

510 003



SESSION 2005

**MÉTHODES QUANTITATIVES**

1/4

**SUJET DE MATHÉMATIQUES**

Durée : 2 heures

Coefficient : 0,5

**Documents autorisés :**

Une calculatrice de poche à fonctionnement autonome, sans imprimante, et sans aucun moyen de transmission, à l'exclusion de tout autre élément matériel ou documentaire (circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999 ; BOEN n° 42).

**Document remis au candidat :**

Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1 à 4.

**Il vous est demandé de vérifier que le sujet est complet dès sa mise à votre disposition.**

**Barème indicatif :**

**Exercice 1**

Partie A 2.25 points  
Partie B 5.75 points

**Exercice 2**

Partie A 4 points  
Partie B 2.5 points  
Partie C 5.5 points

**AVERTISSEMENT**

Si, lors de la lecture de ses questions ou de ses annexes, vous constatez formuler une ou plusieurs erreurs, vous devez vous en rendre compte et vous est demandé de le (ou les) mentionner explicitement dans votre copie.

## EXERCICE 1

2/4

*Nota : La valeur des taux d'intérêts sera exprimée en % arrondi à 2 décimales pour tout l'exercice 1.*

### **Partie A**

Souhaitant s'offrir un voyage pendant ses prochaines vacances, Antonin place chaque mois la somme de 110 € à partir du 1<sup>er</sup> septembre de l'année N jusqu'au 1<sup>er</sup> avril de l'année N+1 inclus. Le taux annuel de rémunération est de 3,5 % à intérêts composés.

- 1. Calculer le taux mensuel équivalent.**
- 2. Quelle est la valeur acquise au 1<sup>er</sup> avril de l'année N+1 ?**
- 3. Antonin laisse cette somme sur son compte rémunéré (sans effectuer de nouveau versement) jusqu'au 1<sup>er</sup> juillet de l'année N+1, date de son départ. De quel montant dispose-t-il alors ?**

### **Partie B**

Antonin pratique régulièrement le VTT. Il souhaite acquérir un nouveau vélo. Il a sélectionné un modèle à 1 200 €. Deux formules de crédit lui sont proposées : l'une par le vendeur, l'autre par le banquier.

**B1. Modalités du crédit proposé par le vendeur :**

- 10 mensualités de 129,43 € chacune
- 1<sup>ère</sup> mensualité, un mois après l'achat

- 1. Quel est le coût total de ce crédit ?**
- 2. Calculer le taux mensuel puis le taux annuel équivalent, correspondant à ce crédit.**

**B2. Modalités du crédit proposé par le banquier :**

- prêt de 1 200 € au taux annuel de 15 %
- remboursable en 10 mensualités, la 1<sup>ère</sup> un mois après la mise à disposition des fonds, correspondant à la date d'achat

- 1. Calculer le montant de chaque mensualité (arrondi à 2 décimales), sachant que le taux annuel annoncé est proportionnel au taux mensuel utilisé.**

La banque ajoute aux mensualités calculées précédemment :

- des frais de dossier égaux à 1 % du montant emprunté et payables lors de la 1<sup>ère</sup> mensualité ;
- des frais d'assurance égaux à 0,7 € et payés à chaque mensualité.

3/4

2. Ecrire l'équation permettant de trouver le taux réel mensuel de ce crédit bancaire en tenant compte des frais ci-dessus. Vérifier que ce taux mensuel est égal à 1,538 %.
3. Quelle est la proposition de crédit la plus intéressante pour Antonin ?

### EXERCICE 2

#### Partie A

Une association propose à ses adhérents des stages de formation en informatique depuis 1998. Le tableau suivant indique l'évolution du nombre de participants à ces stages, entre les années 1998 et 2003.

|  |      |      |      |      |      |      |
|--|------|------|------|------|------|------|
| Année  | 1998 | 1999 | 2000 | 2001 | 2002 | 2003 |
| Rang de l'année : $x_i$                              | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    |
| Nombre de participants, exprimé en centaines : $z_i$ | 0,3  | 0,7  | 1,2  | 1,91 | 3,6  | 7,39 |

1. Le nuage des points  $M_i (x_i ; z_i)$  est représenté en *annexe*. Un ajustement affine est-il envisageable ? Justifier.
2. On pose  $y_i = \ln z_i$ . Présenter dans un tableau les valeurs  $y_i$  arrondies au centième.
3. Représenter l'ensemble des points  $P_i (x_i ; y_i)$  dans un repère orthogonal. On prendra 2 cm pour une année sur l'axe des abscisses et 2 cm pour une centaine de participants sur l'axe des ordonnées.
4. Déterminer une équation de la droite d'ajustement de  $y$  en  $x$  par la méthode des moindres carrés (le détail des calculs n'est pas exigé et les coefficients seront arrondis à deux décimales).  
En déduire une expression de  $z$  en fonction de  $x$  sous la forme  $z = ke^{ax}$  avec  $k$  et  $a$  arrondis à deux décimales.
5. Utiliser cette relation pour calculer le nombre de participants aux stages, arrondi à l'unité près, prévisible en 2005.

#### Partie B

Devant le nombre croissant de participants aux stages, l'association a acheté au début de l'année 2003 des ordinateurs supplémentaires pour un montant de 10 000 €. Elle estime que la valeur du matériel informatique diminue de 20 % par an. On note  $u_n$  la valeur, en milliers d'euros, du matériel informatique au bout de  $n$  années.

1. Démontrer que la suite  $(u_n)$  est géométrique. Préciser la raison et le premier terme de la suite.
2. En déduire que, pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$ ,  $u_n = 10(0,8)^n$ .
3. Au bout de combien d'années, la valeur de ce matériel est-elle strictement inférieure à 4 200 € ?

### Partie C

4/4

On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0, +\infty[$  par  $f(t) = 10(0,8)^t$

1. a. En remarquant que  $f(t) = 10e^{t \ln(0,8)}$ , étudier les variations de  $f$  sur  $[0, +\infty[$ .
- b. Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$  et interpréter le résultat.

On pose  $F(t) = \frac{10(0,8)^t}{\ln(0,8)}$

2. a. Démontrer que  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $[0, +\infty[$
- b. La valeur moyenne du matériel acquis en 2003 sur cinq années d'utilisation est

$$I = \frac{1}{5} \times [F(5) - F(0)].$$

- c. Calculer la valeur exacte de  $I$  et en déduire, arrondie à un euro près, la valeur moyenne de l'équipement informatique sur cinq années d'utilisation.

### Annexe

Nuage des points  $M_i (x_i ; z_i)$

