CORRECTION DU BACCALAURÉAT, Session 2007, série ES, spécialité Maths

Saint Denis, le 05 juillet 2007. ***Correction de Mr. MORICEAU***

EXERCICE 1 :

■ Partie A

1. Soit (T) la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
$f'(0)$ est le coefficient directeur de la droite (T).
Prenons deux points de cette droite (T) : A et B de coordonnées respectives $(0;2)$ et $(-1,25;0,75)$
On peut écrire :

$$f'(0) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Ainsi,

$$f'(0) = \frac{0,75-2}{-1,25-0} = \frac{-1,25}{-1,25} = 1$$

$$\boxed{\text{Une estimation de } f'(0) \text{ est } 1}$$

2.
a)

$$\int_0^2 f(x)\,dx$$

représente l'aire (en unités d'aires) du domaine Δ où Δ est l'ensemble des points du plan dont les coordonnées $(x;y)$ vérifient :

$$\begin{cases} 0 \leq & x \leq & 2 \\ 0 \leq & y \leq & f(x) \end{cases}$$

(Δ est la partie du plan délimitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 2$)

Cette aire est plus grande que l'aire d'un rectangle d'aire 4 (unité d'aire) et est plus petite que l'aire d'un rectangle d'aire 5 (unité d'aire).

Par conséquent, nous avons l'encadrement suivant :

$$\boxed{4 < \int_0^2 f(x)\,dx < 5}$$

b)
La valeur moyenne μ de la fonction f sur l'intervalle $[0; 2]$ est par définition :

$$\mu = \frac{1}{2-0}\int_0^2 f(x)\,dx$$

c'est-à -dire :

$$\mu = \frac{1}{2}\int_0^2 f(x)\,dx$$

Á la question précédente, nous avons obtenu l'encadrement suivant :

$$4 < \int_0^2 f(x)\,dx < 5$$

En divisant par 2 chaque membre de cette inégalité, nous avons :

$$\underbrace{\frac{4}{2}}_{=2} < \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^2 f(x)\,dx}_{=\mu} < \underbrace{\frac{5}{2}}_{=2,5}$$

Nous pouvons écrire :

$$2 < \mu < 2,5$$

$$\boxed{\text{Une valeur approchée à } 0,5 \text{ près de la valeur moyenne de la fonction } f \text{ sur l'intervalle } [0;2] \text{ est } 2,5}$$

■ Partie *B*

On définit la fonction f par : pour tout $x \in [-5; 2]$ $\quad f(x) = (2-x)e^x$

1)

a)

Notons f' la dérivée de la fonction f.

f est dérivable sur $[-5; 2]$ comme produit de fonctions dérivables sur $[-5; 2]$.
f est de la forme $u \times v$ où : $u(x) = 2 - x$ et $v(x) = e^x$. On a : $u'(x) = -1$ et $v'(x) = e^x$

Pour tout $x \in [-5; 2]$

$$\begin{array}{rcl} f'(x) & = & u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ & = & -e^x + (2-x)e^x \\ & = & (-1+2-x)e^x \\ & = & (1-x)e^x \end{array}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in [-5;2] \quad f'(x) = (1-x)e^x}$$

b)
Pour tout $x \in \mathbb{R}$ (*a fortiori* sur $[-5;2]$), $e^x > 0$.
Le signe de $f'(x)$ est celui de $1-x$.

Dressons le tableau de signes de $1-x$ pour $x \in \mathbb{R}$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$1-x$		$+$	0	$-$	

Mais nous nous intéressons aux x qui appartiennent à l'intervalle $[-5;2]$
Le signe de $1-x$ sur $[-5;2]$ est donné par le tableau de signes suivant :

x	-5		1		2
$1-x$		$+$	0	$-$	

Nous en concluons le signe de $f'(x)$ pour $x \in [-5;2]$:

$$\begin{cases} f'(x) > 0 & \text{pour } x \in [-5;1[\\ f'(x) = 0 & \text{pour } x = 1 \\ f'(x) < 0 & \text{pour } x \in]1;2] \end{cases}$$

En conclusion, f est croissante sur $[-5;1]$ et décroissante sur $[1;2]$
Par conséquent,

$$\boxed{\text{f admet un } \textbf{maximum} \text{ en } x=1. \text{ Ce maximum est } f(1)=e}$$

2) Soit (T) la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
(T) a pour équation :

$$y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

Or, $f(0) = 2$ et $f'(0) = 1$
(T) a pour équation :

$$y = 1(x-0) + 2$$

$$\boxed{\text{La tangente } (T) \text{ a pour équation : } y = x+2}$$

3)
a)
On définit la fonction g par : pour tout $x \in [-5;2]$ $\quad g(x) = (3-x)e^x$
g est dérivable sur $[-5;2]$ comme produit de fonctions dérivables sur $[-5;2]$.
g est de la forme $i \times j$ où : $i(x) = 3-x$ et $j(x) = e^x$. On a : $i'(x) = -1$ et $j'(x) = e^x$

Pour tout $x \in [-5;2]$

$$\begin{aligned} g'(x) &= i'(x)j(x)+i(x)j'(x) \\ &= -e^x+(3-x)e^x \\ &= (-1+3-x)e^x \\ &= (2-x)e^x \\ &= f(x) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } x\in[-5;2] \quad g'(x)=f(x)} \quad \text{et} \quad \boxed{g \text{ est une primitive de } f \text{ sur } [-5;2]}$$

b)

La valeur moyenne μ de la fonction f sur l'intervalle $[0;2]$ est par définition :

$$\mu=\frac{1}{2-0}\int_0^2 f(x)\,dx$$

c'est-à -dire :

$$\mu=\frac{1}{2}\int_0^2 f(x)\,dx$$

D'après la question précédente, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{2}\int_0^2 f(x)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^2 g'(x)\,dx \\ &= \frac{1}{2}[g(x)]_0^2 \\ &= \frac{1}{2}(g(2)-g(0)) \\ &= \frac{1}{2}(e^2-3) \end{aligned}$$

EXERCICE 2 :

■ Partie A

1. Par simple lecture de l'arbre donné dans l'énoncé : $p_A(T) = 0,4$

$$\boxed{p_A(T) = 0,4}$$

2.
a)
On a : $p(A) + p(B) + p(C) = 1$

$$\begin{array}{rcl} p(A) + p(B) + p(C) & = & 1 \\ \text{donc} \quad p(B) & = & 1 - p(A) - p(C) \\ & = & 1 - 0,2 - 0,7 \\ p(B) & = & 0,1 \end{array}$$

$$\boxed{p(B) = 0,1}$$

b)
On a : $p_A(\overline{T}) + p_A(T) = 1$

$$\begin{array}{rcl} p_A(\overline{T}) + p_A(T) & = & 1 \\ \text{donc} \quad p_A(\overline{T}) & = & 1 - p_A(T) \\ & = & 1 - 0,4 \\ p_A(\overline{T}) & = & 0,6 \end{array}$$

$$\boxed{p_A(\overline{T}) = 0,6}$$

c)
Par définition, $p_A(T) = \dfrac{p(A \cap T)}{p(A)}$

$$\begin{array}{rcl} p_A(T) & = & \dfrac{p(A \cap T)}{p(A)} \\ \\ \text{donc} \quad p(A \cap T) & = & p_A(T) \times p(A) \\ & = & 0,4 \times 0,2 \\ p(A \cap T) & = & 0,08 \end{array}$$

$$\boxed{p(A \cap T) = 0,08}$$

3) On sait que : $p(T) = 0,3$
a)
Par définition, $p_T(A) = \dfrac{p(A \cap T)}{p(T)}$

$$\begin{aligned} p_T(A) &= \frac{p(A\cap T)}{p(T)} \\ \text{donc} \quad p_T(A) &= \frac{0,08}{0,3} \\ &= \frac{8}{30} \\ p_T(A) &= \frac{4}{15} \end{aligned}$$

$$\boxed{p_T(A) = \frac{4}{15}}$$

b)
Pour calculer $p_B(T)$, nous devons calculer tout d'abord $P(B\cap T)$
On peut écrire :

$$T = (T\cap A)\cup(T\cap B)\cup(T\cap C)$$

A, B, C constituent une partition de l'univers.
$\{T\cap A\}$, $\{T\cap B\}$, $\{T\cap C\}$ constituent une partition de T
Nous pouvons écrire :

$$p(T) = P(T\cap A) + p(T\cap B) + p(T\cap C)$$

donc :

$$p(B\cap T) = p(T) - p(T\cap A) - \underbrace{p(T\cap C)}_{=p_C(T)\times p(C)}$$

ainsi,

$$p(B\cap T) = 0,3 - 0,08 - p_C(T)\times p(C)$$

on a :

$$p(B\cap T) = 0,3 - 0,08 - 0,2\times 0,7$$

donc

$$p(B\cap T) = 0,08$$

Nouvons maintenant calculer $p_B(T)$: par définition,

$$p_B(T) = \frac{p(B\cap T)}{p(B)}$$

Nous pouvons écrire :

$$p_B(T) = \frac{0,08}{0,1} = 0,8$$

$$\boxed{p_B(T) = 0,8}$$

■ Partie B

1)

Introduisons la variable aléatoire X égale au gain possible, c'est-à-dire la somme des points figurant sur le domino tiré.

Les différentes valeurs prises par X sont : $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \cdots, 10, 11, 12\}$

X = k	0	1	2	3	4	5	6
P(X=k)	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{2}{28}$	$\frac{2}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{4}{28}$

X = k	7	8	9	10	11	12
P(X=k)	$\frac{3}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{2}{28}$	$\frac{2}{28}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{28}$

2)

Le joueur mise 7 € avant de tirer un domino. Introduisons une nouvelle variable aléatoire T égale au gain algébrique du joueur (gain algébrique : gain - mise).

Les différentes valeurs prises par T sont : $T(\Omega) = \{-7, -6, -5, -4, -3, -2, \cdots, 3, 4, 5\}$

T = k	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1
P(T=k)	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{2}{28}$	$\frac{2}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{4}{28}$

T = k	0	1	2	3	4	5
P(T=k)	$\frac{3}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{2}{28}$	$\frac{2}{28}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{28}$

Calculons l'espérance de T.

$$E(T) = -7 \times \frac{1}{28} - 6 \times \frac{1}{28} - \cdots + 4 \times \frac{1}{28} + 5 \times \frac{1}{28} = -\frac{28}{28} = -1$$

$$\boxed{\text{Comme } E(T) < 0\text{, le joueur ne peut pas espérer récupérer ses mises}}$$

EXERCICE 3 :

Cet exercice est un QCM.

Numéro de la question	Réponse
Question 1	Réponse c
Question 2	Réponse c
Question 3	Réponse b
Question 4	Réponse b
Question 5	Réponse b

Il n'est pas demandé de justifier mais je justifie un minimum tout de même pour la bonne compréhension des lecteurs

▲ Question 1

Pour avoir la monotonie de la suite (u_n), nous devons déterminer le signe de $u_{n+1} - u_n$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 1 - \frac{6}{n-9,5} - 1 + \frac{6}{n-10,5} \\ &= -\frac{6}{n-9,5} + \frac{6}{n-10,5} \\ &= \frac{6}{(n-9,5)(n-10,5)} \end{aligned}$$

n	0		$9,5$		$10,5$		$+\infty$
$(n-9,5)(n-10,5)$		$+$		$-$		$+$	

Rappel : une suite est monotone si cette suite est croissante ou décroissante.
Ce qui n'est pas le cas ici.

On aurait pu également remarquer que $u_n = f(n)$ *et étudier les variations de* f *sur* $[0;+\infty[$

▲ Question 2

Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = -0,1u_n$
ainsi, $u_{n+1} = 0,9u_n$, ce qui permet de conclure que la suite (u_n) est géométrique de raison $q = 0,9$ et de premier terme $u_0 = 2$

▲ Question 3

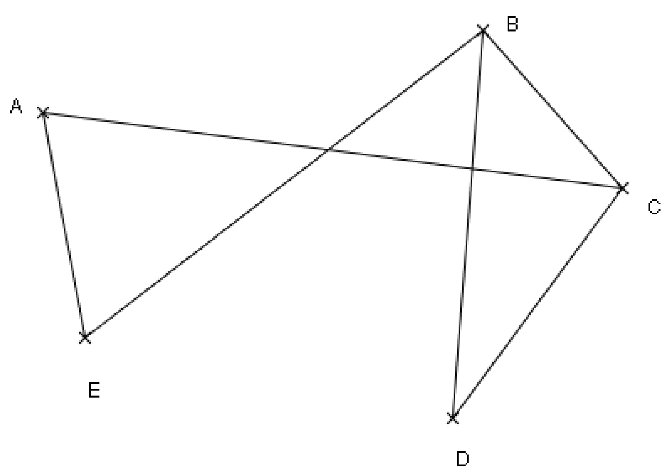
les points de coordonnées $(1;1;0)$ et $(2;1;-1)$ appartiennent à la droite (D) et au plan (P).
Deux points de la droite (D) appartiennent au plan (P), la droite (D) est incluse dans le plan (P).

▲ Question 4

Considérons M la matrice d'un graphe non orienté G, de sommets A, B, C, D et E.

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nous pouvons obtenir le graphe associé :



Ce graphe ne contient pas 12 arêtes.

Ce graphe n'est pas complet car A et B ne sont pas adjacents.

Il y a deux sommets (B et C) de degré impair donc ce graphe admet une chaîne eulérienne.

▲ Question 5

Notons u_n le nombre d'exemplaires vendus au cours de la n-ième semaine :
$u_1 = 10000$
$u_2 = u_1 + \frac{2}{100}u_1 = 1,02u_1$
$u_3 = u_2 + \frac{2}{100}u_2 = 1,02u_2 = (1,02)^2u_1$
et ainsi de suite, nous avons :
$u_n = u_{n-1} + \frac{2}{100}u_{n-1} = (1,02)^{n-1}u_1 = 10000 \times (1,02)^{n-1}$
La suite (u_n) est géométrique de raison $q = 1,02$ et de premier terme $u_1 = 10000$ (car $u_{n+1} = 1,02u_n$)
Nous avons : la somme des 45 premiers termes est :

$$\begin{aligned} u_1 + \cdots + u_{45} &= \sum_{k=1}^{45} 10000(1,02)^{k-1} \\ &= 10000 \sum_{k=1}^{45}(1,02)^{k-1} \\ &= 10000 \times \frac{1-(1,02)^{45}}{1-1,02} \\ &= 718927 \end{aligned}$$

Le nombre d'exemplaires vendus au cours des 45 semaines écoulées depuis sa parution est : 718927.

EXERCICE 4 :

■ Partie A

1. On définit la fonction f sur $[1;50]$ par $f(x) = x^2 + 72\ln(10x+1)$
f est définie et dérivable sur $[1;50]$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x + 72 \times \frac{10}{10x+1} \\ &= 2x + \frac{720}{10x+1} \end{aligned}$$

Pour tout $x \in [1;50]$, $f'(x) = 2x + \frac{720}{10x+1}$
Pour tout $x \in [1;50]$, $2x > 0$ et $10x+1 > 0$
Ainsi, pour tout $x \in [1;50]$, $f'(x) > 0$

$$\boxed{f \text{ est croissante sur } [1;50]}$$

2.
a)
La fonction h est définie sur $[1;50]$ par : $h(x) = x^2 + \dfrac{720x}{10x+1} - 72\ln(10x+1)$

On admet que, pour tout $x \in [1;50]$, $h'(x) = \dfrac{2x(10x-59)(10x+61)}{(10x+1)^2}$

$$h'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x(10x-59)(10x+61)}{(10x+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x = 0 \quad \text{ou} \quad 10x - 59 = 0 \quad \text{ou} \quad 10x + 61 = 0 \qquad \text{avec} \quad (10x+1)^2 \neq 0 \,\text{pour}\, \text{x} \in [1;50]$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{59}{10} \quad \text{ou} \quad x = \frac{-61}{10}$$

0 n'appartient pas à l'intervalle $[1;50]$, $\dfrac{-61}{10}$ n'appartient pas à l'intervalle $[1;50]$.

$$\boxed{\text{L'unique solution de l'équation } h'(x) = 0 \text{ sur l'intervalle } [1;50] \text{ est } \frac{59}{10} = 5,9}$$

Pour $x \in [1;50]$, $2x > 0$, $10x + 61 > 0$ et $(10x+1)^2$.
Le signe de $h'(x)$ est celui de $10x - 59$.

x	1		$5,9$		50
$10x-59$		$-$	0	$+$	

Nous en concluons le signe de $h'(x)$ pour $x \in [1;50]$:

$$\begin{cases} h'(x) < 0 & \text{pour } x \in [1;5,9[\\ h'(x) = 0 & \text{pour } x = 5,9 \\ h'(x) > 0 & \text{pour } x \in]5,9;50] \end{cases}$$

b) Dressons le tableau de variation de la fonction h.
D'après la question précédente, nous pouvons conclure que h est décroissante sur $[1;5,9]$ et croissante sur $[5,9;50]$.

x	1		$5,9$		50
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$h(1)$	$\searrow$	$h(5,9)$	$\nearrow$	$h(50)$

avec $h(1) = \dfrac{731}{11} - 72\ln 11$, $h(5,9) = 105,61 - 72\ln 60$ et $h(50) = \dfrac{1288500}{501} - 72\ln 501$

On admet que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α.

On a : $h(17,31) \approx -0,27 < 0$ et $h(17,32) \approx 0,03 > 0$
ainsi, $h(17,31) \times h(17,32) < 0$
On a l'encadrement suivant : $17,31 < \alpha < 17,32$

De même, $h(17,318) \approx -0,026 < 0$ et $h(17,319) \approx 0,003 > 0$
ainsi, $h(17,318) \times h(17,319) < 0$
On a l'encadrement suivant : $17,318 < \alpha < 17,319$

$$\boxed{\text{Une valeur approchée de } \alpha \text{ à } 10^{-2} \text{ près est } 17,32}$$

d)
Si $x \in [1;5,9]$: $1 \leq x \leq 5,9$
Comme h est décroissante sur $[1;5,9]$, on a l'encadrement suivant : $h(5,9) \leq h(x) \leq h(1)$
De plus, $h(5,9) < 0$ et $h(1) < 0$
On peut écrire : pour tout $x \in [1;5,9]$, $h(x) < 0$

Si $x \in [5,9;\alpha]$: $5,9 \leq x \leq \alpha$
Comme h est croissante sur $[5,9;\alpha]$, on a l'encadrement suivant : $h(5,9) \leq h(x) \leq h(\alpha)$
De plus, $h(5,9) < 0$ et $h(\alpha) = 0$
On peut écrire : pour tout $x \in [5,9;\alpha]$, $h(x) \leq 0$

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in [1;\alpha],\ h(x) \leq 0}$$

Si $x \in [\alpha;50]$: $\alpha \leq x \leq 50$
Comme h est croissante sur $[\alpha;50]$, on a l'encadrement suivant : $h(\alpha) \leq h(x) \leq h(50)$
De plus, $h(50) > 0$ et $h(\alpha) = 0$
On peut écrire : pour tout $x \in [\alpha;50]$, $h(x) \geq 0$

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in [\alpha;50],\ h(x) \geq 0}$$

3.
a) On considère la fonction g définie sur $[1;50]$ par : $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$
La fonction g est dérivable sur $[1;50]$.

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{x \times f'(x) - 1 \times f(x)}{x^2} \\ &= \frac{2x^2 + \dfrac{720x}{10x+1} - x^2 - 72\ln(10x+1)}{x^2} \\ &= \frac{x^2 + \dfrac{720x}{10x+1} - 72\ln(10x+1)}{x^2} \\ &= \frac{h(x)}{x^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in [1;50],\ g'(x) = \frac{h(x)}{x^2}}$$

b)
Pour tout $x \in [1;50]$, $x^2 > 0$, le signe de $g'(x)$ est celui de $h(x)$.
Nous avons vu à la question 2. d) que :
Pour tout $x \in [1;\alpha]$, $h(x) \leq 0$ et pour tout $x \in [\alpha;50]$, $h(x) \geq 0$
Ainsi, pour tout $x \in [1;\alpha]$, $g'(x) \leq 0$ et pour tout $x \in [\alpha;50]$, $g'(x) \geq 0$
g est donc décroissante sur $[1;\alpha]$ et croissante sur $[\alpha;50]$: g admet un minimum en $x = \alpha$.

$$\boxed{g \text{ admet un minimum en } x = \alpha}$$

c)
$g'(x) = \dfrac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$
On sait que $h(\alpha) = 0$ donc $\alpha^2 g'(\alpha) = 0$
Comme α est non nul, $g'(\alpha) = 0$

$$\begin{aligned}
g'(\alpha) &= \frac{\alpha f'(\alpha) - f(\alpha)}{\alpha^2} \\
\frac{\alpha f'(\alpha) - f(\alpha)}{\alpha^2} &= 0 \qquad \text{car } g'(\alpha) = 0 \\
\alpha f'(\alpha) - f(\alpha) &= 0 \qquad \text{car } \alpha \text{ non nul} \\
f'(\alpha) &= \frac{f(\alpha)}{\alpha} \\
f'(\alpha) &= g(\alpha)
\end{aligned}$$

$$\boxed{g(\alpha) = f'(\alpha)}$$

■ <u>Partie *B*</u>

1.
Notons p le prix de vente d'une tonne (exprimé en milliers d'euros).
Notons B_M le bénéfice moyen (par tonne produite) pour x tonnes.
Nous voulons montrer que si $p < 38$ alors $B_M < 0$
On a : $B_M = p - C_M$. Comme $C_M = g(x)$, ainsi $B_M = p - g(x)$
Supposons $p < 38$.
Si $p < 38$ alors $p - g(x) < 38 - g(x)$ et donc $B_M < 38 - g(x)$
Comme g admet un minimum en $x = \alpha$ alors $g(x) > g(\alpha)$
et donc $g(x) > 38$ donc $B_M < 0$

$\boxed{\text{Quelque soit la quantité produite, l'entreprise ne peut espérer faire un bénéfice si elle vend sa production moins de 38000 € la tonne.}}$

2. Si le prix de vente (d'une tonne) est de 45000 € : $p = 45$
Nous voulons une estimation des productions qui pourront permettre de réaliser un bénéfice.
Nous pouvons nous aider des graphiques donnés dans l'énoncé.
Traçons la droite (D) déquation $y = 45$
Les points qui nous intéressent sont les points de la courbe C_g (courbe représentative de la fonction g) situés en-dessous la droite (D). Nous regardons les abscisses de ces points.

$\boxed{\text{Pour réaliser un bénéfice, l'entreprise doit produire entre 8 et 32 tonnes}}$