Les extremums des fonctions numériques de plusieurs variables réelles.

$$\boldsymbol{Soit\ U\ une\ partie\ de}\ \mathbb{R}^{\boldsymbol{p}},\qquad \boldsymbol{a}\in\boldsymbol{X},\qquad \boldsymbol{f}:\boldsymbol{U}\to\mathbb{R}$$

1 – Définitions.

- f admet un **maximum local** en a ssi : $\exists\, V\in\mathcal{V}_{\mathbb{R}^p}(a), \forall\, x\in U\cap V\quad on\ a:\ f(x)\le f(a)$
- f admet un **minimum local** en a ssi : $\exists\, V\in\mathcal{V}_{\mathbb{R}^p}(a), \forall\, x\in U\cap V\quad on\ a:\ f(x)\ge f(a)$
- f admet un **maximum ou minimum local strict** en a : idem avec des inégalités strictes.
- f admet un **extremum local ou local strict** en a si f admet un min, resp max…
- f admet un **extremum global** en a ssi : $\forall\, x\in U\quad on\ a:\ f(x)\le f(a)\quad (ou\ f(x)\ge f(a))$
- a est un **point critique** de f ssi les dérivées partielles de f en a existent et sont nulles.

2 – Conditions nécessaires.

Théorème.

$$\boxed{Si\ \begin{cases} U\ ouvert\ de\ \mathbb{R}^p \\ f\ admet\ en\ a\ un\ extremum\ local \\ les\ dérivées\ partielles\ premières\ de\ f\ en\ a\ existent\end{cases}\quad Alors:\ \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)=0}$$

3 – Conditions suffisantes.

U ouvert de $\mathbb{R}^p$, si f est $C^2(U)$

3.a : Taylor Young ordre 2.. [AuCA] p 541

$$\boxed{f(a+h)-f(a)=\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a).h_i+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a).h_i^2+\sum_{1\le i<j\le p}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\ \partial x_j}(a).\ h_i h_j+o(\|h\|^2)}$$

3.b : Théorème général : Cas des fonction de p variables réelles.

Soit a un point critique de f. On définit la forme quadratique définit sur $\mathbb{R}^p$ par :

$$\boxed{Q(h)=\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a).h_i^2+2\sum_{1\le i<j\le p}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\ \partial x_j}(a).\ h_i h_j}$$

La matrice hessienne H de Q dans la base canonique de $\mathbb{R}^p$ est : $\boxed{H=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\ \partial x_j}(a)\right)_{1\le i,j\le p}}$

- Si Q est positive et non dégénérée ($\Leftrightarrow$ $le\ spectre\ de\ H, Sp_{\mathbb{R}}(H)\subset\mathbb{R}_+^*$) alors f admet un minimum local strict en a.
- Si Q est négative et non dégénérée ($\Leftrightarrow$ $le\ spectre\ de\ H, Sp_{\mathbb{R}}(H)\subset\mathbb{R}_-^*$) alors f admet un maximum local strict en a.
- Si Q n'est ni positive, ni négative : alors pas d'extremum local en a.

3.b : Théorème pour les fonctions de 2 variables

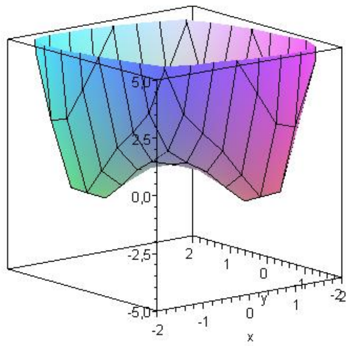
On utilise les notations de MONGE, du nom du mathématicien français MONGE Gaspard (1746-1818).

$$\boxed{r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)\ ;\ s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)\ ;\ t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)}$$

- Si $\begin{cases} s^2 - rt < 0 \\ r > 0 \end{cases}$ alors f admet <u>un minimum strict</u> en a.
- Si $\begin{cases} s^2 - rt < 0 \\ r < 0 \end{cases}$ alors f admet <u>un maximum strict</u> en a.
- Si $(s^2 - rt > 0)$ alors f n'admet pas d'extremum local en a.
  On dit alors que f admet un <u>point-selle</u> (ou un <u>point col</u> en a)

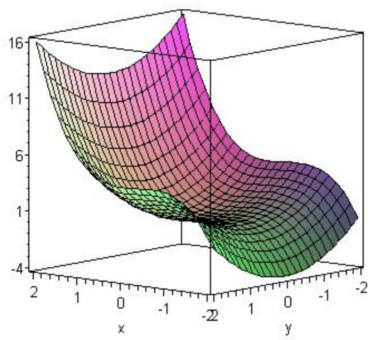
<u>Exemple</u> : $f(x,y) = x^4 + y^4 - (x-y)^2$

f admet deux minimums locaux en A(1 ;-1) et B(-1 ;1)



<u>Exemple</u> : $f(x,y) = x^2 + y^2 + x^3$

f admet un point selle en A(-2/3 ; 0)



---

4 – Extremums globaux.

<u>Proposition</u> : Si $\forall A > 0\ ,\ \exists\ B > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^p\ ;\ (\|x\| \geq B \Longrightarrow f(x) \geq A)$ soit $\left(\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty\right)$

$$\left(\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty\right) \Longrightarrow (f\ admet\ un\ minimum\ global)$$