

CORRECTION DU BACCALAURÉAT, Session 2007, série ES, obligatoire

Saint Denis, le 12 juillet 2007. *Correction de Mr. MORICEAU*

EXERCICE 1 :

■ Partie A

1. Soit (T) la tangente à la courbe \mathcal{C} au point d'abscisse 0.

$f'(0)$ est le coefficient directeur de la droite (T) .

Prenons deux points de cette droite (T) : A et B de coordonnées respectives $(0; 2)$ et $(-1, 25; 0, 75)$

On peut écrire :

$$f'(0) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Ainsi,

$$f'(0) = \frac{0,75 - 2}{-1,25 - 0} = \frac{-1,25}{-1,25} = 1$$

Une estimation de $f'(0)$ est 1

2.

a)

$$\int_0^2 f(x) dx$$

représente l'aire (en unités d'aires) du domaine Δ où Δ est l'ensemble des points du plan dont les coordonnées $(x; y)$ vérifient :

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$$

(Δ est la partie du plan délimitée par la courbe \mathcal{C} , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 2$)

Cette aire est plus grande que l'aire d'un rectangle d'aire 4 (unité d'aire) et est plus petite que l'aire d'un rectangle d'aire 5 (unité d'aire).

Par conséquent, nous avons l'encadrement suivant :

$$4 < \int_0^2 f(x) dx < 5$$

b)

La valeur moyenne μ de la fonction f sur l'intervalle $[0; 2]$ est par définition :

$$\mu = \frac{1}{2-0} \int_0^2 f(x) dx$$

c'est-à-dire :

$$\mu = \frac{1}{2} \int_0^2 f(x) dx$$

À la question précédente, nous avons obtenu l'encadrement suivant :

$$4 < \int_0^2 f(x) dx < 5$$

En divisant par 2 chaque membre de cette inégalité, nous avons :

$$\underbrace{\frac{4}{2}}_{=2} < \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^2 f(x) dx}_{=\mu} < \underbrace{\frac{5}{2}}_{=2,5}$$

Nous pouvons écrire :

$$2 < \mu < 2,5$$

Une valeur approchée à 0,5 près de la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0; 2]$ est 2,5

■ Partie B

On définit la fonction f par : pour tout $x \in [-5; 2]$ $f(x) = (2-x)e^x$

1)

a)

Notons f' la dérivée de la fonction f . f est dérivable sur $[-5; 2]$ comme produit de fonctions dérivables sur $[-5; 2]$. f est de la forme $u \times v$ où : $u(x) = 2-x$ et $v(x) = e^x$. On a : $u'(x) = -1$ et $v'(x) = e^x$ Pour tout $x \in [-5; 2]$

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ &= -e^x + (2-x)e^x \\ &= (-1 + 2-x)e^x \\ &= (1-x)e^x \end{aligned}$$

$$\text{Pour tout } x \in [-5; 2] \quad f'(x) = (1-x)e^x$$

b)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ (*a fortiori* sur $[-5; 2]$), $e^x > 0$.

Le signe de $f'(x)$ est celui de $1 - x$.

Dressons le tableau de signes de $1 - x$ pour $x \in \mathbb{R}$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$1 - x$	$+$	0	$-$

Mais nous nous intéressons aux x qui appartiennent à l'intervalle $[-5; 2]$

Le signe de $1 - x$ sur $[-5; 2]$ est donné par le tableau de signes suivant :

x	-5	1	2
$1 - x$	$+$	0	$-$

Nous en concluons le signe de $f'(x)$ pour $x \in [-5; 2]$:

$$\begin{cases} f'(x) > 0 & \text{pour } x \in [-5; 1[\\ f'(x) = 0 & \text{pour } x = 1 \\ f'(x) < 0 & \text{pour } x \in]1; 2] \end{cases}$$

En conclusion, f est croissante sur $[-5; 1]$ et décroissante sur $[1; 2]$

Par conséquent,

f admet un **maximum** en $x = 1$. Ce maximum est $f(1) = e$

2) Soit (T) la tangente à la courbe \mathcal{C} au point d'abscisse 0.

(T) a pour équation :

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

Or, $f(0) = 2$ et $f'(0) = 1$

(T) a pour équation :

$$y = 1(x - 0) + 2$$

La tangente (T) a pour équation : $y = x + 2$

3)

a)

On définit la fonction g par : pour tout $x \in [-5; 2]$ $g(x) = (3 - x)e^x$

g est dérivable sur $[-5; 2]$ comme produit de fonctions dérivables sur $[-5; 2]$.

g est de la forme $i \times j$ où : $i(x) = 3 - x$ et $j(x) = e^x$. On a : $i'(x) = -1$ et $j'(x) = e^x$

Pour tout $x \in [-5; 2]$

$$\begin{aligned}g'(x) &= i'(x)j(x) + i(x)j'(x) \\&= -e^x + (3-x)e^x \\&= (-1 + 3 - x)e^x \\&= (2-x)e^x \\&= f(x)\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in [-5; 2] \quad g'(x) = f(x)} \quad \text{et} \quad \boxed{g \text{ est une primitive de } f \text{ sur } [-5; 2]}$$

b)

La valeur moyenne μ de la fonction f sur l'intervalle $[0; 2]$ est par définition :

$$\mu = \frac{1}{2-0} \int_0^2 f(x) dx$$

c'est-à-dire :

$$\mu = \frac{1}{2} \int_0^2 f(x) dx$$

D'après la question précédente, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{1}{2} \int_0^2 f(x) dx \\&= \frac{1}{2} \int_0^2 g'(x) dx \\&= \frac{1}{2} [g(x)]_0^2 \\&= \frac{1}{2} (g(2) - g(0)) \\&= \frac{1}{2} (e^2 - 3)\end{aligned}$$

EXERCICE 2 :

■ Partie A

1. Par simple lecture de l'arbre donné dans l'énoncé : $p_A(T) = 0,4$

$$p_A(T) = 0,4$$

2.

a)

On a : $p(A) + p(B) + p(C) = 1$

$$\begin{aligned} p(A) + p(B) + p(C) &= 1 \\ \text{donc } p(B) &= 1 - p(A) - p(C) \\ &= 1 - 0,2 - 0,7 \\ p(B) &= 0,1 \end{aligned}$$

$$p(B) = 0,1$$

b)

On a : $p_A(\overline{T}) + p_A(T) = 1$

$$\begin{aligned} p_A(\overline{T}) + p_A(T) &= 1 \\ \text{donc } p_A(\overline{T}) &= 1 - p_A(T) \\ &= 1 - 0,4 \\ p_A(\overline{T}) &= 0,6 \end{aligned}$$

$$p_A(\overline{T}) = 0,6$$

c)

Par définition, $p_A(T) = \frac{p(A \cap T)}{p(A)}$

$$p_A(T) = \frac{p(A \cap T)}{p(A)}$$

$$\begin{aligned} \text{donc } p(A \cap T) &= p_A(T) \times p(A) \\ &= 0,4 \times 0,2 \\ p(A \cap T) &= 0,08 \end{aligned}$$

$$p(A \cap T) = 0,08$$

3) On sait que : $p(T) = 0,3$

a)

Par définition, $p_T(A) = \frac{p(A \cap T)}{p(T)}$

$$\begin{aligned}p_T(A) &= \frac{p(A \cap T)}{p(T)} \\ \text{donc } p_T(A) &= \frac{0,08}{0,3} \\ &= \frac{8}{30} \\ p_T(A) &= \frac{4}{15}\end{aligned}$$

$$\boxed{p_T(A) = \frac{4}{15}}$$

b)

Pour calculer $p_B(T)$, nous devons calculer tout d'abord $P(B \cap T)$

On peut écrire :

$$T = (T \cap A) \cup (T \cap B) \cup (T \cap C)$$

A, B, C constituent une partition de l'univers.

$\{T \cap A\}, \{T \cap B\}, \{T \cap C\}$ constituent une partition de T

Nous pouvons écrire :

$$p(T) = P(T \cap A) + p(T \cap B) + p(T \cap C)$$

donc :

$$p(B \cap T) = p(T) - p(T \cap A) - \underbrace{p(T \cap C)}_{=p_C(T) \times p(C)}$$

ainsi,

$$p(B \cap T) = 0,3 - 0,08 - p_C(T) \times p(C)$$

on a :

$$p(B \cap T) = 0,3 - 0,08 - 0,2 \times 0,7$$

donc

$$p(B \cap T) = 0,08$$

Nouvons maintenant calculer $p_B(T)$: par définition,

$$p_B(T) = \frac{p(B \cap T)}{p(B)}$$

Nous pouvons écrire :

$$p_B(T) = \frac{0,08}{0,1} = 0,8$$

$$\boxed{p_B(T) = 0,8}$$

■ Partie B

1)

Introduisons la variable aléatoire X égale au gain possible, c'est-à-dire la somme des points figurant sur le domino tiré.

Les différentes valeurs prises par X sont : $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots, 10, 11, 12\}$

$X = k$	0	1	2	3	4	5	6	$X = k$	7	8	9	10	11	12
$P(X=k)$	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{2}{28}$	$\frac{2}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{4}{28}$	$P(X=k)$	$\frac{3}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{2}{28}$	$\frac{2}{28}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{28}$

2)

Le joueur mise 7 € avant de tirer un domino. Introduisons une nouvelle variable aléatoire T égale au gain algébrique du joueur (gain algébrique : gain - mise).

Les différentes valeurs prises par T sont : $T(\Omega) = \{-7, -6, -5, -4, -3, -2, \dots, 3, 4, 5\}$

$T = k$	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	$T = k$	0	1	2	3	4	5
$P(T=k)$	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{2}{28}$	$\frac{2}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{4}{28}$	$P(T=k)$	$\frac{3}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{2}{28}$	$\frac{2}{28}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{28}$

Calculons l'espérance de T .

$$E(T) = -7 \times \frac{1}{28} - 6 \times \frac{1}{28} - \dots + 4 \times \frac{1}{28} + 5 \times \frac{1}{28} = -\frac{28}{28} = -1$$

Comme $E(T) < 0$, le joueur ne peut pas espérer récupérer ses mises

EXERCICE 3 :

Cet exercice est un QCM.

Numéro de la question	Réponse
Question 1	Réponse c
Question 2	Réponse c
Question 3	Réponse c
Question 4	Réponse b
Question 5	Réponse c

Il n'est pas demandé de justifier mais je justifie un minimum tout de même pour la bonne compréhension des lecteurs

▲ Question 1

Notons t le taux d'évolution du nombre d'habitants de cette ville de 2002 à 2006 est :

$$t = \frac{139860 - 157500}{157500} \times 100 = -11,2$$

Réponse : $-11,2\%$

▲ Question 2

Soit x le prix initial (en €) d'un article

Après une augmentation de 15%, le prix devient : $x + \frac{15}{100}x = 1,15x$

Après une diminution de 15%, le prix devient : $1,15x - \frac{15}{100} \times 1,15x = 1,15x \times 0,85 = 0,9775x$

Au départ, le prix est x , après une augmentation de 15% suivie d'une diminution de 15%, le prix est $0,9775x$

Remarquons que : $0,9775x = (1 - 0,0225)x = (1 - \frac{2,25}{100})x = x - \frac{2,25}{100}x$

Réponse : Effectuer une augmentation de 15% suivie d'une diminution de 15% revient à effectuer une diminution de 2,25%

▲ Question 3

$$\left(1 + \frac{3,2}{100}\right)^{10} = 1,37 = 1 + 0,37 = 1 + \frac{37}{100}$$

Réponse : 37%

▲ Question 4

$$\begin{aligned} u_n &= e^{-n \ln 2} \\ &= \frac{1}{e^{n \ln 2}} \\ &= \frac{1}{(e^{\ln 2})^n} \\ &= \frac{1}{2^n} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

$$u_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} \times u_n$$

Réponse : La suite (u_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $u_0 = 1$

▲ Question 5

Si $x = 7$ alors $\ln v \approx 6,1$, ainsi $v \approx e^{6,1}$

Réponse : 445

EXERCICE 4 :

■ Partie A

1. On définit la fonction f sur $[1; 50]$ par $f(x) = x^2 + 72 \ln(10x + 1)$
 f est définie et dérivable sur $[1; 50]$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x + 72 \times \frac{10}{10x + 1} \\ &= 2x + \frac{720}{10x + 1} \end{aligned}$$

Pour tout $x \in [1; 50]$, $f'(x) = 2x + \frac{720}{10x + 1}$

Pour tout $x \in [1; 50]$, $2x > 0$ et $10x + 1 > 0$

Ainsi, pour tout $x \in [1; 50]$, $f'(x) > 0$

f est croissante sur $[1; 50]$

2.

a)

La fonction h est définie sur $[1; 50]$ par : $h(x) = x^2 + \frac{720x}{10x + 1} - 72 \ln(10x + 1)$

On admet que, pour tout $x \in [1; 50]$, $h'(x) = \frac{2x(10x - 59)(10x + 61)}{(10x + 1)^2}$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x(10x - 59)(10x + 61)}{(10x + 1)^2}$$

$$\Leftrightarrow 2x = 0 \quad \text{ou} \quad 10x - 59 = 0 \quad \text{ou} \quad 10x + 61 = 0 \quad \text{avec} \quad (10x + 1)^2 \neq 0 \text{ pour } x \in [1; 50]$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{59}{10} \quad \text{ou} \quad x = \frac{-61}{10}$$

0 n'appartient pas à l'intervalle $[1; 50]$, $\frac{-61}{10}$ n'appartient pas à l'intervalle $[1; 50]$.

L'unique solution de l'équation $h'(x) = 0$ sur l'intervalle $[1; 50]$ est $\frac{59}{10} = 5,9$

Pour $x \in [1; 50]$, $2x > 0$, $10x + 61 > 0$ et $(10x + 1)^2$.

Le signe de $h'(x)$ est celui de $10x - 59$.

x	1	5,9	50
$10x - 59$		-	+

Nous en concluons le signe de $h'(x)$ pour $x \in [1; 50]$:

$$\begin{cases} h'(x) < 0 & \text{pour } x \in [1; 5,9[\\ h'(x) = 0 & \text{pour } x = 5,9 \\ h'(x) > 0 & \text{pour } x \in]5,9; 50] \end{cases}$$

b) Dressons le tableau de variation de la fonction h .

D'après la question précédente, nous pouvons conclure que h est décroissante sur $[1; 5, 9]$ et croissante sur $[5, 9; 50]$.

x	1	5, 9	50
$h'(x)$		- 0 +	
$h(x)$	$h(1)$	$h(5, 9)$	$h(50)$

avec $h(1) = \frac{731}{11} - 72 \ln 11$, $h(5, 9) = 105, 61 - 72 \ln 60$ et $h(50) = \frac{1288500}{501} - 72 \ln 501$

On admet que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α .

On a : $h(17, 31) \approx -0, 27 < 0$ et $h(17, 32) \approx 0, 03 > 0$

ainsi, $h(17, 31) \times h(17, 32) < 0$

On a l'encadrement suivant : $17, 31 < \alpha < 17, 32$

De même, $h(17, 318) \approx -0, 026 < 0$ et $h(17, 319) \approx 0, 003 > 0$

ainsi, $h(17, 318) \times h(17, 319) < 0$

On a l'encadrement suivant : $17, 318 < \alpha < 17, 319$

Une valeur approchée de α à 10^{-2} près est 17, 32

d)

Si $x \in [1; 5, 9]$: $1 \leq x \leq 5, 9$

Comme h est décroissante sur $[1; 5, 9]$, on a l'encadrement suivant : $h(5, 9) \leq h(x) \leq h(1)$

De plus, $h(5, 9) < 0$ et $h(1) < 0$

On peut écrire : pour tout $x \in [1; 5, 9]$, $h(x) < 0$

Si $x \in [5, 9; \alpha]$: $5, 9 \leq x \leq \alpha$

Comme h est croissante sur $[5, 9; \alpha]$, on a l'encadrement suivant : $h(5, 9) \leq h(x) \leq h(\alpha)$

De plus, $h(5, 9) < 0$ et $h(\alpha) = 0$

On peut écrire : pour tout $x \in [5, 9; \alpha]$, $h(x) \leq 0$

Pour tout $x \in [1; \alpha]$, $h(x) \leq 0$

Si $x \in [\alpha; 50]$: $\alpha \leq x \leq 50$

Comme h est croissante sur $[\alpha; 50]$, on a l'encadrement suivant : $h(\alpha) \leq h(x) \leq h(50)$

De plus, $h(50) > 0$ et $h(\alpha) = 0$

On peut écrire : pour tout $x \in [\alpha; 50]$, $h(x) \geq 0$

Pour tout $x \in [\alpha; 50]$, $h(x) \geq 0$

3.

a) On considère la fonction g définie sur $[1; 50]$ par : $g(x) = \frac{f(x)}{x}$

La fonction g est dérivable sur $[1; 50]$.

$$\begin{aligned}g'(x) &= \frac{x \times f'(x) - 1 \times f(x)}{x^2} \\&= \frac{2x^2 + \frac{720x}{10x+1} - x^2 - 72 \ln(10x+1)}{x^2} \\&= \frac{x^2 + \frac{720x}{10x+1} - 72 \ln(10x+1)}{x^2} \\&= \frac{h(x)}{x^2}\end{aligned}$$

Pour tout $x \in [1; 50]$, $g'(x) = \frac{h(x)}{x^2}$
--

b)

Pour tout $x \in [1; 50]$, $x^2 > 0$, le signe de $g'(x)$ est celui de $h(x)$.

Nous avons vu à la question 2. d) que :

Pour tout $x \in [1; \alpha]$, $h(x) \leq 0$ et pour tout $x \in [\alpha; 50]$, $h(x) \geq 0$

Ainsi, pour tout $x \in [1; \alpha]$, $g'(x) \leq 0$ et pour tout $x \in [\alpha; 50]$, $g'(x) \geq 0$

g est donc décroissante sur $[1; \alpha]$ et croissante sur $[\alpha; 50]$: g admet un minimum en $x = \alpha$.

g admet un minimum en $x = \alpha$

c)

$$g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$$

On sait que $h(\alpha) = 0$ donc $\alpha^2 g'(\alpha) = 0$

Comme α est non nul, $g'(\alpha) = 0$

$$\begin{aligned}
 g'(\alpha) &= \frac{\alpha f'(\alpha) - f(\alpha)}{\alpha^2} \\
 \frac{\alpha f'(\alpha) - f(\alpha)}{\alpha^2} &= 0 \quad \text{car } g'(\alpha) = 0 \\
 \alpha f'(\alpha) - f(\alpha) &= 0 \quad \text{car } \alpha \text{ non nul} \\
 f'(\alpha) &= \frac{f(\alpha)}{\alpha} \\
 f'(\alpha) &= g(\alpha)
 \end{aligned}$$

$$g(\alpha) = f'(\alpha)$$

■ Partie B

1.

Notons p le prix de vente d'une tonne (exprimé en milliers d'euros).

Notons B_M le bénéfice moyen (par tonne produite) pour x tonnes.

Nous voulons montrer que si $p < 38$ alors $B_M < 0$

On a : $B_M = p - C_M$. Comme $C_M = g(x)$, ainsi $B_M = p - g(x)$

Supposons $p < 38$.

Si $p < 38$ alors $p - g(x) < 38 - g(x)$ et donc $B_M < 38 - g(x)$

Comme g admet un minimum en $x = \alpha$ alors $g(x) > g(\alpha)$

et donc $g(x) > 38$ donc $B_M < 0$

Quelque soit la quantité produite, l'entreprise ne peut espérer faire un bénéfice si elle vend sa production moins de 38000 € la tonne.

2. Si le prix de vente (d'une tonne) est de 45000 € : $p = 45$

Nous voulons une estimation des productions qui pourront permettre de réaliser un bénéfice.

Nous pouvons nous aider des graphiques donnés dans l'énoncé.

Traçons la droite (D) d'équation $y = 45$

Les points qui nous intéressent sont les points de la courbe C_g (courbe représentative de la fonction g) situés en-dessous la droite (D) . Nous regardons les abscisses de ces points.

Pour réaliser un bénéfice, l'entreprise doit produire entre 8 et 32 tonnes