TD n°6 : Fourier

Séries de Fourier

Coefficient de Fourier

On considère une fonction f continue par morceaux et T-périodique.

$$\boxed{c_n(f) = \frac{1}{T}\int_T f(t)e^{-in\frac{2\pi}{T}t}\,dt} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

$$\boxed{a_n(f) = \frac{2}{T}\int_{[T]} f(t)\cos\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)\,dt \quad ; \quad b_n(f) = \frac{2}{T}\int_{[T]} f(t)\sin\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)\,dt} \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$a_n = c_n + c_{-n} \quad ; \quad b_n = i(c_n - c_{-n}) \;;\; c_n = \frac{a_n - i\,b_n}{2}$$

<u>**Cas pratique :**</u>

Si f est paire :	**Si f impaire**
$\begin{cases} b_n = 0 \\ a_n(f) = 2\times\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)\,dt \end{cases}$	$\begin{cases} a_n = 0 \\ b_n(f) = 2\times\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\sin\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)\,dt \end{cases}$

Série de Fourier de f

$$\boxed{Sf(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\left(n\frac{2\pi}{T}x\right) + b_n\sin\left(n\frac{2\pi}{T}x\right)}$$

$$\boxed{Sf(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\,e^{in\frac{2\pi}{T}x}}$$

Théorème de Dirichlet (1829)

Soit f définie sur $\mathbb{R}$, $\boldsymbol{C^1}$ **par morceaux** sur $\left]-\frac{T}{2}\,;\frac{T}{2}\right]$ et T-périodique.

$$Pour\ tout\ réel\ x \;:\; \boxed{Sf(x) = \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}}$$

Théorème de Parseval

Soit f définie sur $\mathbb{R}$, **continue par morceaux** sur $\left]-\frac{T}{2}\,;\frac{T}{2}\right]$ et T-périodique.

$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{T}\int_T |f(t)|^2\,dt} \quad ou \quad \boxed{\frac{{a_0}^2}{\boxed{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} {a_n}^2 + {b_n}^2 = \frac{\boxed{2}}{T}\int_T |f(t)|^2\,dt}$$

On écrit aussi :

$$\boxed{\left(\frac{a_0}{\mathbf{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n{}^2 + b_n{}^2\right) = \frac{1}{T}\int_T \ |f(t)|^2\, dt}$$

Exercice 1 :

Soit f 2π-périodique définie par $f(x) = x$ sur $\left]-\pi;\pi\right]$.

1. Montrer que :

$$Sf(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\sin nx}{n}$$

2. **Convergence**.
   a. Montrer que :

$$\forall x \in \ ]-\pi;\pi[\ ; \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\sin nx}{n} = \frac{x}{2}$$

   b. Etudier le cas où $x = \pi$.
3. **Cas particulier**. Montrer que

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \dots\dots$$

4. **Application du Théorème de Parseval :** Montrer que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Exercice 2 :

Soit f 2π-périodique, impaire, définie par : $\begin{cases} f(x) = 1 & \text{sur }]0;\pi[\\ f(n\pi) = 0 & pour\ n \in \mathbb{Z} \end{cases}$

1. Représenter f.
2. Montrer que :

$$\forall x \in \ \mathbb{R},\ \ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n+1)} \sin\big((2n+1)x\big)$$

3. Montrer que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

4. Montrer que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

5. En déduire que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad , \quad et\ que \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$$

Transformée de Fourier

La transformée de Fourier (notée $\mathcal{F}$ ou TF) d'une fonction f donnée est une opération qui transforme une fonction f intégrable sur ℝ en une autre fonction notée $\hat{f}$ *ou* F. $\quad \mathcal{F} : f \longrightarrow \hat{f}\ (\,ou\ F)$

$$\boxed{\hat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{ixt}\ dt}$$

Remarque : Cette définition est celle adoptée par les physiciens, on peut aussi définir $\hat{f}$ sans le facteur $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Il suffit en fait que le produit des constantes dans (1) et (2) fasse 1/2π

Existence : Une condition suffisante d'existence de $\hat{f}$ est que la fonction f soit *absolument intégrable*.

La transformée de Fourier inverse. Soit f une fonction donnée admettant une TF

$$\boxed{\frac{f(x^-) + f(x^+)}{2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t) e^{-ixt}\ dt}$$

Exercice 3 :

Calculer la TF f pour f définie par : $\begin{cases} f(x) = 1 & \text{si } |x| \leq a \\ f(x) = 0 & sinon \end{cases}$

Réponse :

$$Si\ x\ non\ nul, \quad \hat{f}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin ax}{x}, \qquad et\ \ pour\ x = 0\ \ \hat{f}(0) = a\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

Exercice 4 :

1. Montrer que si **f est paire** :

$$\boxed{\hat{f}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(t) \cos xt\ \ dt} \ et\ que\ \boxed{f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \hat{f}(t) \cos xt\ \ dt}$$

2. Montrer que si **f est impaire** :

$$\boxed{\hat{f}(x) = i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(t) \sin xt\ \ dt} \ et\ que\ \boxed{f(x) = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \hat{f}(t) \sin xt\ \ dt}$$

Exercice 5 :

1. Montrer que la TF f pour f définie par : $\begin{cases} f(x) = 1 - x^2 & \text{si } |x| \leq 1 \\ f(x) = 0 & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$ est

$$\hat{f}(x) = \frac{-4x\cos x + 4\sin x}{x^3\sqrt{2\pi}}$$

2. Montrer que :

$$\int_0^{\infty} \frac{x\cos x - \sin x}{x^3} \cos\frac{x}{2}\, dx = -\frac{3\pi}{16}$$

Exercices complémentaires autocorrectifs :

Exercice 6 :

Soit f 2π-périodique, paire, définie par : $\forall\, \boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{0}; \boldsymbol{\pi}], \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$.

1. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}\cos(2n+1)x$$

2. En déduire que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Exercice 7 :

Soit f 2π-périodique, impaire, définie par : $\forall\, \boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{0}; \boldsymbol{\pi}], \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{sin}^2\, \boldsymbol{x}$.

1. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ f(x) = \frac{-8}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}\sin(2n+1)x$$

2. En déduire que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} = \frac{-\pi}{8} \quad et\ que \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2(2n+1)^2(2n+3)^2} = \frac{3\pi^2}{256}$$

Exercice 8 :

1. En utilisant le résultat de l'exercice 3, montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin at \cos xt}{t}\, dt = \begin{cases} \pi & si\ |x| < a \\ \dfrac{\pi}{2} & si\ |x| = a \\ 0 & si\ |x| > a \end{cases}$$

2. En déduire que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}$$