

Brevet Blanc n°1- Janvier 2008 : Correction

Partie 1 : ACTIVITES NUMERIQUES : (12 points)

Exercice 1 : (3 points) :

Soit les expressions : $A = \frac{9}{5} - \frac{2}{5} \times \frac{11}{4}$, $B = \frac{5}{12} \div \frac{13}{28}$ et $C = \frac{4 \times (10^{-3})^5 \times 10^4}{2 \times 10^6 \times 16 \times 10^{-3}}$

1) Calculer A et B en détaillant les étapes du calcul et écrire le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

• $A = \frac{7}{10}$ (1 point) et $B = \frac{35}{39}$ (1 point)

2) Donner l'expression scientifique de C.

• $C = 1,25 \times 10^{-15}$ (1 point)

Exercice 2 (5 points) On considère l'expression

$$D = (2x - 1)^2 + (2x - 1)(x + 5).$$

1) Développer et réduire l'expression D. $D = 6x^2 + 5x - 4$ (1,5 point) et 0,5 si ok avant réduction.

2) Factoriser l'expression D. $D = (2x - 1)(3x + 4)$ (1 point)

3) Calculer les valeurs de D $D(-2) = 10$ (1 point)

$D\left(\frac{7}{4}\right) = \frac{185}{8}$ (1,5 point)

Exercice 3 (4 points)

1) Les nombres 682 et 352 sont-ils premiers entre eux ? (1 point)

- 682 et 352 sont pairs donc divisibles par 2, de ce fait leur PGCD est différent de 1 car supérieur (ou égal) à 2.

2) Calculer le plus grand diviseur commun de 682 et 352. (2 points)

- Utilisons l'algorithme d'Euclide pour calculer le PGCD. (0,5 point)
- Par divisions euclidiennes ont obtenu : (1 point)

$$\begin{array}{rclclcl} 682 & = & 1 & \times & 352 & + & 330 \\ 352 & = & 1 & \times & 330 & + & 22 \\ 330 & = & 15 & \times & 22 & + & 0 \end{array}$$

- Donc le PGCD de 682 et 352 est 22 car c'est le dernier reste non nul. (0,5 point)

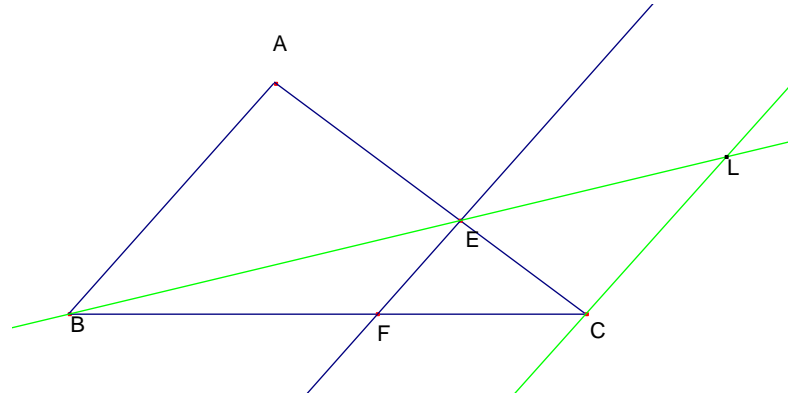
3) Rendre irréductible la fraction $\frac{682}{352}$ en indiquant clairement la méthode utilisée. (1 point)

- $\frac{682}{352} = \frac{22 \times 31}{22 \times 16} = \frac{31}{16}$ qui est une fraction irréductible, (0,5 point)
- car par théorème, si l'on simplifie une fraction par le PGCD du numérateur et du dénominateur, on obtient une fraction irréductible. (0,5 point)

PARTIE 2 : ACTIVITES GEOMETRIQUES : (12 points)**Exercice 1 (6,5 points)****1°) Construction : (1 point)**

1.a) Tracer un triangle ABC tel que $AC = 7,5$ cm, $BC = 10$ cm, $AB = 6$ cm. (0,5 point)

1.b) Placer le point E sur [AC] tel que $AE = 4,5$ cm et F sur [BC] tel que $BF = 6$ cm. (0,5 point)

**2°) Les droites (AB) et (EF) sont-elles parallèles ? Justifier votre réponse. (2 points)**

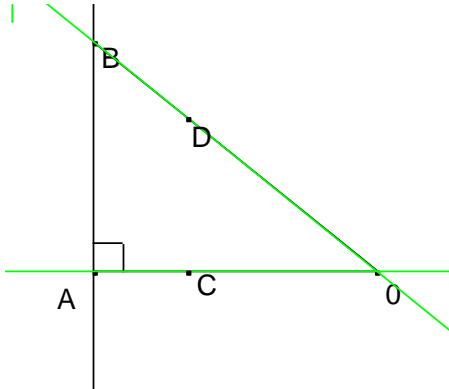
- On est en configuration de Thalès
Les points C, E, A et C, F, B sont alignés dans cet ordre sur deux droites sécantes en C. (0,5 point)
- Test : $\begin{cases} \frac{CE}{CA} = \frac{7,5-4,5}{7,5} = \frac{3}{7,5} = \frac{2}{5} = 0,4 \\ \frac{CF}{CB} = \frac{10-6}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} = 0,4 \end{cases}$ (0,5 point)
- Donc $\frac{CE}{CA} = \frac{CF}{CB}$ (0,5 point)
- et d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (MP) et (BC) sont parallèles. (0,5 point)

3°) Calculer EF. (1,5 point)

- Données :
- Les points C, E, A et C, F, B sont alignés sur deux droites sécantes en C.
- les droites (EF) et (CB) sont parallèles (0,25 point)
- Donc d'après le théorème de Thalès : (0,25 point)
- $\frac{CE}{CA} = \frac{CF}{CB} = \frac{EF}{AB}$ (0,25 point)
- Soit : $\frac{EF}{6} = \frac{CF}{CB} = \frac{4}{10}$ et $10EF = 4 \times 6$
D'où : $\boxed{EF = 2,4 \text{ cm}}$ (0,75 point)

4°) On trace la droite parallèle à (AB) passant par C. Cette droite coupe (BE) en L. Déterminer CL. (2 points)

- Construction du point L : (0,5 point)**
- Calcul de CL : (1,5 point)**
 - Données :
- Les points B, E, L et B, F, C sont alignés sur deux droites sécantes en B.
- les droites (EF) et (LC) sont parallèles (0,25 point)
 - Donc d'après le théorème de Thalès : (0,25 point)
 - $\frac{BE}{BL} = \frac{BF}{BC} = \frac{EF}{LC}$ (0,25 point)
 - Soit : $\frac{EF}{LC} = \frac{BF}{BC}$ et $\frac{2,4}{LC} = \frac{6}{10}$ $6 LC = 2,4 \times 10$
D'où : $\boxed{LC = 4 \text{ cm}}$ (0,75 point)

Exercice 2 (5,5 points)

OAB est un triangle rectangle en A.

D appartient à la droite (OB)

et C appartient à la droite (OA).

Les longueurs sont données en millimètres :

OC = 28 ; CD = 21 ; OD = 35 ; OB = 45 ; OA = 36.

1) **Démontrer que le triangle ODC est rectangle en C. (1 point)**

Si le triangle ODC est rectangle, c'est en C car OD est le plus grand côté.

- Test : $\begin{cases} OD^2 = 35^2 = 1\,225 \\ OC^2 + CD^2 = 28^2 + 21^2 = 1\,225 \end{cases}$ (0,25 point)
- Donc $OD^2 = OC^2 + CD^2$ (0,25 point)
- Et d'après la réciproque du théorème de Pythagore, (0,25 point)
- le triangle OCD est rectangle en C. (0,25 point)

2) **Calculer la mesure du côté [AB]. (1,5 point)**

- Le triangle ABO est rectangle en A, (0,25 point)
- Donc d'après le théorème de Pythagore (0,25 point)
- $BO^2 = BA^2 + AO^2$ (0,25 point)
- Soit $AB^2 = BO^2 - AO^2 = 45^2 - 36^2 = 729$
- Donc $AB = \sqrt{729} = 27 \text{ mm}$. (0,75 point)

3) **Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles en justifiant votre réponse. (1 point)**

- **Méthode 1** : En utilisant les questions précédentes.
 - On a montré que le triangle ODC était rectangle en C donc : $(DC) \perp (AO)$ (0,25 point)
 - En outre ABC est rectangle en A donc : $(AB) \perp (AO)$ (0,25 point)
 - Les droites (AB) et (CD) sont donc perpendiculaires à une même troisième droite (AO), elles sont donc parallèles entre elles par théorème. (0,5 point)
- **Méthode 2** : En utilisant la réciproque de Thalès.
 - On est en configuration de Thalès
 - Les points O, C, A et O, D, B sont alignés dans cet ordre sur deux droites sécantes en O. (0,25 point)
 - Test : $\begin{cases} \frac{OD}{OB} = \frac{35}{45} = \frac{7}{9} \\ \frac{OC}{OA} = \frac{28}{36} = \frac{7}{9} \end{cases}$ (0,25 point)
 - Donc $\frac{OD}{OB} = \frac{OC}{OA}$ (0,25 point)
 - et d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (AB) et (CD) sont parallèles. (0,25 point)

4) **Calculer l'aire du triangle ODC. (1 point)**

- ODC est un triangle rectangle en C donc : $Aire (OCD) = \frac{CD \times CO}{2}$ (0,25 point)
- $Aire (OCD) = \frac{21 \times 28}{2}$
- $Aire (OCD) = 294 \text{ mm}^2$ (0,75 point) et 0,5 si oublie d'unité

5) **A l'aide de la proportionnalité, calculer l'aire du triangle OAB. (1 point)**

$$\frac{OB}{OD} = \frac{45}{35} = \frac{9}{7} \text{ donc } Aire (OAB) = \left(\frac{9}{7}\right)^2 \times Aire (OCD) = 486 \text{ mm}^2$$

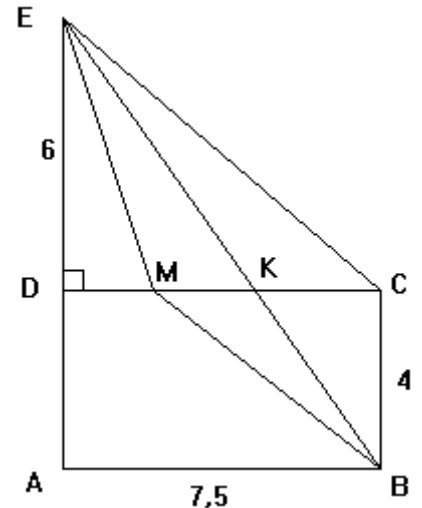
PARTIE 3 : PROBLEME (12 points)

ABCD est un rectangle. CDE est un triangle rectangle.

On donne les longueurs suivantes : DE = 6 cm; BC = 4 cm et AB = 7,5 cm. Le point M est situé sur le segment [DC].

On pose DM = x et K est l'intersection de (BE) et (CD).

La figure ci-contre n'est pas à l'échelle et il n'est pas demandé de la reproduire.

**1) Démontrer que DK = 4,5 cm. (2,5 points)**

- Remarquons tout d'abord que les droites (ED) et (CB) sont parallèles puisqu'elles sont perpendiculaires à (DC). (0,25 point)

- On va appliquer le théorème de Thalès dans la configuration croisée.

o Données :

- Les points E, K, B et D, K, C sont alignés sur deux droites sécantes en K.

- les droites (ED) et (CB) sont parallèles (0,25 point)

o Donc d'après le théorème de Thalès : (0,25 point)

$$\frac{KE}{KB} = \frac{KD}{KC} = \frac{ED}{CB}$$

o Soit : $\frac{KD}{KC} = \frac{ED}{CB}$ et $\frac{KD}{KC} = \frac{6}{4}$

Or $K \in [DC]$ donc $KD + KC = DC = AB = 7,5 \text{ cm}$ et $KC = 7,5 - KD$

D'où : $\frac{KD}{7,5 - KD} = \frac{6}{4}$ (1 point)

o $4KD = 6(7,5 - KD)$ et on obtient $KD = \frac{6 \times 7,5}{10} = 4,5 \text{ cm}$ (0,5 point)

Remarque : On peut aussi appliquer Thalès dans le triangle EAB avec (DK)//(AB).

On trouve alors : $\frac{DK}{AB} = \frac{ED}{EA}$ soit $\frac{DK}{7,5} = \frac{6}{10}$ donc $DK = 6 \times \frac{7,5}{10} = 4,5 \text{ cm}$

2) Démontrer que l'aire de DEM est égale à 3x. (1 point)

- DEM est un triangle rectangle en D donc : $\mathcal{Aire}(DEM) = \frac{DE \times DM}{2}$ (0,25 point)

- $\mathcal{Aire}(DEM) = \frac{6 \times x}{2}$ (0,5 point)

- $\mathcal{Aire}(DEM) = 3x$ (0,25 point)

3) Calculer MC en fonction de x. (1 point)

- ABCD est un rectangle donc $AB = DC$

- Le point M appartient au segment [DC] donc : $MC = DC - DM = 7,5 - x$.

$$MC = 7,5 - x$$

4) Démontrer que l'aire de BMC est égale à 15 - 2x. (1,5 point)

- BMC est un triangle rectangle en C donc : $\mathcal{Aire}(BMC) = \frac{CM \times CB}{2}$ (0,25 point)

- $\mathcal{Aire}(BMC) = \frac{(7,5 - x) \times 4}{2}$ (0,25 point)

- $\mathcal{Aire}(BMC) = \frac{30 - 4x}{2}$ (0,25 point)

- $\boxed{\mathcal{Aire}(BMC) = 15 - 2x}$ (0,75 point)

5) **Calculer l'aire d'EAB. (1 point)**

- EAB est un triangle rectangle en A donc : $\boxed{\mathcal{Aire}(EAB) = \frac{AE \times AB}{2}}$ (0,25 point)

- $\mathcal{Aire}(EAB) = \frac{(6+4) \times 7,5}{2}$

- $\boxed{\mathcal{Aire}(EAB) = 37,5 \text{ cm}^2}$ (0,75 point) et 0,5 si oublie d'unité

6) **Démontrer que l'aire de ABMD est égale à $15 + 2x$. (1,5 points)**

- $\mathcal{Aire}(ABMD) = \mathcal{Aire}(ABCD) - \mathcal{Aire}(BMD)$ (0,5 point)

- $\mathcal{Aire}(ABMD) = 4 \times 7,5 - (15 - 2x)$ (0,25 point)

- $\mathcal{Aire}(ABMD) = 30 - 15 + 2x$ (0,5 point)

- $\boxed{\mathcal{Aire}(ABMD) = 15 + 2x}$ (0,25 point)

Ou calcul directe avec la formule de l'aire d'un trapèze : $\mathcal{Aire}(ABMD) = \frac{(DM+AB) \times AD}{2} = \frac{(x+7,5) \times 4}{2} = 15 + 2x$

et que l'aire de ABME est $15 + 5x$. (1 point)

- $\mathcal{Aire}(ABME) = \mathcal{Aire}(ABMD) + \mathcal{Aire}(DEM)$ (0,5 point)

- $\mathcal{Aire}(ABME) = 15 + 2x + 3x$ (0,25 point)

- $\boxed{\mathcal{Aire}(ABME) = 15 + 5x}$ (0,25 point)

7) **En utilisant les calculs précédents, déterminer x pour que l'aire de ABME soit égale à l'aire de EAB. Le résultat obtenu pouvait-il être prévu ? Expliquer votre réponse. (2,5 point)**

- On cherche $x = DM$ pour que : $\boxed{\mathcal{Aire}(ABME) = \mathcal{Aire}(EAB)}$ (0,5 point)

- Soit : $\boxed{15 + 5x = 37,5}$ (0,5 point)

- $\boxed{x = \frac{37,5-15}{5} = 4,5}$ (0,5 point)

- Or si $x = DM = 4,5 \text{ cm}$, cela correspond au cas où les points M et K sont confondus. (0,5 point)

- Lorsque les points M et K sont confondus, le quadrilatère ABME est en fait un triangle, puisque le point K appartient au segment [EB]. C'est le triangle EAB.

Alors de façon évidente $\mathcal{Aire}(ABME) = \mathcal{Aire}(EAB)$ et la réciproque est immédiate. (0,5 point)