Ing 1 — Analyse numérique (2009-2010)
TD 2 — Calcul matriciel (suite)

Exercice 1 a) Déterminer les valeurs propres et le rayon spectral de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2i \\ -4 & 5 & 2i \\ -2i & -2i & -1 \end{pmatrix}$$

b) Déterminer λ telle que $A + \lambda I_n$ soit définie positive.

Exercice 2 On suppose une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, telle que $A^\star = -A^3$.
a) Montrer que A est diagonalisable, moyennant une matrice de passage unitaire.
b) Que peut-on dire des valeurs propres de A ?

Exercice 3 Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, inversible. On cherche à démontrer qu'il existe une matrice unitaire U et une matrice hermitienne H, définie positive telle que $A = UH$.
a) On pose $B = A^\star A$. Montrer que B est une matrice hermitienne définie positive.
b) Montrer qu'il existe une matrice hermitienne définie positive H vérifiant $H^2 = B$.
c) On pose $U = AH^{-1}$. Montrer que U est unitaire.
d) Conclure.
e) La décomposition $A = UH$ est-elle unique ?

Exercice 4 a) Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $A^\star = -A$.
Montrer que A est diagonalisable et que toutes les valeurs propres de A sont imaginaires pures.
b) En déduire que la matrice $U = (I_n + A)(I_n - A)^{-1}$ est bien définie, et que c'est une matrice unitaire.
c) A quelle condition une matrice unitaire U peut-elle être écrite sous la forme $(I_n + A)(I_n - A)^{-1}$ avec $A^\star = -A$?

Exercice 5 Soit la matrice carrée suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Diagonaliser A. On donnera si possible, une matrice de passage unitaire.