**Correction du DM de Mathématiques**
**Racines carrées**

## Exercice 1 : Expression conjuguée

1. Ecrivez sous la forme $a + b\sqrt{c}$ avec a,b entiers relatifs et c un entier le plus petit possible

$$A = \frac{4}{2+\sqrt{3}} = \frac{4\times(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})\times(2-\sqrt{3})} = \frac{8-4\sqrt{3}}{2^2-\sqrt{3}^2} = \frac{8-4\sqrt{3}}{4-3} = \frac{8-4\sqrt{3}}{1} = \boxed{8-4\sqrt{3}}$$

$$B = \frac{8}{\sqrt{5}-1} = \frac{8\times(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \frac{8\sqrt{5}+8}{\sqrt{5}^2-1^2} = \frac{8\sqrt{5}+8}{5-1} = \frac{8\sqrt{5}+8}{4} \quad \boxed{2+2\sqrt{5}}$$

$$C = \frac{12}{\sqrt{7}+1} = \frac{12\times(\sqrt{7}-1)}{(\sqrt{7}+1)\times(\sqrt{7}-1)} = \frac{12\sqrt{7}-12}{7-1} = \frac{12\sqrt{7}-12}{6} = \boxed{-2+2\sqrt{7}}$$

2. Montrer que :

a. $$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+4} = \frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}-4)}{(\sqrt{5}+4)(\sqrt{5}-4)} = \frac{5-4\sqrt{5}}{5-16} = \frac{5-4\sqrt{5}}{-11} = \boxed{\frac{\mathbf{4\sqrt{5}-5}}{\mathbf{11}}}$$

b. $$\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}+2} = \frac{(\sqrt{3}-2)\times(\sqrt{3}-2)}{(\sqrt{3}+2)\times(\sqrt{3}-2)} = \frac{\sqrt{3}^2-2\times\sqrt{3}\times2+2^2}{3-4} = \frac{7-4\sqrt{3}}{-1} = \boxed{\mathbf{4\sqrt{3}-7}}$$

---

## Exercice 2 : Pythagore

On considère un triangle EFG tel que $EF = \sqrt{3}-1$ ; $EG = \sqrt{8}$ et $FG = \sqrt{3}+1$ (en cm).
EFG est-il rectangle ?

Si EFG est rectangle c'est en F car [EG] est le plus grand côté (utiliser la calculatrice).

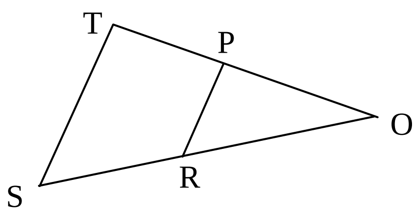
$$\text{Test : } \begin{cases} EG^2 = 8 \\ EF^2 + FG^2 = (\sqrt{3}-1)^2 + (\sqrt{3}+1)^2 = 3-2\sqrt{3}+1+3+2\sqrt{3}+1 = 8 \end{cases}$$

Donc $EG^2 = EF^2 + FG^2$ et donc d'après la réciproque de Pythagore <u>le triangle EFG est rectangle en F</u>

---

## Exercice 3 : Thalès

La figure ci-contre n'est pas en vraie grandeur et l'unité des mesures est le centimètre.
OR = 12 RS = 6 $OP = \sqrt{40}$
Les droites (PR) et (TS) sont parallèles.
Calculer OT et donner le résultat sous la forme $a\sqrt{10}$.




Puisque les droites (PT) et (RS) sont sécantes en O avec (PR) // (TS), on peut utiliser le théorème de Thalès :

$\frac{OP}{OT} = \frac{OR}{OS} = \frac{PR}{TS}$ ; en remplaçant on obtient : $\frac{\sqrt{40}}{OT} = \frac{12}{12+6}$

et ensuite $OT = \frac{\sqrt{40}\times 18}{12} = \frac{\sqrt{4}\times\sqrt{10}\times 18}{12}$

$OT = \frac{2\times 18\times\sqrt{10}}{12} = \frac{36\sqrt{10}}{12}$ = et alors $\boxed{OT = 3\sqrt{10}\text{ cm}}$.

**<u>Exercice non noté</u> :**

1. <u>Pour n un entier naturel, montrer que l'on a</u> : $\boxed{\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$.

$$\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)\times\left(\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\right)} = \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{n-(n+1)} = \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{-1} = \boxed{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$$

2. <u>En déduire la valeur de la somme S</u>.

$$S = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{\sqrt{998}+\sqrt{999}} + \frac{1}{\sqrt{999}+\sqrt{1000}}.$$

En appliquant la formule de la question 1)° on a :

- pour n = 1 on a $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2} - \sqrt{1} = \sqrt{2} - 1$,
- Puis pour n = 2, on a $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$

….etc… .

- pour n = 999, on a $\dfrac{1}{\sqrt{999}+\sqrt{1000}} = \sqrt{1000} - \sqrt{999}$

Donc $S = \left(\sqrt{2}-1\right) + \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right) + \left(\sqrt{4}-\sqrt{3}\right) + \ldots.. + \left(\sqrt{999}-\sqrt{998}\right) + \left(\sqrt{1000}-\sqrt{999}\right)$

Et tous les termes s'éliminent sauf -1 et $\sqrt{1000}$ donc

$\boxed{\mathbf{S = -1 + \sqrt{1000} = 10\sqrt{10} - 1}}$