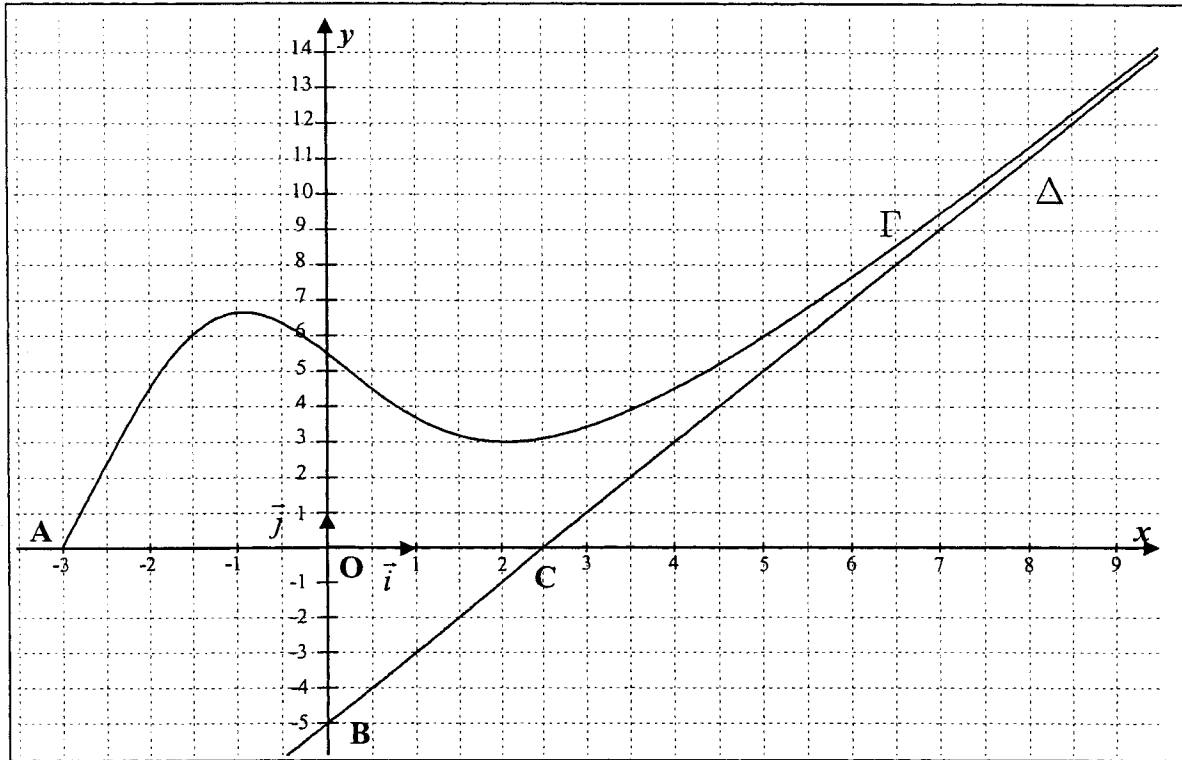
Commun à tous les candidats

Soit  $f$  une fonction définie et dérivable sur l'intervalle  $[-3; +\infty[$ , croissante sur les intervalles  $[-3; -1]$  et  $[2; +\infty[$  et décroissante sur l'intervalle  $[-1; 2]$ .

On note  $f'$  sa fonction dérivée sur l'intervalle  $[-3; +\infty[$ .

La courbe  $\Gamma$  représentative de la fonction  $f$  est tracée ci-dessous dans un repère orthogonal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

Elle passe par le point  $A(-3; 0)$  et admet pour asymptote la droite  $\Delta$  d'équation  $y = 2x - 5$ .



Pour chacune des affirmations ci-dessous, cocher la case V (l'affirmation est vraie) ou la case F (l'affirmation est fausse) sur l'ANNEXE, à rendre avec la copie.

Les réponses ne seront pas justifiées.

**NOTATION** : une réponse exacte rapporte 0,5 point ; une réponse inexacte enlève 0,25 point ; l'absence de réponse ne rapporte aucun point et n'en enlève aucun. Si le total des points est négatif, la note globale attribuée à l'exercice est 0.

- L'équation  $f(x) = 4$  admet exactement deux solutions dans l'intervalle  $[-3; +\infty[$ .
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x - 5)] = +\infty$ .
- $f'(0) = 1$ .
- $f'(x) > 0$  pour tout nombre réel  $x$  appartenant à l'intervalle  $[-2; 1]$ .
- $\int_{-1}^1 f(x) dx \geq 7$ .

## EXERCICE 2 (5 points)

### Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.

La médiathèque d'une université possède des DVD de deux provenances, les DVD reçus en dotation et les DVD achetés.

Par ailleurs, on distingue les DVD qui sont de production européenne et les autres.

On choisit au hasard un de ces DVD.

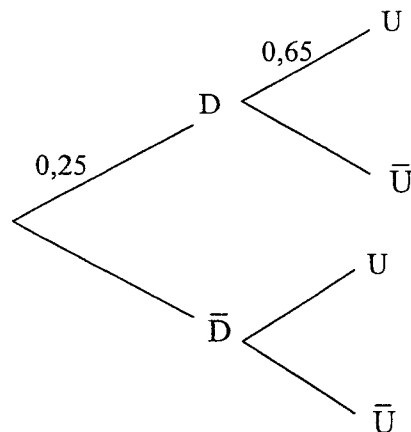
On note :

$D$  l'événement « le DVD a été reçu en dotation » et  $\bar{D}$  l'événement contraire,

$U$  l'événement « le DVD est de production européenne » et  $\bar{U}$  l'événement contraire.

On modélise cette situation aléatoire par l'arbre incomplet suivant dans lequel figurent quelques probabilités :

par exemple, la probabilité que le DVD ait été reçu en dotation est  $p(D) = 0,25$ .



On donne, de plus, la probabilité de l'événement  $U$  :  $p(U) = 0,7625$ .

*Les parties A et B sont indépendantes.*

#### PARTIE A :

1) a) Donner la probabilité de  $U$  sachant  $D$ .

b) Calculer  $p(\bar{D})$ .

2) a) Calculer la probabilité que le DVD choisi ait été reçu en dotation et soit de production européenne (donner la valeur exacte).

b) Montrer que la probabilité que le DVD choisi ait été acheté et soit de production européenne est égale à 0,6.

3) Sachant que le DVD choisi a été acheté, calculer la probabilité qu'il soit de production européenne.

#### PARTIE B :

On choisit trois DVD au hasard. On admet que le nombre de DVD est suffisamment grand pour que ce choix soit assimilé à trois tirages successifs indépendants avec remise. On rappelle que la probabilité de choisir un DVD reçu en dotation est égale à 0,25.

Déterminer la probabilité de l'événement : « exactement deux des trois DVD choisis ont été reçus en dotation ». (Donner la valeur décimale arrondie au millième).

## EXERCICE 3 (5 points)

Commun à tous les candidats

**Les deux parties de l'exercice sont indépendantes.**

Le tableau ci-dessous donne la consommation médicale (exprimée en milliards d'euros) de la population d'un pays :

| Année                 | 1990 | 1995 | 2000  | 2001 | 2002 | 2003  |
|-----------------------|------|------|-------|------|------|-------|
| Rang de l'année $x_i$ | 0    | 5    | 10    | 11   | 12   | 13    |
| Consommation $y_i$    | 38   | 49,1 | 51,81 | 57   | 62,7 | 68,97 |

D'après INSEE.

### **PARTIE A :**

Le but de cette partie est de mettre en œuvre deux modélisations de cette consommation médicale.

#### **1) Premier modèle :**

- On utilise un ajustement affine. Donner, à l'aide de la calculatrice, l'équation de la droite de régression de  $y$  en  $x$ , obtenue par la méthode des moindres carrés. Pour chacun des coefficients, donner la valeur décimale arrondie au centième.
- En supposant que l'évolution se poursuive selon ce modèle, en déduire une estimation de la consommation médicale en milliards d'euros pour l'année 2008 (donner la valeur décimale arrondie au centième).

#### **2) Deuxième modèle :**

- Calculer l'accroissement relatif de la consommation médicale de l'année 2000 à l'année 2001, puis de l'année 2001 à l'année 2002 (donner la valeur décimale arrondie au dixième).
- À partir de l'année 2000, on modélise la consommation médicale par :  
 $y = 51,81 \times 1,1^n$  pour l'année 2000 +  $n$  avec  $n$  entier naturel.  
En utilisant ce deuxième modèle, en déduire une estimation de la consommation médicale en milliards d'euros pour l'année 2008 (donner la valeur décimale arrondie au centième).

### **PARTIE B : Réduction des dépenses.**

Pour l'année 2005, la consommation médicale réelle s'est élevée à 83,44 milliards d'euros. Il a été décidé de réduire les dépenses et de les ramener en 2006 à 69,79 milliards d'euros. De quel pourcentage (arrondi à 1 %) la consommation médicale doit-elle baisser pour atteindre cet objectif ?

### **Rappel de définitions**

On désigne par  $a_1$  et  $a_2$  des nombres réels strictement positifs  $a_2 > a_1$ .

L'accroissement absolu de  $a_1$  à  $a_2$  est égal à  $a_2 - a_1$ .

L'accroissement relatif de  $a_1$  à  $a_2$  est égal à  $\frac{a_2 - a_1}{a_1}$ .

## EXERCICE 4 (7 points)

Commun à tous les candidats.

On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  par  $f(x) = e^{x-3} - \frac{1}{x+4}$ .

### PARTIE A :

- 1) La fonction  $f$  est dérivable sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ , on note  $f'$  sa fonction dérivée.  
Calculer  $f'(x)$  pour tout nombre réel  $x$  appartenant à l'intervalle  $[0; +\infty[$ .
- 2) En déduire que la fonction  $f$  est strictement croissante sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ .
- 3) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
- 4) a. Dresser le tableau de variation de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ .  
b. On admet qu'il existe un unique nombre réel positif  $\alpha$  tel que  $f(\alpha) = 0$ .  
Donner le signe de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ .
- 5) a. Reproduire sur la copie et compléter le tableau suivant (donner les valeurs décimales arrondies au dix-millième) :

|        |      |       |      |
|--------|------|-------|------|
| $x$    | 1,32 | 1,325 | 1,33 |
| $f(x)$ |      |       |      |

- b. En déduire la valeur décimale, arrondie au centième, du nombre  $\alpha$  tel que  $f(\alpha) = 0$ .

### PARTIE B :

- 1) Soit  $g$  la fonction définie sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  par  $g(x) = e^{x-3} - \ln(x+4)$ .
  - a. La fonction  $g$  est dérivable sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ . On note  $g'$  sa fonction dérivée.  
Calculer  $g'(x)$  pour tout nombre réel  $x$  appartenant à l'intervalle  $[0; +\infty[$ .
  - b. Étudier le sens de variation de la fonction  $g$  sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  en utilisant les résultats de la **PARTIE A**.
- 2) Calculer l'intégrale  $I = \int_0^3 f(x) dx$ .  
(Donner la valeur exacte, puis la valeur décimale arrondie au centième).

# ANNEXE

## EXERCICE 1

Commun à tous les candidats

À rendre avec la copie

Pour chacune des affirmations ci-dessous, cocher la case V (l'affirmation est vraie) ou la case F (l'affirmation est fausse) .

Les réponses ne seront pas justifiées.

**NOTATION** : une réponse exacte rapporte 0,5 point ; une réponse inexacte enlève 0,25 point ; l'absence de réponse ne rapporte aucun point et n'en enlève aucun. Si le total des points est négatif, la note globale attribuée à l'exercice est 0.

| AFFIRMATIONS  | V | F |
|---|---|---|
| a) L'équation $f(x) = 4$ admet exactement deux solutions dans l'intervalle $[-3 ; +\infty[$ |   |   |
| b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  |   |   |
| c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x - 5)] = +\infty$                               |   |   |
| d) $f'(0) = 1$  |   |   |
| e) $f'(x) > 0$ pour tout nombre réel $x$ appartenant à l'intervalle $[-2 ; 1]$ .            |   |   |
| f) $\int_{-1}^1 f(x) dx \geq 7$   |   |   |

# CORRIGE

**Ces éléments de correction n'ont qu'une valeur indicative. Ils ne peuvent en aucun cas engager la responsabilité des autorités académiques, chaque jury est souverain.**

|   |                                      |                     |
|---|--------------------------------------|---------------------|
|   | <b>BACCALAUREAT GENERAL</b>          |                     |
| Série                                       | <b>ES</b>                            | <b>SESSION 2006</b> |
| Epreuve                                     | <b>MATHEMATIQUES</b>                 | Durée : 3h          |
| Coef :<br>5 (obligatoire)<br>7 (Spécialité) | <b>RECOMMANDATIONS DE CORRECTION</b> |                     |

| Question                         | Réponse   | Points | Commentaires   |
|----------------------------------|---|--------|--|
|                                  | <b>Exercice 1 (3points)</b><br><b>Commun à tous les candidats</b> |        |  |
| a)<br>b)<br>b)<br>d)<br>e)<br>f) | F<br>V<br>F<br>F<br>F<br>V  |        | Pour chaque réponse :<br>+ 0,5 pt si exacte.<br>- 0,25 pt si inexacte. |

| Question                 | Réponse  | Points | Commentaires                            |
|--------------------------|--|--------|---|
|                          | <b>Exercice 2 (5 points)</b><br><b>Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité</b>  |        |   |
| <b>Partie A</b><br>1) a) | $P_D(U) = 0,65$ d'après l'arbre.   |        |   |
| 1) b)                    | $P(\bar{D}) = 1 - P(D) = 0,75$ .   |        |   |
| <b>Partie A</b><br>2) a) | On cherche $P(D \text{ et } U)$ .<br>$P(D \text{ et } U) = P(D) \times P_D(U) = 0,25 \times 0,65 = 0,1625$ .<br><u>Autre rédaction :</u><br>D'après l'arbre : $P(D \text{ et } U) = 0,25 \times 0,65 = 0,1625$ . |        | Autre notation<br>$P(D \cap U)$ .       |
| 2) b)                    | On s'intéresse à $P(\bar{D} \text{ et } U)$ .<br>Les événements $(D \text{ et } U)$ et $(\bar{D} \text{ et } U)$ constituent une partition de l'événement $U$ .  |        | Autre notation<br>$P(\bar{D} \cap U)$ . |



|                       |  |  |  |
|-----------------------|--|--|--|
|                       | <p>Donc : <math>P(D \text{ et } U) + P(\bar{D} \text{ et } U) = P(U)</math>.<br/> <math>P(\bar{D} \text{ et } U) = P(U) - P(D \text{ et } U)</math>.<br/> <math>= 0,7625 - 0,1625 = 0,60</math>.</p>   |  |  |
| <b>Partie A</b><br>3) | <p>On cherche <math>P_{\bar{D}}(U)</math>.<br/> <math>P_{\bar{D}}(U) = \frac{P(\bar{D} \text{ et } U)}{P(\bar{D})} = \frac{0,60}{0,75} = 0,8</math>.</p>   |  |  |
| <b>Partie B</b>       | <p>Le nombre <math>X</math> de DVD choisis provenant d'une dotation suit une loi binômiale de paramètres <math>n = 3</math> et <math>p = 0,25</math>.<br/> La probabilité cherchée est :<br/> <math>P(X = 2) = 3 \times p^2 \times (1 - p)</math>.<br/> <math>= 3 \times 0,25^2 \times 0,75</math>.<br/> <math>\approx 0,141</math> valeur arrondie au millième.<br/> Autre démarche possible : utiliser un arbre.</p> |  |  |

| Question              | Réponse  | Points | Commentaires |
|-----------------------|--|--------|--------------|
|                       | <p><b>Exercice 2 (5 points)</b><br/> <b>Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité</b></p>   |        |              |
| <b>Partie 1</b><br>1) | <pre> graph LR     C((C)) -- 0,4 --&gt; C     C -- 0,6 --&gt; V((V))     V -- 0,35 --&gt; C     V -- 0,65 --&gt; V </pre>  |        |              |
| 2)                    | <p>L'état stable du système est la matrice <math>P</math> qui vérifie <math>P = PM</math>.<br/> D'où <math>a = 70</math> et <math>b = 120</math>.<br/> Ici, on a bien<br/> <math>(70 \ 120) \times M = (70 \ 120)</math>.</p> <p><u>Interprétation :</u><br/> Le nombre d'habitants pratiquant le covoiturage tend vers 70 milliers.<br/> Le nombre d'habitants se déplaçant seuls dans leur voiture tend vers 120 milliers.</p> |        |              |

|                                  |  |  |  |
|----------------------------------|--|--|--|
| <p><b>Partie 2</b></p> <p>1)</p> | $U_{n+1} = X_{n+1} - 70.$ $= 0,05 X_n + 66,5 - 70.$ $= 0,05 X_n - 3,5.$ $= 0,05(X_n - 70).$ $= 0,05U_n.$ <p>La suite <math>(U_n)</math> est donc géométrique.<br/>Raison : 0,05 Premier terme :<br/><math>U_0 = X_0 - 70 = -10.</math></p>   |  |  |
| <p>2)</p>                        | $U_n = U_0 \times (0,05)^n = -10 \times (0,05)^n.$ $X_n = U_n + 70.$ $= 70 - 10 \times (0,05)^n.$ <p>Pour tout <math>n</math>, <math>X_n</math> est inférieur à 70 donc le nombre d'habitants pratiquant le covoiturage est inférieur à 70 000 et n'atteint pas la moitié de la population (c'est-à-dire 85000 personnes).</p> |  |  |

| Question                            | Réponse  | Points | Commentaires  |
|-------------------------------------|--|--------|---|
|                                     | <p><b>Exercice 3 (5 points)</b><br/><b>Commun à tous les candidats</b></p>   |        |   |
| <p><b>Partie A</b></p> <p>1) a)</p> | $y = ax + b$ <p>avec <math>a \approx 2,03</math> arrondi au centième<br/><math>b \approx 37,31</math> arrondi au centième.</p>   |        |   |
| <p><b>Partie A</b></p> <p>1) b)</p> | <p>2008 correspond à <math>x = 18.</math><br/>En utilisant les valeurs arrondies au centième de <math>a</math> et <math>b</math> : <math>y \approx 73,85.</math><br/>La consommation médicale pour 2008 peut être estimée à 73,85 milliards d'euros.</p> |        | <p>Accepter tout résultat compatible avec l'équation obtenue au a).</p> |

|                          |   |  |  |
|--------------------------|---|--|--|
| <b>Partie A</b><br>2) a) | Accroissement relatif de 2000 à 2001 :<br>$\frac{57 - 51,81}{51,81} \approx 0,1.$<br>Accroissement relatif de 2001 à 2002 :<br>$\frac{62,70 - 57}{57} = 0,1.$                                   |  |  |
| <b>Partie A</b><br>2) b) | 2008 correspond à $n = 8$ .<br>$y = 51,81 \times 1,1^8 \approx 111,06$ arrondi au centième.<br>La consommation médicale pour 2008 peut être estimée, par ce modèle, à 111,06 milliards d'euros. |  |  |
| <b>Partie B</b>          | $\frac{69,79 - 83,44}{83,44} \approx -0,16$ . (arrondi au centième)<br>La consommation médicale doit baisser de 16%.  |  |  |

| Question              | Réponse  | Points | Commentaires |
|-----------------------|--|--------|--------------|
|                       | <b>Exercice 4 (7 points)</b><br><b>Commun à tous les candidats</b>   |        |              |
| <b>Partie A</b><br>1) | $f'(x) = e^{x-3} + \frac{1}{(x+4)^2}.$   |        |              |
| <b>Partie A</b><br>2) | Pour tout $x$ de $[0; +\infty[$ , $f'(x) > 0$ car $e^{x-3} > 0$<br>et $\frac{1}{(x+4)^2} > 0$ .<br><br>Donc $f$ est strictement croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$ .   |        |              |
| <b>Partie A</b><br>3) | <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 3 = +\infty</math> et <math>\lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty</math>, donc<br/><math>\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x-3} = +\infty</math>.</li> <li>• <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+4} = 0</math>.</li> <li>• Ainsi : <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty</math>.</li> </ul> |        |              |

|                                 |  |               |           |           |         |        |         |         |        |               |           |  |  |
|---------------------------------|--|---------------|-----------|-----------|---------|--------|---------|---------|--------|---------------|-----------|--|--|
| <b>Partie A</b><br><b>4) a)</b> | <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td style="padding: 5px;"><math>x</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>0</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>+\infty</math></td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;"><math>f'(x)</math></td> <td colspan="2" style="text-align: center; padding: 5px;">+</td> </tr> </table><br><table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td style="padding: 5px;"><math>f(x)</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>f(0)</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>\rightarrow</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>+\infty</math></td> </tr> </table><br>$f(0) = e^{-3} - \frac{1}{4}$ $\approx -0,20.$ | $x$           | $0$       | $+\infty$ | $f'(x)$ | +      |         | $f(x)$  | $f(0)$ | $\rightarrow$ | $+\infty$ |  |  |
| $x$                             | $0$  | $+\infty$     |           |           |         |        |         |         |        |               |           |  |  |
| $f'(x)$                         | +  |               |           |           |         |        |         |         |        |               |           |  |  |
| $f(x)$                          | $f(0)$   | $\rightarrow$ | $+\infty$ |           |         |        |         |         |        |               |           |  |  |
| <b>Partie A</b><br><b>4) b)</b> | <p><math>f</math> s'annule en <math>\alpha</math>.</p> <p><math>f'</math> étant strictement croissante sur <math>[0; +\infty[</math>, <math>f</math> est strictement négative sur <math>[0; \alpha[</math> et strictement positive sur <math>]\alpha; +\infty[</math>.</p>   |               |           |           |         |        |         |         |        |               |           |  |  |
| <b>Partie A</b><br><b>5) a)</b> | <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td style="padding: 5px;"><math>x</math></td> <td style="padding: 5px;">1,32</td> <td style="padding: 5px;">1,325</td> <td style="padding: 5px;">1,33</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;"><math>f(x)</math></td> <td style="padding: 5px;">-0,0016</td> <td style="padding: 5px;">-0,0005</td> <td style="padding: 5px;">0,0006</td> </tr> </table>   | $x$           | 1,32      | 1,325     | 1,33    | $f(x)$ | -0,0016 | -0,0005 | 0,0006 |               |           |  |  |
| $x$                             | 1,32   | 1,325         | 1,33      |           |         |        |         |         |        |               |           |  |  |
| $f(x)$                          | -0,0016  | -0,0005       | 0,0006    |           |         |        |         |         |        |               |           |  |  |
| <b>Partie A</b><br><b>5) b)</b> | <p><math>1,325 &lt; \alpha &lt; 1,33</math> donc <math>\alpha \approx 1,33</math> arrondi au centième.</p>   |               |           |           |         |        |         |         |        |               |           |  |  |
| <b>Partie B</b><br><b>1) a)</b> | $g'(x) = e^{x-3} - \frac{1}{x+4} = f(x).$  |               |           |           |         |        |         |         |        |               |           |  |  |
| <b>Partie B</b><br><b>1) b)</b> | <p>D'après le signe de <math>f</math> donné au A - 4) b), <math>g</math> est décroissante sur <math>[0, \alpha]</math> et croissante sur <math>[\alpha; +\infty[</math>.</p>   |               |           |           |         |        |         |         |        |               |           |  |  |
| <b>Partie B</b><br><b>2)</b>    | $\int_0^3 f(x) dx = [g(x)]_0^3$ $= g(3) - g(0)$ $= 1 - \ln 7 - e^{-3} + \ln 4$ $\approx 0,39 \text{ arrondi au centième.}$   |               |           |           |         |        |         |         |        |               |           |  |  |