EXERCICE 3

Soit, dans le plan, quatre points A, B, C, D distincts deux à deux.

▶ **1.** *a)* Démontrer que ABCD est un parallélogramme si, et seulement si, D est le barycentre du système {(A, 1) ; (B, − 1) ; (C, 1)}.

b) Déterminer alors l'ensemble E des points M tels que :

$$\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = BD.$$

▶ **2.** Montrer que ABCD est un rectangle si, et seulement si,

$$MA^2 - MB^2 + MC^2 = MD^2.$$

Pour cela, on pourra transformer le premier membre de l'égalité en introduisant le barycentre D.

▶ **3.** Déterminer alors l'ensemble des points M du plan tels que :

$$MA^2 - MB^2 + MC^2 = BD^2.$$

46 NOUVELLE-CALÉDONIE — 5 POINTS

NOVEMBRE 2001 • SÉRIE S

Partie I

L'espace (E) est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Les points A, B, C et D ont pour coordonnées respectives :

$$(-1 ; 0 ; 2), (3 ; 2 ; -4), (1 ; -4 ; 2), (5 ; -2 ; 4).$$

On considère les points I, J et K définis par : I milieu du segment [AB], K milieu du segment [CD] et $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$.

▶ **1.** Déterminer les coordonnées des points I, J et K. (0,75 POINT)

▶ **2.** *a)* Montrer que les points I, J et K ne sont pas alignés. (0,25 POINT)

b) Montrer qu'une équation cartésienne du plan (IJK) est :

$$8x + 9y + 5z - 12 = 0. \text{ (0,75 POINT)}$$

c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AD) et montrer que le plan (IJK) et la droite (AD) sont sécants en un point L dont on déterminera les coordonnées. (1 POINT)

d) Montrer que $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$. (0,25 POINT)

Partie II

Plus généralement, dans l'espace (E), on considère un tétraèdre ABCD ainsi que les points I, J, K et L définis par I milieu du segment [AB], K milieu du segment [CD],

$$\overrightarrow{AL} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} \text{ et } \overrightarrow{BJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}.$$

Soit G le barycentre de {(A, 3) ; (B, 3) ; (C, 1) ; (D, 1)}.

▶ **1.** Déterminer le barycentre de {(A, 3) ; (D, 1)} et le barycentre de {(B, 3) ; (C, 1)}. (0,5 + 0,5 POINT)

▶ **2.** En associant les points A, B, C et D de deux façons différentes, montrer que G appartient aux droites (IK) et (JL). En déduire que les points I, J, K et L sont coplanaires. (1 POINT)

47 FRANCE MÉTROPOLITAINE — 6 POINTS

JUIN 2001 • SÉRIE S

Soient trois points de l'espace A, B, C non alignés et soit k un réel de l'intervalle [− 1 ; 1].

On note G_k le barycentre du système $\{(A, k^2 + 1), (B, k), (C, -k)\}$.

▶ **1.** Représenter les points A, B, C, le milieu I de [BC] et construire les points G_1 et G_{-1}. (1 POINT)

▶ **2.** *a)* Montrer que, pour tout réel k de l'intervalle [− 1 ; 1], on a l'égalité :

$$\overrightarrow{AG_k} = \frac{-k}{k^2+1}\overrightarrow{BC}. \text{ (0,5 POINT)}$$

b) Établir le tableau de variation de la fonction f définie sur [− 1 ; 1] par

$$f(x) = -\frac{x}{x^2+1}. \text{ (0,5 POINT)}$$

c) En déduire l'ensemble des points G_k quand k décrit l'intervalle [− 1 ; 1]. (0,5 POINT)

Pour la suite de l'exercice, aucune figure n'est demandée sur la copie.

▶ **3.** Déterminer l'ensemble (E) des points M de l'espace tels que :

$$\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|. \text{ (1 POINT)}$$

▶ **4.** Déterminer l'ensemble (F) des points M de l'espace tels que :

$$\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\|. \text{ (1 POINT)}$$

▶ **5.** L'espace est maintenant rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Les points A, B, C ont pour coordonnées respectives (0 ; 0 ; 2), (− 1 ; 2 ; 1) et (− 1 ; 2 ; 5). Le point G_k et les ensembles (E) et (F) sont définis comme ci-dessus.

a) Calculer les coordonnées de G_1 et G_{-1}.

Montrer que les ensembles (E) et (F) sont sécants. (1 POINT)

b) Calculer le rayon du cercle $\mathscr{C}$ intersection de (E) et (F). (0,5 POINT)