

Approcher un irrationnel par des rationnels
(Calculs sur les fractions et les radicaux, approximations)

I- Approcher $\sqrt{2}$

1. a) Calculer $(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)$ et en déduire que $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}}$

b) Expliquer pourquoi $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{1 + 1 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}}}$ c'est-à-dire $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}}}$

2. On peut continuer ce processus :

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}}}}} \text{ et ainsi de suite : } \sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}}$$

On pose :

$$r_1 = 1 ; r_2 = 1 + \frac{1}{2} ; r_3 = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}$$

$$r_4 = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}} \text{ et ainsi de suite.}$$

INFO

L'égalité ci-dessus donne le développement en fraction continue de $\sqrt{2}$.

Les nombres en rouge sont suffisants pour écrire $\sqrt{2}$:

$$\sqrt{2} = [1 ; 2 ; 2 ; 2 ; 2 ; \dots]$$

Pour afficher l'écriture fractionnaire irréductible d'une fraction, on utilise :

- les touches $\boxed{a+b/c}$ et $\boxed{d/c}$ sur CASIO ;
- l'instruction \blacktriangleright Frac du menu $\boxed{\text{MATH}}$ (ou $\boxed{\text{FRAC}}$) sur TI.

a) Donner l'écriture fractionnaire irréductible de $r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7$ et r_8 .

b) Donner la valeur exacte ou l'arrondi à 10^{-8} près de r_2, r_3, \dots, r_8 .

c) Vérifier que r_1, r_2, \dots, r_8 approchent $\sqrt{2}$ de plus en plus précisément en l'encadrant.

II- Approcher π

On ne connaît pas le développement en fraction continue de π . Voilà une décou-

verte mathématique encore possible. Néanmoins, posons : $r_1 = 3 ; r_2 = 3 + \frac{1}{7}$;

$$r_3 = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15}} ; r_4 = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1}}} ; r_5 = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{252}}}} ; \dots$$

a) Avec la calculatrice trouver les valeurs exactes de ces cinq nombres et leur arrondi à 10^{-9} près.

b) Vérifier qu'ils approchent π de plus en plus précisément en l'encadrant.