Séries numériques.

Séries numériques.

TH : CN de convergence.

$$\boxed{\text{Si} \quad \sum u_n \text{ converge, alors} \quad \lim_\infty u_n = 0}$$

Critère de Cauchy.

$\sum u_n$ converge ssi elle vérifie le critère de Cauchy.

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \ tq \ \forall (n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, \quad n \geq N \Longrightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| < \varepsilon}$$

Série absolument cv.

- $\sum u_n$ Série absolument cv si $\sum |u_n|$ converge
- **Th.** : $\boxed{\text{Toute série abs cv est cv}}$.

Séries à termes positifs.

Attention, dans tout ce qui suit, les séries sont à termes positifs.

Comparaison : si $u_n \leq v_n$ $\quad \sum v_n \text{ cv} \Longrightarrow \sum u_n \text{ cv}$

Equivalence : $u_n \sim_\infty v_n$ ie $\boxed{u_n = v_n\,(1 + \boldsymbol{o}_\infty(1))}$

- Les 2 séries sont de même nature.
- En cas de cv, les restes sont équivalents.
- En cas de dv, les sommes partielles sont équivalentes.

Série de Riemann.

$$\boxed{La\ série\ de\ Riemann \sum \frac{1}{n^\alpha} \quad cv \quad ssi \quad \alpha > 1}$$

Série de Bertrand.

$$\boxed{La\ série\ de\ Bertrand \sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \quad cv \quad ssi \quad \begin{cases} \alpha > 1 \\ ou\ pour\ \alpha = 1\,,si\ \beta > 1 \end{cases}}$$

Règle $n^\alpha u_n$

$\boxed{Si\ \ \exists \boldsymbol{\alpha} > \mathbf{1}\ \ tq\ \ (n^\alpha u_n) \to 0,\ \ alors\ \ \sum u_n\ \ cv}$ Dans ce cas $\boxed{\boldsymbol{u_n} = \boldsymbol{o}_\infty \left(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n^\alpha}}\right)}$

$\boxed{Si\ \ \exists \boldsymbol{\alpha} > \mathbf{1}\ \ tq\ \ (n^\alpha u_n) \to L \neq 0,\ \ alors\ \ \sum u_n\ \ cv}$ Dans ce cas $\boxed{\boldsymbol{u_n} = \sim_\infty \left(\frac{\boldsymbol{L}}{\boldsymbol{n^\alpha}}\right)}$

$\boxed{Si\ \ \exists \boldsymbol{\alpha} \leq \mathbf{1}\ \ tq\ \ (n^\alpha u_n) \to +\infty,\ \ alors\ \ \sum u_n\ \ dv}$ i.e. $\boxed{Pour\ n\ grand,\ \ u_n \geq \frac{1}{n^\alpha}}$

$\boxed{Si\ \ \exists \boldsymbol{\alpha} \leq \mathbf{1}\ \ tq\ \ (n^\alpha u_n) \to L \neq 0,\ \ alors\ \ \sum u_n\ \ dv}$ Dans ce cas $\boxed{\boldsymbol{u_n} = \sim_\infty \left(\frac{\boldsymbol{L}}{\boldsymbol{n^\alpha}}\right)}$

Comparaison avec une intégrale

- Soit $f : [0; +\infty[\to \mathbb{R}$ **positive** et **décroissante**, $\sum f(n)\ \ et\ \ \int_0^{+\infty} f$ sont de même nature.
- Dans le cas où la série converge : $\boxed{\int_1^{+\infty} f \leq \sum_1^\infty f(n)\ \leq f(1) + \int_1^{+\infty} f}$
- Dans le cas où la série converge : $\boxed{\int_{n+1}^{+\infty} f \leq R_n = \sum_{n+1}^\infty f(n)\ \leq \int_n^{+\infty} f}$

Séries à termes dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Règles de Cauchy

Soit $\boxed{L = \limsup\ |u_n|^{\frac{1}{n}}}$ (ie la plus grande des valeurs d'adhérence)

- Si $L < 1,\ \sum u_n\ \ cv$
- Si $L > 1,\ \sum u_n\ \ dv$

Règles de d'Alembert.

Soit $\boxed{L = \limsup \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|}$ (ie la plus grande des valeurs d'adhérence)

- Si $L < 1,\ \sum u_n\ \ cv$
- Si $L > 1,\ \sum u_n\ \ dv$

Théorème : $\boxed{Si\ \ lim\ \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = k\ \in\ \overline{\mathbb{R}}, alors\ \ lim\ |u_n|^{\frac{1}{n}} = k}$

Séries alternées : $\sum(-1)^n u_n$, avec $u_n \geq 0$

Théorème des séries alternées

- $\boxed{\text{Si } (u_n) \textbf{ positive, décroissante vers 0}\text{, alors } \sum(-1)^n u_n \text{ cv.}}$
- Alors
  - Sa somme S est comprise entre S_n et S_{n+1} avec $S_n = \sum_1^n u_k$..
  - S est du signe du premier terme non nul.
  - Le reste $R_n = \sum_{n+1}^{\infty} u_k$ vérifie, $\boxed{|Rn| \leq u_{n+1}}$

Règle d'Abel. Soit (u_n) réelle ou complexe

$$\begin{cases} Sn = \sum_0^n u_k \quad \textit{bornée} \\ (\alpha_n) \ \boldsymbol{positive}, \boldsymbol{décroissante}, de\ \boldsymbol{limite}\ \mathbf{0} \end{cases} \quad \text{alors} \ \sum \alpha_n u_n \ cv$$

Compléments : Convergence commutative et par paquet.

Théorème de sommation par paquets (ou tranches)

1. **Si une série converge**,
   alors toute série obtenue par regroupement de termes consécutifs converge aussi vers la même limite.
2. **Si une série est positive**,
   alors toute série obtenue par regroupement de termes consécutifs est de même nature.
3. **Si une série a son T.G. qui tend vers 0**,
   alors toute série obtenue par regroupement de p (fixé) termes consécutifs est de même nature.

Théorème de convergence commutative

- Définition : Une série est commutativement cv si pour toute permutation σ de ℕ, $\sum u_{\sigma(n)}$ cv
- Théorème : $\boxed{\text{Une série est commutativement cv ssi elle est absolument cv}}$.