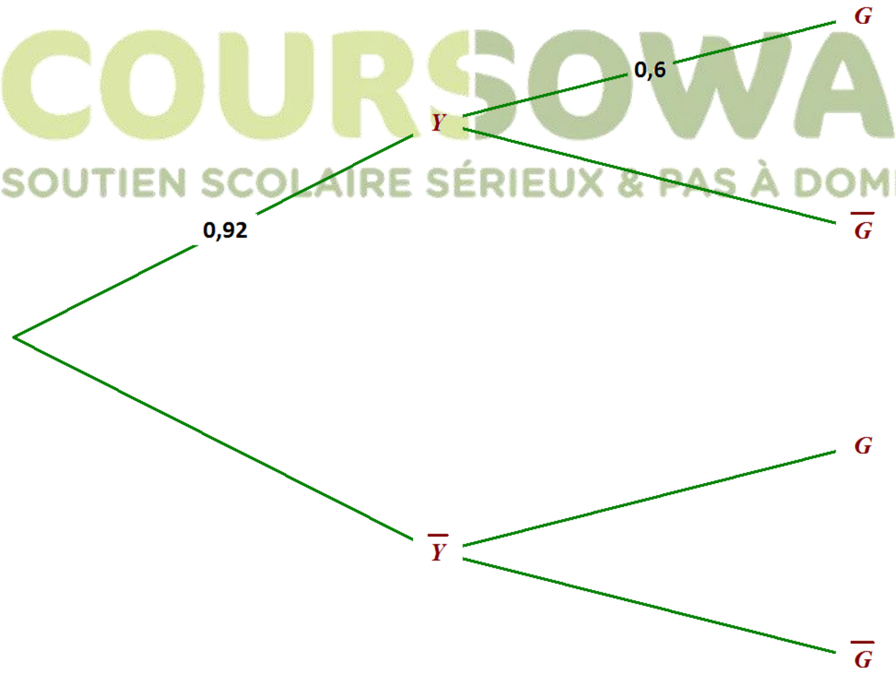
Exercice 1

1. $f(3e) = 6^e - 3e\ln(3e) = 3e(2 - \ln(3e)) = 3e(2 - (\ln 3 + \ln e))$
   $= 3e(2 - \ln 3 - 1) = 3e(1 - \ln 3)$ **réponse b**
2. $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - x\ln x = 0 \Leftrightarrow x(2 - \ln x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $\ln x = 2 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = e^2$
   réponse a
3. $f(x) = x(2 - \ln x)$ or $\lim\limits_{x \to +\infty} (2 - \ln x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$
   réponse c
4. Considérons la fonction F définie par $F(x) = \frac{5}{4}x^2 - \frac{1}{2}x^2 \ln x$
   Alors $F'(x) = \frac{5}{2}x - \frac{1}{2}(2x\ln x + x) = 2x - x\ln x = f(x)$ **réponse b**

Exercice 2 (Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

1. L'évènement $\overline{Y} \cap \overline{G}$ correspond aux touristes ne visitant aucun des deux parcs en se rendant au Wyoming. Donc $p(\overline{Y} \cap \overline{G}) = 0,06$
2.



$p(\overline{Y} \cap \overline{G}) = 0,06$

3. $p_{\overline{Y}}(\overline{G}) = \frac{p(\overline{Y} \cap \overline{G})}{p(\overline{Y})} = \frac{0,06}{0,08} = 0,75$. 75% des touristes qui ne visitent pas le parc de Yellowstone ne visitent pas non plus celui de Grand Teton.
4. $p(G) = p(G \cap Y) + p(G \cap \overline{Y}) = 0,92 \times 0,6 + 0,08 \times (1 - 0,75) = 0,572$

5. $p_G(Y) = \dfrac{p(Y \cap G)}{p(G)} = \dfrac{0,92 \times 0,6}{0,572} = 0,965$ arrondi à 10^{-3} près.

6. a.

Somme en dollars	0	**7**	**10**	17
Probabilité	**0,06**	**0,08 × 0,25 = 0,02**	**0,92 × 0,4 = 0,368**	**0,92×0,6 = 0,552**

b. $E = 0 \times 0,06 + 7 \times 0,02 + 10 \times 0,368 + 17 \times 0,552 = 13,204$

Exercice 2 (Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité)

Partie A

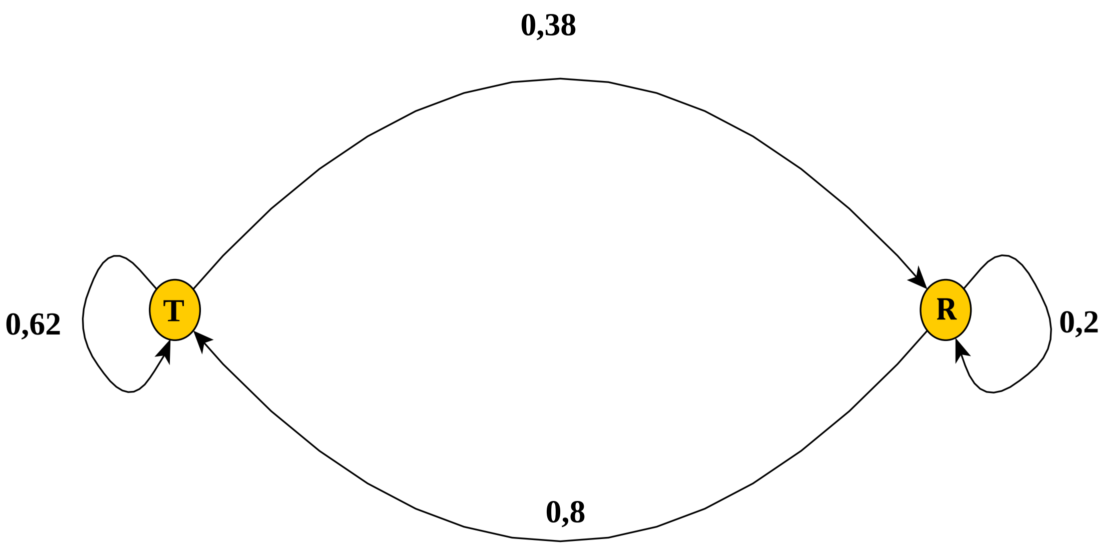
Pour déterminer le chemin le plus court pour relier la ville A à la ville G, on utilise l'algorithme de Dijkstra :

A	B	C	D	E	F	H	G
0	60(A)	70(A)	∞	20(A)	45(A)	∞	∞
	40(E)	70(A)	80(E)		60(E)	70(E)	∞
	40(E)	50(B)	80(E)		45(A)	70(E)	
		50(B)	80(E)		45(A)	80(F)	
		50(B)	65(C)			80(F)	
			65(C)			80(F)	85(D)
						80(F)	100(H)
							85(D)

Le chemin le plus rapide est AEBCDG. Il faut 85 minutes pour le faire.

Partie B

1.



2. La matrice de transition est donc : $M = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0,38 & 0,62 \end{bmatrix}$

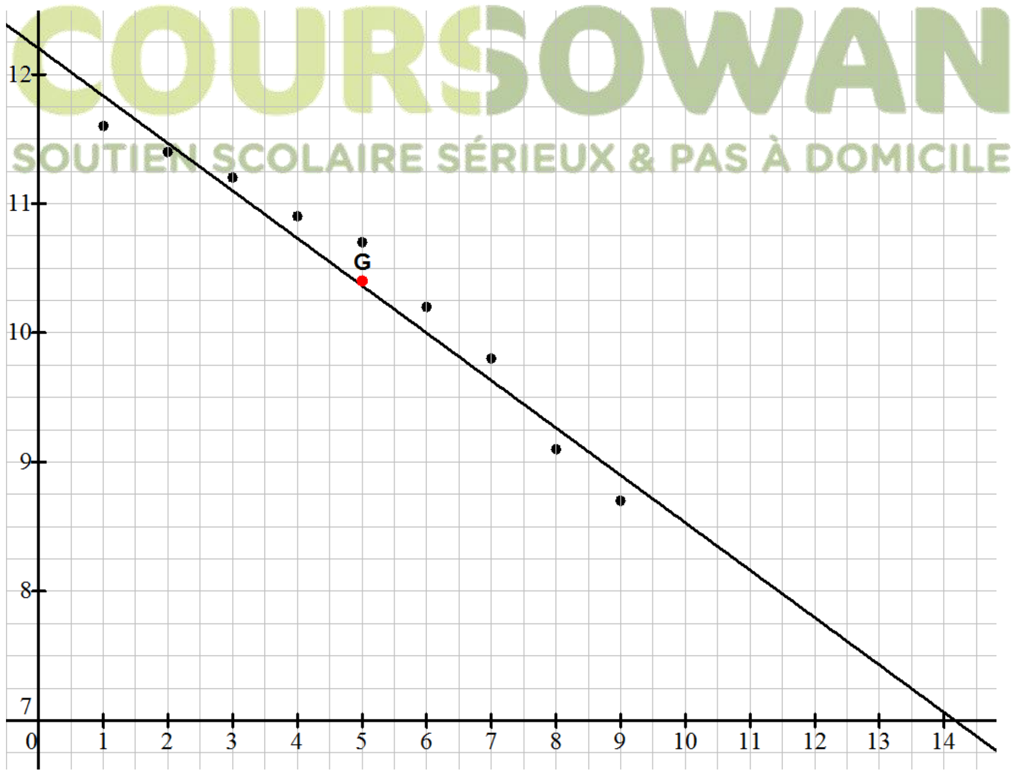
3. On a donc $P_2 = P_0 M^2 = (0,3116 \;\; 0,6884)$
La probabilité que Jonathan ait abandonné lors du semi-marathon couru en mars 2012 est donc de 0,3116.

4. **a.** Aucune des valeurs de la matrice n'est nulle donc l'état stable existe bien.
L'état stable est obtenu grâce à :
$x + y = 1$ et $(x\ y) = (x\ y)M$
on veut donc résoudre le système suivant :
$$\begin{cases} x+y=1 \\ x = 0,2x + 0,38y \\ y = 0,8x + 0,62x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ 0,8x = 0,38y \\ 0,38y = 0,8x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ x = 0,475y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1,475\,y = 1 \\ x = 0,475y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0,678 \\ x = 0,322 \end{cases}$$
L'état stable est donc (0,322 0,678).
b. Cela signifie que, sur le long terme, la probabilité que Jonathan abandonne lors d'un semi-marathon est de 0,322 et celle qui le termine est de 0,678.

Exercice 3

Partie A

1.



2. $x_G = \dfrac{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9}{9} = 5$

$y_G = \dfrac{11,6 + 11,4 + 11,2 + 10,9 + 10,7 + 10,2 + 9,8 + 9,1 + 8,7}{9} = 10,4$

Donc G(5 ;10,4)

3. **a.** L'équation de la droite est $y = -0,37x + 12,23$

4. En 2012, on devrait livrer et vendre $-0,37 \times 12 + 12,23 = 7,89$ millions de tonnes de Super Sans Plomb.

Partie B

1. $z_3 = e^{30,1/10} = 20,29$ et $z_{10} = e^{33,4/10} = 28,22$

2. $z = e^{y/10}$ donc $\ln z = \dfrac{y}{10}$ soit $y = 10 \ln z$ et par conséquent $y = 10 \ln(1,25x + 16,56)$.

3. On cherche à résoudre l'inéquation $10 \ln(1,25x + 16,56) \geq 35$

C'est-à-dire $\ln(1,25x + 16,56) \geq 3,5$ soit $1,25x + 16,56 \geq e^{3,5}$

Donc $x \geq \dfrac{e^{3,5} - 16,56}{1,25}$

La consommation de gazole devrait dépasser 35 millions de tonnes en 2014.

Exercice 4

Partie A

1. La fonction exponentielle ne s'annule jamais et est dérivable sur [0 ;4].

La fonction d est le quotient de 2 fonctions dérivables sur [0 ;4] ; elle est donc également dérivable sur [0 ;4].

$d'(x) = \dfrac{3e^x - (3x + 0,3e^x)}{e^{2x}} = \dfrac{2,7 - 3x}{e^x}$

2. Le signe de $d'(x)$ dépend uniquement de celui de $2,7 - 3x$.

$2,7 - 3x \geq 0 \Leftrightarrow 2,7 \geq 3x \Leftrightarrow 0,9 \geq x$

x	0		0,9		4
$f'(x)$		+	0	-	
f	-1	↗	$\dfrac{3}{e^{0,9}} - 1,3$	↘	$\dfrac{12,3}{e^4} - 1,3$

3. $f(0,9) = \dfrac{3}{e^{0,9}} - 1,3 \approx -0,08$. Par conséquent d est négative sur [0 ;4].

Partie B

1. **a.** h est une somme de fonctions dérivables sur [0 ;4] ; elle est donc dérivable sur [0 ;4]

$h'(x) = g'(x) - f'(x) = -1,3 - \dfrac{3e^x - (3x + 3,3)e^x}{e^{2x}} = -\dfrac{3 - 3x - 3,3}{e^x} - 1,3 = \dfrac{3x + 0,3}{e^x} - 1,3$

$= d(x)$

b. La fonction d est négative sur [0 ;4] donc h est décroissante sur cet intervalle.

x	0	4
h	2,67 ↘	$\frac{15,3}{e^4} - 0,77$

c. $\dfrac{15,3}{e^4} - 0,77 \approx -0,49$

La fonction h est continue et strictement décroissante. $h(0) = 2,67$ et $h(4) < 0$.
Or 1 appartient à l'intervalle [0 ;2,67].
D'après le théorème de la bijection, il existe une unique valeur α appartenant à [0 ;4] telle que $h(\alpha) = 1$
$h(3,5) \approx 1,003$ et $h(3,6) \approx 0,994$. Donc $\alpha = 3,5$ à 10^{-1} près.

2. $\displaystyle\int_1^4 g(x)\,dx = \int_1^4 -1,3x + 5,97\,dx = \left[\frac{-1,3x^2}{2} + 5,97x\right]_1^4 = 13,48 - 5,32 = 8,16$

Partie C

1. Pour une tonne produite :
Les coûts de productions sont de 100 000 $f(1)$ = 231 764 €.
Le prix de vente est de 100 000 $g(1)$ = 467 000 €
Le bénéfice est, pour une tonne produite, de 467 000 – 231 764 = 235 236 €
2. Le prix de vente moyen par tonne, pour une production comprise entre 1 et 4 tonnes, est de :
$\dfrac{100\,000}{4-1}\displaystyle\int_1^4 g(x)\,dx = \dfrac{100\,000}{3} \times 8,16 = 272\,000$ €
3. Pour que le bénéfice soit au moins de 100 000 €, il faut donc que :
100 000 $h(x) \geq 100\,000$ soit $h(x) \geq 1$.
Donc $x \leq \alpha$