TD n°5	Mathématiques	Troisième
Chapitre : **Racines carrée et puissances**	**TD n°5 : Racines carrées**	

Rappel utile :

$4 = 2^2 \quad et \quad \sqrt{4} = 2$	$64 = 8^2 \quad et \quad \sqrt{64} = 8$
$9 = 3^2 \quad et \quad \sqrt{9} = 3$	$81 = 9^2 \quad et \quad \sqrt{81} = 9$
$16 = 4^2 \quad et \quad \sqrt{16} = 4$	$100 = 10^2 \quad et \quad \sqrt{100} = 10$
$25 = 5^2 \quad et \quad \sqrt{25} = 5$	$121 = 11^2 \quad et \quad \sqrt{121} = 11$
$36 = 6^2 \quad et \quad \sqrt{36} = 6$	$144 = 12^2 \quad et \quad \sqrt{144} = 12$
$49 = 7^2 \quad et \quad \sqrt{49} = 7$	$169 = 13^2 \quad et \quad \sqrt{169} = 13$

Exercice 1

En détaillant, donner une écriture sans radical ($\sqrt{.}$) des nombres suivants :

$$A = -\left(\sqrt{19}\right)^2 \quad ; \quad B = \sqrt{32} \times \sqrt{2} \quad ; \quad C = \frac{\sqrt{121}}{\sqrt{144}} \quad ; \quad D = \sqrt{36+64} \quad ;$$

Exercice 2 : Compléter selon le modèle.

$$\sqrt{12} = \sqrt{\overbrace{\boxed{4}}^{un\ carré} \times 3} = \sqrt{\boxed{4}} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

$\sqrt{20} = \sqrt{\boxed{\dots} \times \dots} = \sqrt{\boxed{\dots}} \times \sqrt{\dots} = \dots\sqrt{\dots}$	$\sqrt{200} = \sqrt{\boxed{\dots} \times \dots} = \sqrt{\boxed{\dots}} \times \sqrt{\dots} = \dots\sqrt{\dots}$
$\sqrt{27} = \sqrt{\boxed{\dots} \times \dots} = \sqrt{\boxed{\dots}} \times \sqrt{\dots} = \dots\sqrt{\dots}$	$\sqrt{75} = \sqrt{\boxed{\dots} \times \dots} = \sqrt{\boxed{\dots}} \times \sqrt{\dots} = \dots\sqrt{\dots}$
$\sqrt{32} = \sqrt{\boxed{\dots} \times \dots} = \sqrt{\boxed{\dots}} \times \sqrt{\dots} = \dots\sqrt{\dots}$	$\sqrt{72} = \sqrt{\boxed{\dots} \times \dots} = \sqrt{\boxed{\dots}} \times \sqrt{\dots} = \dots\sqrt{\dots}$
$\sqrt{50} = \sqrt{\boxed{\dots} \times \dots} = \sqrt{\boxed{\dots}} \times \sqrt{\dots} = \dots\sqrt{\dots}$	$\sqrt{490} = \sqrt{\boxed{\dots} \times \dots} = \sqrt{\boxed{\dots}} \times \sqrt{\dots} = \dots\sqrt{\dots}$
$\sqrt{40} = \sqrt{\boxed{\dots} \times \dots} = \sqrt{\boxed{\dots}} \times \sqrt{\dots} = \dots\sqrt{\dots}$	$\sqrt{242} = \sqrt{\boxed{\dots} \times \dots} = \sqrt{\boxed{\dots}} \times \sqrt{\dots} = \dots\sqrt{\dots}$

Exercice 3 : Les questions type Brevet.

Ecrire les nombres suivants sous la forme $a + b\sqrt{c}$ où les nombres *a, b* et *c* sont entiers relatifs :

$$E_1 = \sqrt{8} - 2\sqrt{18} + \sqrt{32} \;;\; E_2 = \sqrt{40} - 2\sqrt{90} + 3\sqrt{160} \;;\; E_3 = \sqrt{75} - 2\sqrt{27} + 2\sqrt{48}$$

Exercice 4 : Avec quelques pièges.

Ecrire les nombres suivants sous la forme $a + b\sqrt{c}$ où les nombres *a, b* et *c* sont entiers relatifs :

$$H_1 = \sqrt{81-49} \quad ; \quad H_2 = \sqrt{300} + 4\sqrt{5}\sqrt{15} \quad ; \quad H_3 = \frac{\sqrt{80}}{3\sqrt{45}}$$

Exercice 5 : Développements.

Ecrire les nombres suivants sous la forme $a + b\sqrt{c}$ où les nombres *a, b* et *c* sont entiers relatifs :

$$J_1 = \sqrt{15}\left(3 - \sqrt{15}\right) - \left(\sqrt{15} + 5\right) \;;\; J_2 = \left(\sqrt{3} - 2\sqrt{5}\right)^2 ; J_3 = \left(3\sqrt{2} - 5\right)\left(3\sqrt{2} + 5\right)$$

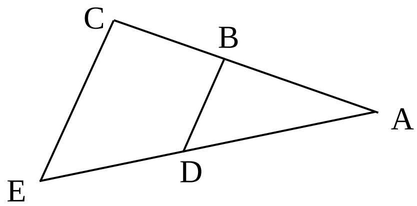
Exercice 6 : Avec Pythagore.

Le triangle KLM est tel que $KL = 2\sqrt{11}\,cm$; $LM = \sqrt{154}\,cm\ et\ KM = 3\sqrt{22}\,cm.$

Démontrer que ce triangle est rectangle et calculer son aire $A_{(KLM)}$ que l'on donnera sous forme $a\sqrt{14}$.

Exercice 7 : Avec Thalès.

La figure ci-contre n'est pas en vraie grandeur
et l'unité des mesures est le centimètre.
$AB = 6$; $BC = 3$; $AE = \sqrt{45}$
Les droites (BD) et (CE) sont parallèles.
Calculer AD et donner le résultat sous la forme $a\sqrt{5}$.



Exercice 8 : Calculs de valeurs

1/ On considère l'expression $A(x) = 3x^2 - 2x + 1$ où x est un nombre quelconque.

Calculer la valeur de A pour les valeurs de x suivantes : $\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{3}$ *et* $-\frac{\sqrt{2}}{3}$.

On donnera, pour chaque calcul, un résultat exact sous sa forme la plus simple possible, suivi d'une valeur arrondie à 10^{-3}.

2/ On considère l'expression $B(x) = (3x - 1)^2 - (x + 2)^2$ où x est un nombre quelconque.

a/ Calculer B pour $x = \sqrt{5}$.

On donnera le résultat sous la forme $a + b\sqrt{5}$ où a et b sont des nombres relatifs.

b/ Factoriser B(x) puis reprendre le calcul précédent à partir de cette nouvelle expression de B.

Exercice 9 : La quantité conjuguée, inévitable en seconde.

La quantité conjuguée d'une expression de la forme $(A - B)$ est $(A + B)$ et réciproquement ; la quantité conjuguée de $(A + B)$ *est* $(A - B)$.
Par exemple la quantité conjuguée de $(2 + \sqrt{3})$ *est* $(2 - \sqrt{3})$.
L'intérêt est que lorsqu'on multiplie ces deux expressions, on obtient une nouvelle expression que n'a plus de racine carrée du fait de l'application de la 3ème identité remarquable.
Par exemple : $(2 + \sqrt{3}) \times (2 - \sqrt{3}) = 2^2 - (\sqrt{3})^2 = 4 - 3 = \boxed{1}$

En supprimant les radicaux au dénominateur dans les expressions suivantes, montrer les égalités :

$A = \dfrac{1}{1+\sqrt{2}} = -1 + \sqrt{2}$	$B = \dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$	$C = \dfrac{1}{\sqrt{6}-2} = \dfrac{\sqrt{6}}{2} + 1$	$D = \dfrac{3}{\sqrt{2}+\sqrt{5}} = -\sqrt{2} + \sqrt{5}$
$E = \dfrac{-3}{\sqrt{5}-\sqrt{7}} = \dfrac{3}{2}(\sqrt{5}+\sqrt{7})$	$G = \sqrt{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$F = \dfrac{97}{10+\sqrt{3}} = 10 - \sqrt{3}$	$H = \dfrac{-1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = 3 + 2\sqrt{2}$

Exercice 10 : (Difficile) PPF

On pose $a = \sqrt{181 + 52\sqrt{3}}$ *et* $b = \sqrt{181 - 52\sqrt{3}}$.

1/ a/ Vérifier à l'aide d'une calculatrice que $181 - 52\sqrt{3} > 0$.

b/ Justifier l'existence du nombre b.

2/ a/ Calculer a^2 *et* b^2 puis ab *(on demande des valeurs exactes simplifiées).*

b/ En déduire $(a + b)^2$ puis la valeur exacte de $(a + b)$.

3/ a/ Développer $(13 + 2\sqrt{3})^2$ et en déduire une écriture simplifiée de a.

b/ Développer $(13 - 2\sqrt{3})^2$ et en déduire une écriture simplifiée de b.

c/ Retrouver grâce aux deux questions précédentes la valeur exacte de $(a + b)$ obtenue au 2/ b/.

Réponses ex. 1 à 7

$A = -19$; $B = 8$; $C = \dfrac{11}{12}$; $D = 10$; $\boxed{E_1 = 0}$; $\boxed{E_2 = 8\sqrt{10}}$; $\boxed{E_3 = 7\sqrt{3}}$; $\boxed{H_1 = 4\sqrt{2}}$; $\boxed{H_2 = 30\sqrt{3}}$; $\boxed{H_3 = \dfrac{4}{9}}$; $\boxed{J_1 = -7}$; $\boxed{J_2 = -20 + 2\sqrt{15}}$; $\boxed{J_3 = 23 - 4\sqrt{15}}$; $\boxed{\mathcal{A}(KLM) = 11\sqrt{14}\ cm^2}$; $\boxed{AD = 2\sqrt{5}\ cm}$

Réponse ex.8

$\boxed{A(\sqrt{2}) = 7 - 2\sqrt{2}}$; $\boxed{A(3\sqrt{2}) = 55 - 6\sqrt{2}}$; $\boxed{A(-\sqrt{2}) = 7 + 2\sqrt{2}}$ $\boxed{A\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{2}}$ $\boxed{A\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{5}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{2}}$

$\boxed{B(\sqrt{5}) = 37 - 10\sqrt{5}}$; $\boxed{B(x) = (2x - 3)(4x + 1)}$