

**SESSION 2006****MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES ET INFORMATIQUE****SUJET DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES**

Durée : 2 heures

Coefficient : 0,5

**Matériel autorisé :**

Une calculatrice de poche à fonctionnement autonome, sans imprimante, et sans aucun moyen de transmission, à l'exclusion de tout autre élément matériel ou documentaire (circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999 ; BOEN n° 42).

Aucun document.

**Document remis au candidat :**

Le sujet comporte 7 pages numérotées de 1/7 à 7/7.

**Document à rendre avec la copie :**

Annexe 3, page 7/7.

**Il vous est demandé de vérifier que le sujet est complet dès sa mise à votre disposition.**

**Barème indicatif :**

Exercice 1 : 4 points

Exercice 2 : 10 points

Exercice 3 : 6 points

**AVERTISSEMENT**

Si le texte du sujet, de ses questions ou de ses annexes, vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner **explicitement** dans votre copie.

## **EXERCICE 1 : ANALYSE DE DONNÉES.**

Une analyse de données économiques françaises a été effectuée pour chacune des années 1987 à 2001, concernant les sept variables ci-dessous, toutes exprimées en centièmes :

- Taux d'évolution du produit intérieur brut (en volume)	notée	PIB
- Taux d'évolution de l'investissement industriel	notée	INV
- Taux d'évolution de la consommation des ménages	notée	CONS
- Taux d'évolution des prix à la consommation	notée	PRIX
- Taux d'évolution du pouvoir d'achat du revenu des ménages	notée	ACHAT
- Taux d'épargne des ménages	notée	EPAR
- Taux d'intérêts courts (à 3 mois)	notée	TIC

Tous ces taux sont annuels et expriment la variation relative de la variable concernée par rapport à l'année précédente.

Par exemple, en 1988, la variable PIB vaut 2,5 ce qui signifie une augmentation de 2,5 % par rapport à 1987 (Source : "Le Monde" : Bilan du monde 2002 - 28<sup>ème</sup> année, Édition 2003).

Sur ces données, une ACP (Analyse en Composantes Principales) normée a été effectuée.

L'annexe 1 donne le nuage des 15 individus (les années 1987 à 2001) dans le plan principal, et le cercle des corrélations entre les 7 variables.

### **Travail à faire :**

- 1) La projection des quinze années dans le plan principal est-elle satisfaisante ? Justifier la réponse.
- 2) Interpréter la proximité des quatre variables INV, ACHAT, PIB, CONS dans le cercle des corrélations.
- 3) Interpréter les positions relatives des deux variables EPAR et PRIX, ainsi que celles des deux variables TIC et INV.
- 4) À partir des données fournies en annexe 1 :
  - a) Que peut-on dire de l'année 1995 ? Justifier la réponse.
  - b) Peut-on dire que le pouvoir d'achat a augmenté en 1989 ? Justifier la réponse.

## EXERCICE 2 : PROBABILITÉS.

Les calculs relatifs à la loi normale doivent être détaillés et effectués en utilisant la table fournie.

Des billes sont produites en grande série, dans le but de fabriquer des roulements à billes constitués chacun de 15 billes. Les 15 billes d'un roulement doivent être toutes sans défaut.

Chaque bille produite peut avoir deux sortes de défaut :

- défaut de diamètre, lorsque le diamètre est inférieur à **15,98** mm ou supérieur à **16,02** mm ;
- défaut de surface, lorsque la surface de la bille présente des micro cavités.

Pour une bille choisie au hasard, on note :

- D** l'événement : "la bille présente le défaut de diamètre" ;
- S** l'événement : "la bille présente le défaut de surface".

1) Le diamètre d'une bille choisie au hasard, exprimé en millimètres, est une variable aléatoire  $X$  qui suit une loi normale d'espérance mathématique 16 et d'écart type  $\sigma$ .

### Travail à faire :

- a) Si  $\sigma = 0,01$  quel est à  $10^{-2}$  près, le pourcentage de billes ayant le défaut de diamètre ?
- b) Que doit valoir  $\sigma$ , à  $10^{-4}$  près, si on veut que 2,5 % seulement des billes aient le défaut de diamètre ?

2) On suppose dans cette question que 2,5 % des billes ont le défaut de diamètre [ $P(D) = 0,025$ ], que 1,6 % des billes ont le défaut de surface [ $P(S) = 0,016$ ], et que les événements D et S sont indépendants.

### Travail à faire :

On choisit une bille au hasard.

- a) Calculer à  $10^{-4}$  près, la probabilité de l'événement E : "La bille présente les deux défauts".
- b) Calculer à  $10^{-4}$  près, la probabilité de l'événement F : "La bille présente au moins un des deux défauts".

3) On suppose que 4 % des billes sont défectueuses. Les billes sont conditionnées en lot de  $n$  billes. On désigne par  $Y$  le nombre de billes défectueuses parmi les  $n$  billes d'un lot, et on suppose que la variable aléatoire  $Y$  suit la loi binomiale de paramètres  $n$  et 0,04.

### Travail à faire :

- a) Si  $n = 100$ , on admet que la loi de  $Y$  peut être approchée par une loi de Poisson. En utilisant cette approximation, calculer à  $10^{-3}$  près, la probabilité qu'il soit possible de faire 6 roulements avec les 100 billes d'un lot.
- b) Si  $n = 1000$ , on admet que la loi de  $Y$  peut être approchée par une loi normale. En utilisant cette approximation, calculer à  $10^{-2}$  près, la probabilité qu'il soit possible de faire au moins 65 roulements avec les 1000 billes d'un lot.

4) Un nouvel abrasif ultra fin est essayé dans la phase finale de fabrication des billes, dans le but de diminuer le pourcentage de billes ayant un défaut de surface, l'ancien pourcentage (1,6 %) étant jugé excessif.

Pour cela, on a testé le nouvel abrasif sur un échantillon aléatoire non exhaustif de 630 billes.

On y a trouvé 7 billes présentant le défaut de surface.

### Travail à faire :

À l'aide d'un test d'hypothèse au niveau  $\alpha = 0,04$ , et des résultats de l'échantillon, décider si le nouvel abrasif diminue ou non la proportion de billes ayant le défaut de surface.

On notera  $p$  la proportion de billes ayant le défaut de surface avec le nouvel abrasif (sur l'ensemble de toutes les billes produites).

### EXERCICE 3 : GRAPHES.

Un projet a été décomposé en 8 tâches A, B, C, D, E, F, G, H dont les durées connues (sauf pour G) et les contraintes d'antériorité sont précisées dans le tableau ci-dessous :

Tâches	A	B	C	D	E	F	G	H
Durées (en jours)	26	25	40	17	8	14	X	4
Tâches antérieures	-	-	-	A	A, B	B	E, F	C, F

Les graphes MPM et PERT sont donnés en **annexe 3** (à rendre avec la copie)

Le candidat utilisera au choix l'un des deux graphes.

### Travail à faire :

1) Indiquer, sur le graphe choisi, les dates de début au plus tôt des tâches D, E, F, G et H.

2) Déterminer la durée minimale d'exécution du projet et le chemin critique dans chacun des cas suivants :

Hypothèse 1 :  $X = 4$  ;

Hypothèse 2 :  $X = 6$  ;

Hypothèse 3 :  $X = 9$ .

3) On estime que les trois hypothèses précédentes ont les probabilités respectives :

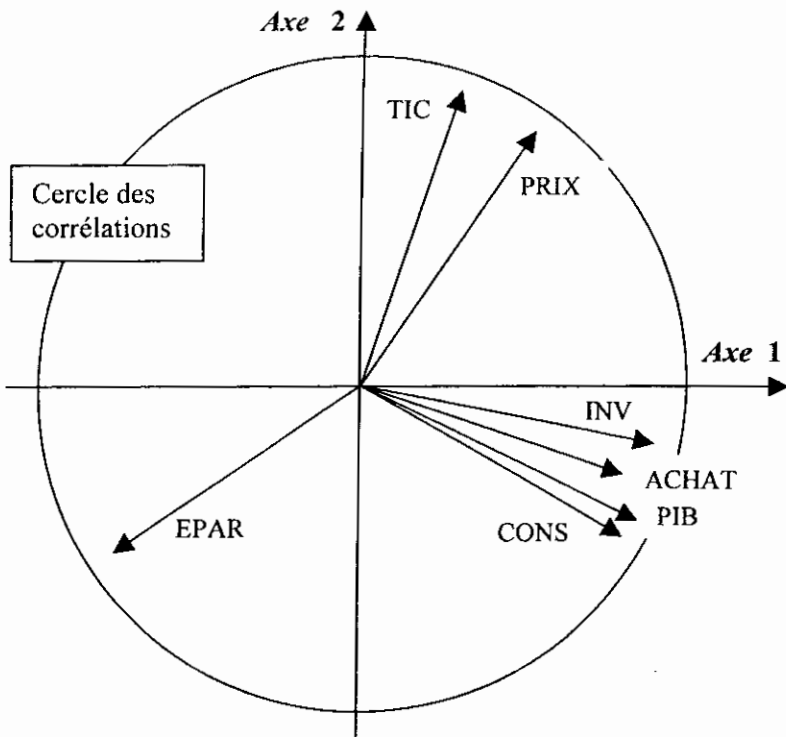
$$p_4 = P(X = 4) = 0,3 ;$$

$$p_6 = P(X = 6) = 0,6 ;$$

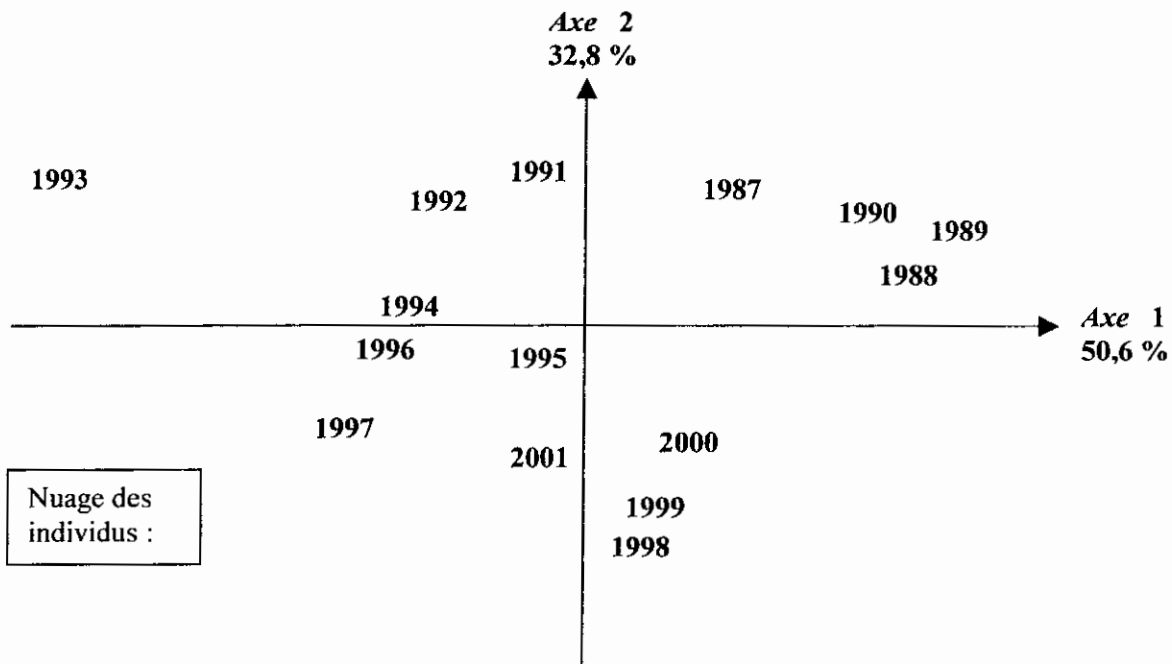
$$p_9 = P(X = 9) = 0,1.$$

Calculer l'espérance mathématique de la durée minimale d'exécution du projet.

## ANNEXE 1



Variable	AXE 1	AXE 2
PIB	21	-6
INV	22	-2
CONS	19	-7
PRIX	8	29
EPAR	-13	-16
ACHAT	16	-4
TIC	2	36



### QUALITÉS DE LA REPRÉSENTATION

1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
0,61	0,90	0,98	0,87	0,91	0,69	0,98	0,62	0,09	0,58	0,83	0,91	0,95	0,93	0,64

## ANNEXE 2

EXTRAITS DE LA TABLE DE LA FONCTION DE RÉPARTITION  
DE LA LOI NORMALE CENTRÉE, RÉDUITE  $N(0, 1)$  :

$$\Pi(t) = P(T \leq t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx$$

<i>t</i>	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9779	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

Nota :  $\Pi(-t) = 1 - \Pi(t)$

EXTRAITS DE LA TABLE DE LA LOI DE POISSON CUMULÉE DE PARAMÈTRE  $\lambda$  :

$$F(k) = P(X \leq k)$$

	$\lambda=1$	$\lambda=2$	$\lambda=3$	$\lambda=4$	$\lambda=5$	$\lambda=6$	$\lambda=7$
<b>k</b>							
0	0,3679	0,1353	0,0498	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009
1	0,7358	0,4060	0,1991	0,0916	0,0404	0,0174	0,0073
2	0,9197	0,6767	0,4232	0,2381	0,1247	0,0620	0,0296
3	0,9810	0,8571	0,6472	0,4335	0,2650	0,1512	0,0818
4	0,9963	0,9473	0,8153	0,6288	0,4405	0,2851	0,1730
5	0,9994	0,9834	0,9161	0,7851	0,6160	0,4457	0,3007
6	0,9999	0,9955	0,9665	0,8893	0,7622	0,6063	0,4497
7	1	0,9989	0,9881	0,9489	0,8666	0,7440	0,5987
8		0,9998	0,9962	0,9786	0,9319	0,8472	0,7291
9		1	0,9989	0,9919	0,9682	0,9161	0,8305
10			0,9997	0,9972	0,9863	0,9574	0,9015
11			0,9999	0,9991	0,9945	0,9799	0,9467
12			1	0,9997	0,9980	0,9912	0,9730
13				0,9999	0,9993	0,9964	0,9872
14				1	0,9998	0,9986	0,9943
15					0,9999	0,9995	0,9976
16					1	0,9998	0,9990
17						0,9999	0,9996
18						1	0,9999
19							1

Examen ou concours : ..... Série\* : .....

Spécialité/Option : .....

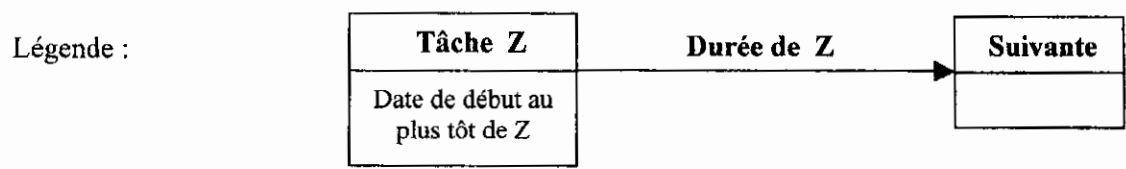
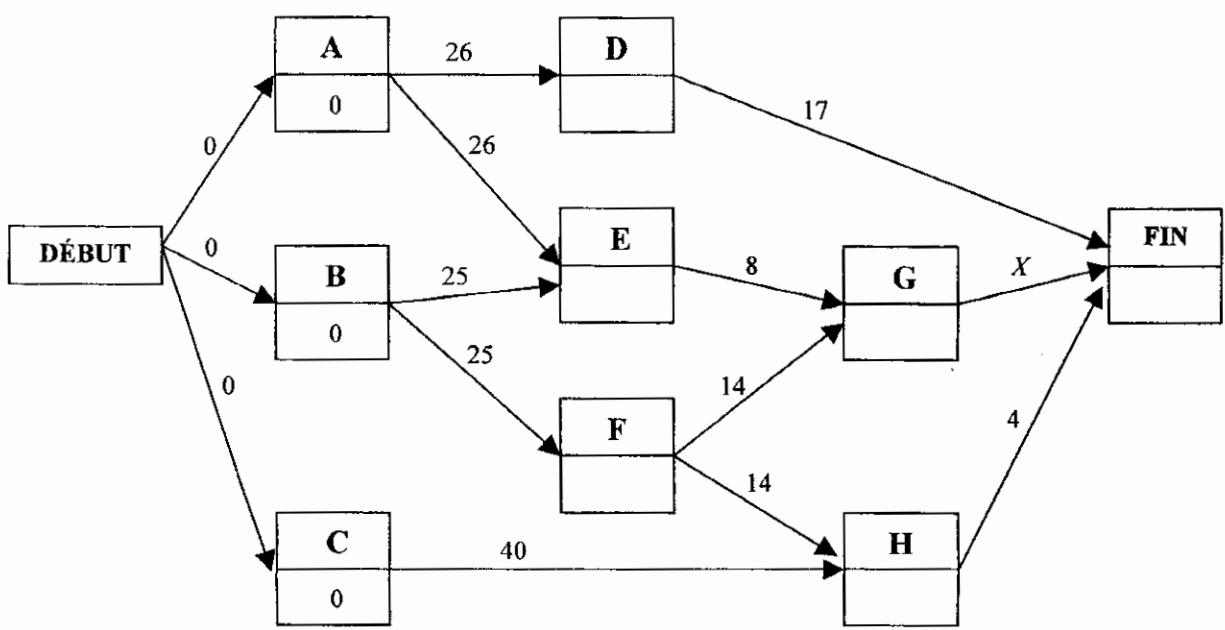
Repère de l'épreuve : .....

Épreuve/sous-épreuve : .....  
 (Préciser, suivi s'il y a lieu, le sujet choisi)

Numérotez chaque page (dans le cadre en bas de la page) et placez les feuilles intercalaires dans le bon sens.

**ANNEXE 3 (À RENDRE AVEC LA COPIE.)**

**Graphe MPM de l'exercice 3 :**



**Graphe PERT de l'exercice 3 :**

