DM n°1 de Mathématiques – CORRECTION : Troisièmes 1 et 2.

Exercice 1.

Démontrer la propriété suivante :

Soit a et b deux entiers avec $a \geq b > 0$, alors $\boxed{\text{PGCD}(a\,;b) = \text{PGCD}(b\,;a-b)}$

Démonstration :

- Si un nombre N divise a et b, alors il existe deux entiers c et d tels que :
  $a = N \times c$ et $b = N \times d$.
  Donc $a - b = N \times c - N \times d = N(c - d)$ et de ce fait N divise aussi $(a - b)$
  Par conséquent si N divise a et b, alors N divise aussi b et (a – b.
- Réciproquement, si un nombre N divise b et $(a - b)$, alors il existe deux entiers c et d tels que : $b = N \times c$ et $a - b = N \times d$.
  Donc puisque $a = (a - b) - b = N \times d - N \times c.= N(d - c)$ et de ce fait N divise aussi a.
- Pour conclure, tous les diviseurs COMMUNS de a et b sont aussi ceux de b et $(a - b)$ et donc le $\boxed{\text{PGCD}(a\,;b) = \text{PGCD}(b\,;a-b)}$

Exercice 2 : dans les ANNALES (Nathan), exercice 2 page 57.

1. **Les nombres 1 540 et 693 sont-ils premiers entre eux ? Justifier.**
   Calculons le PGCD des deux nombres avec l'algorithme d'Euclide qui est basé sur la propriété suivante :

Propriété 1 : Soit a et b deux entiers avec $a \geq b > 0$ et R le reste de la division euclidienne de a par b, alors $\boxed{\text{PGCD}(a\,;b) = \text{PGCD}(b\,;R)}$

Par divisions euclidiennes successives on obtient :

1540	**=**	**2**	×	**693**	**+**	**154**
693	**=**	**4**	×	**154**	**+**	**77**
154	**=**	**2**	×	**77**	**+**	**0**

Le dernier reste non nul est 77 donc le PGCD de 1 540 et 693 est 77, ils ne sont pas premiers entre aux.

2. **Donner la fraction irréductible égale à : $\frac{1\,540}{693}$,en précisant la méthode utilisée.**

On a $1540 = 20 \times 77$ et $693 = 9 \times 77$ donc $\frac{1\,540}{693} = \frac{20 \times 77}{9 \times 77} = \frac{20}{9}$ qui est une fraction irréductible d'après le théorème 2 :

Si on simplifie une fraction par le PGCD du dénominateur et du numérateur on obtient une fraction irréductible.

Exercice 3 : dans les ANNALES (Nathan), exercice 3 page 48.

1. **Calculer le PGCD de 425 et 204.**

   Calculons le PGCD des deux nombres avec l'algorithme d'Euclide qui est basé sur la propriété 1. Par divisions euclidiennes successives on obtient :

425	**=**	**2**	×	**204**	**+**	**17**
204	**=**	**12**	×	**17**	**+**	**0**

   Le dernier reste non nul est 17 donc le PGCD de 425 et 204 est 17.

2. **En déduire la forme irréductible de la fraction :** $\frac{\mathbf{204}}{\mathbf{425}}$.

   204 = 17 × 12 et 425 = 17 × 25 donc $\frac{204}{425} = \frac{17 \times 12}{17 \times 25} = \frac{\mathbf{12}}{\mathbf{25}}$ qui est une fraction irréductible d'après le théorème 2.

Exercice 4 : dans les ANNALES (Nathan), exercice 2 page 46.

1. **Calculer le PGCD de 1 911 et 2 499.**

   Calculons le PGCD des deux nombres avec l'algorithme d'Euclide qui est basé sur la propriété 1. Par divisions euclidiennes successives on obtient :

2499	**=**	**1**	×	**1911**	**+**	**588**
1911	**=**	**3**	×	**588**	**+**	**147**
588	**=**	**4**	×	**147**	**+**	**0**

   Le dernier reste non nul est 147 donc le PGCD de 1 540 et 693 est 147, ils ne sont pas premiers entre aux.

2. **En déduire la forme irréductible de la fraction :** $\frac{\mathbf{1\,911}}{\mathbf{2\,499}}$.

   On a : 2 499 = 147×17 et 1911 = 147×13 donc $\frac{1\,911}{2\,499} = \frac{147 \times 13}{147 \times 17} = \frac{\mathbf{13}}{\mathbf{17}}$ qui est une fraction irréductible d'après le théorème 2.

Remarque : Il y avait une petite erreur de recopie dans la question, on demandait la forme irréductible de 2499/1911 ce qui donne 17/13.