BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2012

MATHÉMATIQUES

Série : **ES**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **3 heures.** – COEFFICIENT : **7**

Ce sujet comporte 8 pages numérotées de 1 à 8.

Ce sujet nécessite l'utilisation d'une feuille de papier millimétré.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter tous les exercices.
Il est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 *(4 points)*

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions, ***une seule des réponses proposées est exacte***. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.

Une bonne réponse rapporte 1 point. Une mauvaise réponse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $f(x) = 2x - x\ln x$.

1. $\mathrm{f}(3\mathrm{e})$ est égal à :

a. $6\mathrm{e} - 3\mathrm{e}\ln 3$

b. $3\mathrm{e}(1 - \ln 3)$

c. $3\mathrm{e}^2 \ln(3\mathrm{e})$

2. L'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 0$ est :

a. $\mathrm{S} = \{0;\mathrm{e}^2\}$

b. $\mathrm{S} = \{\mathrm{e}^2\}$

c. $S = \{\ln 2\}$

3. La limite de la fonction f en $+\infty$ est égale à :

a. $+\infty$

b. 2

c. $-\infty$

4. Une primitive de la fonction f sur $]0;+\infty[$ est la fonction F définie sur $]0;+\infty[$ par :

a. $F(x) = 1 - \ln x$

b. $F(x) = \dfrac{5}{4}x^2 - \dfrac{1}{2}x^2 \ln x$

c. $F(x) = x^2 - x^2 \ln x$

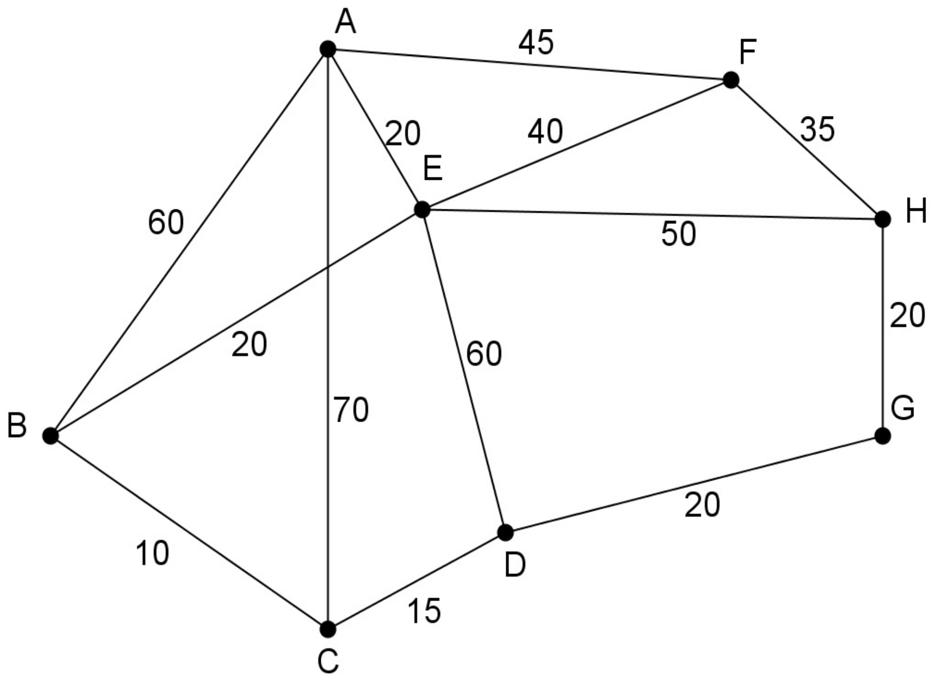
Exercice 2 *(5 points)*

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité.

Jonathan est un sportif adepte du semi-marathon (course à pied de 21,1 km). Depuis le 1er janvier 2012, il a décidé de courir un semi-marathon par mois. Afin d'améliorer sa préparation, il décide d'enchaîner les courses pédestres de 10 km dans différentes villes.

PARTIE A

Le graphe pondéré ci-dessous représente les villes A, B, C, D, E, F, H organisant des courses de 10 km et la ville G est celle organisant le prochain semi-marathon auquel Jonathan est inscrit.
Le poids de chaque arête représente le temps, en minutes, nécessaire pour relier une ville à une autre grâce aux transports en commun.



Jonathan vient de courir dans la ville A et souhaite se rendre dans la ville G pour repérer le parcours de son prochain semi-marathon. Déterminer à l'aide d'un algorithme le chemin permettant de relier le plus rapidement la ville A à la ville G et donner la durée de ce parcours en minutes.

PARTIE B

Grâce à son entraînement et à son expérience, Jonathan sait que :

- S'il a terminé la course lors de son précédent semi-marathon, il terminera le prochain semi-marathon avec une probabilité de 0,62 ;

- S'il a abandonné lors de son précédent semi-marathon, il terminera le prochain semi-marathon avec une probabilité de 0,8.

Jonathan a terminé son semi-marathon de janvier 2012.
Pour tout entier naturel *n*, on note P_n la matrice ligne $\begin{pmatrix} r_n & t_n \end{pmatrix}$ traduisant l'état probabiliste du *n-ième* mois écoulé depuis janvier 2012, où r_n désigne la probabilité que Jonathan abandonne au semi-marathon du *n-ième* mois et t_n la probabilité que Jonathan termine le semi-marathon du *n-ième* mois.
L'état probabiliste initial, correspondant à janvier 2012, est donc donné par : $P_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Traduire les données par un graphe probabiliste dont les sommets sont notés R et T (R lorsque Jonathan abandonne, T lorsqu'il termine le semi-marathon).

2. En déduire la matrice de transition en considérant les sommets dans l'ordre alphabétique.

3. Calculer l'état probabiliste P_2. En déduire la probabilité que Jonathan ait abandonné lors du semi-marathon couru en mars 2012.

4. Soit *P* la matrice ligne $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ donnant l'état stable.

    a. Calculer les valeurs de *x* et de *y* arrondies à 10^{-3} près.

    b. Interpréter les résultats obtenus.

Exercice 3 *(5 points)*

Commun à tous les candidats

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Le tableau ci-dessous donne les quantités de **super sans plomb** livrées et vendues en France de 2001 à 2009 (les quantités sont exprimées en millions de tonnes).

Année	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Quantité (millions de tonnes) y_i	11,6	11,4	11,2	10,9	10,7	10,2	9,8	9,1	8,7

Source INSEE

1. Représenter dans le plan muni d'un repère orthogonal le nuage de points $M_i\left(x_i; y_i\right)$, avec $1 \leq i \leq 9$, associé à cette série statistique. On prendra pour unités graphiques :
   - sur l'axe des abscisses : 1 centimètre pour une année,
   - sur l'axe des ordonnées : 2 centimètres pour un million de tonnes, en commençant la graduation à 7 millions de tonnes.
2. Déterminer les coordonnées du point moyen G du nuage. Placer ce point sur le graphique.
3. **a.** Déterminer, à l'aide de la calculatrice, une équation de la droite d'ajustement de y en x, obtenue par la méthode des moindres carrés (aucune justification n'est demandée). Les coefficients de l'équation de la droite seront arrondis à 10^{-2} près.

   b. Tracer la droite d'ajustement obtenue.
4. En supposant que cet ajustement reste valable jusqu'en 2012, déterminer une estimation des quantités de Super Sans Plomb livrées et vendues pour l'année 2012.

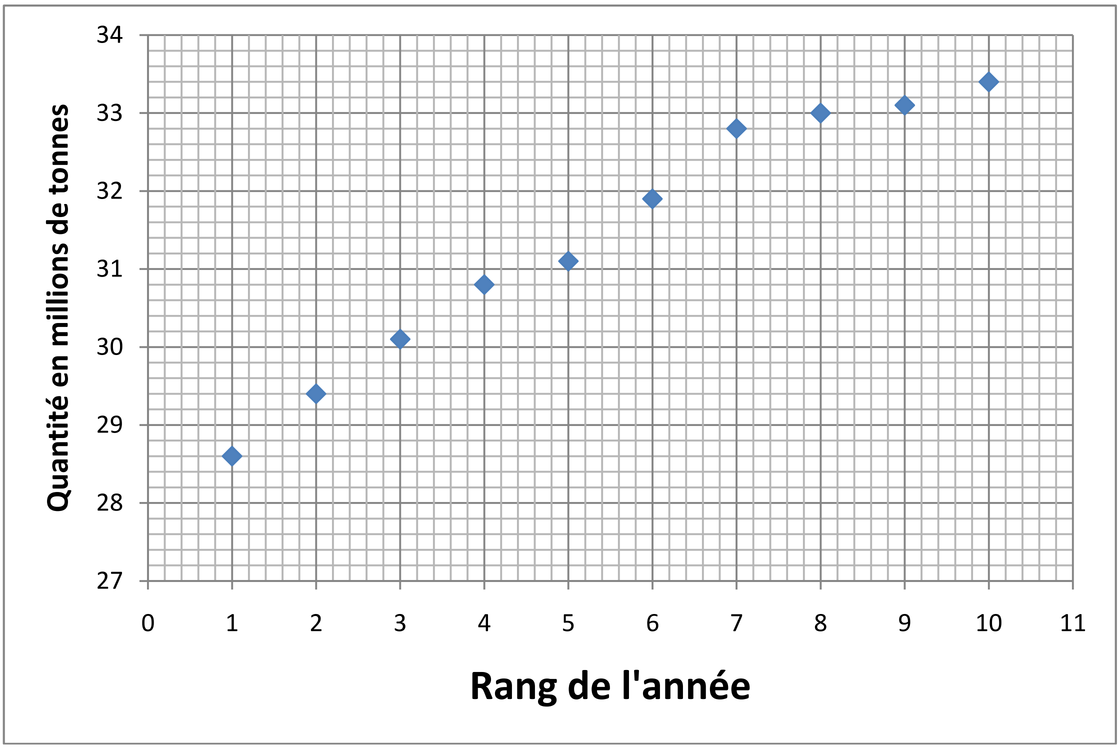
Partie B

Le tableau ci-dessous donne les quantités de **gazole** livrées et vendues en France de 2001 à 2010 (les quantités sont exprimées en millions de tonnes).

Année	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Quantité (millions de tonnes) y_i	28,6	29,4	30,1	30,8	31,1	31,9	32,8	33	33,1	33,4

Source INSEE

Le nuage de points $M_i\left(x_i;y_i\right)$ avec i variant entre 1 et 10 est représenté ci-dessous.



1. L'allure de ce nuage de points permet d'envisager un ajustement logarithmique. On pose, pour tout i compris entre 1 et 10 : $z_i = e^{\frac{y_i}{10}}$.

Calculer les valeurs de z_3 et z_{10} (on arrondira à 10^{-2} près).

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$z_i = e^{\frac{y_i}{10}}$	17,46	18,92		21,76	22,42	24,29	26,58	27,11	27,39	

2. On admet qu'une équation de la droite d'ajustement de z en x, obtenue par la méthode des moindres carrés, est : $z = 1,25x + 16,56$.

En déduire une expression de y en fonction de x sous la forme $y = k\ln(cx + d)$ où k, c, d désignent trois réels à déterminer.

3. En utilisant ce modèle, déterminer à partir de quelle année la consommation de gazole devrait dépasser 35 millions de tonnes.

Exercice 4 *(6 points)*

Commun à tous les candidats

PARTIE A

Soit d la fonction définie sur l'intervalle $[0;4]$ par : $d(x)=\dfrac{3x+0,3}{e^x}-1,3$.

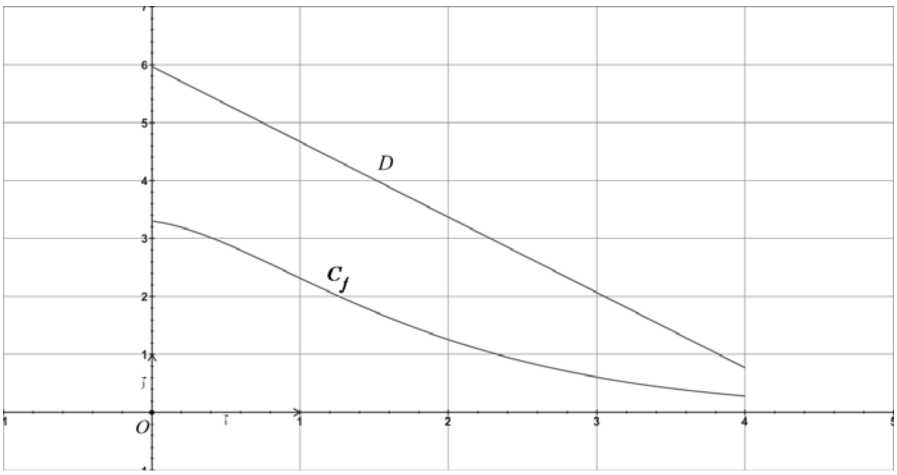
On note d' la fonction dérivée de la fonction d sur l'intervalle $[0;4]$.

1. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0;4]$, $d'(x)=\dfrac{-3x+2,7}{e^x}$
2. Étudier, pour x variant dans l'intervalle $[0;4]$, le signe de $d'(x)$, puis dresser le tableau de variations complet de la fonction d sur l'intervalle $[0;4]$. (on donnera dans ce tableau des valeurs arrondies à 10^{-2} près).
3. En déduire le signe de la fonction d sur l'intervalle $[0;4]$.

PARTIE B

Soient f et g les fonctions définies sur $[0;4]$ par $f(x)=\dfrac{3x+3,3}{e^x}$ et $g(x)=-1,3x+5,97$.

On admet que les fonctions f et g sont décroissantes sur $[0;4]$; la fonction f est représentée ci-dessous par la courbe C_f et la fonction g par le segment de droite D.



1. Soit h la fonction définie sur $[0;4]$ par : $h(x)=g(x)-f(x)$.
   a. Montrer que pour tout $x\in[0;4]$, $h'(x)=d(x)$ (d désigne la fonction étudiée dans la partie **A**).
   b. En déduire le tableau de variations de la fonction h sur $[0;4]$.
   c. Montrer que l'équation $h(x)=1$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[0;4]$. En donner une valeur approchée à 10^{-1} près.
2. Calculer l'intégrale : $\int_1^4 g(x)dx$.

PARTIE C

Dans cette partie, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.
*Les résultats de la partie **B** pourront être utilisés pour répondre aux questions suivantes.*

Une entreprise prévoit de fabriquer et de commercialiser mensuellement entre 1 et 4 tonnes d'un produit cosmétique (toute la production est vendue).
Pour x tonnes de produit fabriquées mensuellement (avec $x \in [1;4]$), on admet que $f(x)$ désigne le coût de production par tonne (en centaines de milliers d'euros), et $g(x)$ le prix de vente par tonne (en centaines de milliers d'euros).

1. L'entreprise décide de produire 1 tonne par mois. Déterminer, en arrondissant à l'euro près, le coût de production de la tonne produite, son prix de vente, et le bénéfice mensuel ainsi réalisé.

2. Déterminer, en euros, le prix de vente moyen par tonne pour une production comprise entre 1 et 4 tonnes.

3. L'entreprise souhaite réaliser un bénéfice par tonne d'au moins 100 000 euros. Quelles quantités doit-elle produire pour satisfaire cette contrainte ?