610 003

DPECF

SESSION 2006

MÉTHODES QUANTITATIVES

SUJET DE MATHÉMATIQUES

Durée : 2 heures — Coefficient : 0,5

Documents autorisés :

Une calculatrice de poche à fonctionnement autonome, sans imprimante, et sans aucun moyen de transmission, à l'exclusion de tout autre élément matériel ou documentaire (circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999 ; BOEN n° 42).

Document remis au candidat :

Le sujet comporte 3 pages numérotées de 1/3 à 3/3.

Il vous est demandé de vérifier que le sujet est complet dès sa mise à votre disposition.

Barème indicatif :

Partie A : 3 points

Partie B : 5 points

Partie C : 5 points

Partie D : 7 points

AVERTISSEMENT

Si le texte du sujet, de ses questions ou de ses annexes, vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner **explicitement** dans votre copie.

Les quatre parties du problème sont indépendantes.

PARTIE A (3 points)

On a relevé sur dix semaines, numérotées de $t=1$ à $t=10$, la fréquence d'utilisation d'un nouveau type de matériel dans une chaîne de magasins franchisés. Les résultats figurent dans le tableau suivant :

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	0,03	0,05	0,1	0,15	0,2	0,3	0,4	0,55	0,65	0,75

1. Représenter dans un repère orthogonal du plan le nuage de points.
   (On prendra pour unités graphiques 1 cm pour une semaine en abscisses et 10 cm pour 1 en ordonnées).
2. À la calculatrice, déterminer une équation de la droite de régression de y en t ainsi que le coefficient de corrélation linéaire de cette série statistique.
   (Les résultats seront arrondis à 10^{-4} près).
3. Si la tendance constatée se poursuit, quelle sera, à 1 % près, la fréquence d'utilisation de ce type de matériel la 13$^{\text{ème}}$ semaine ? la 15$^{\text{ème}}$ semaine ?
   Quelle remarque pouvez-vous faire ?

PARTIE B (5 points)

On considère la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(t)=\dfrac{1}{1+50e^{-0,5t}}$

et on désigne par C sa représentation graphique dans le repère du plan de la partie A.

1. Calculer $f'(t)$ et en déduire le sens de variation de f.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$. Que peut-on en déduire pour la courbe C de f.
3. Tracer C dans le repère de la partie A.
4. On admet que C est une bonne approximation du nuage de points précédent.
   a. Déterminer une estimation de la fréquence d'utilisation de ce nouveau matériel la 13$^{\text{ème}}$ semaine et la 15$^{\text{ème}}$ semaine.
   b. Déterminer par le calcul à partir de quelle semaine la fréquence d'utilisation de nouveau matériel sera supérieure à 99 %.

PARTIE C (5 points)

Lors d'une étude sur la clientèle de cette chaîne de magasins on a constaté que 90 % des clients ayant fréquenté ces magasins une semaine donnée reviennent la semaine suivante auxquels s'ajoutent 800 nouveaux clients.

On désigne par (C_n) le nombre de clients fréquentant ces magasins la semaine n et on donne $C_0 = 5\,000$.

1. Calculer C_1 et C_2.

2. Exprimer C_{n+1} en fonction de C_n.

3. On définit la suite (U_n) par $U_n = C_n - 8\,000$.
   a. Démontrer que (U_n) est une suite géométrique.
   b. Exprimer U_n puis C_n en fonction de n.
   c. Déterminer la limite de cette suite et indiquer quelle conséquence vous en déduisez pour le nombre de clients de cette chaîne.

PARTIE D (7 points)

Pour favoriser son développement cette chaîne de magasins émet un emprunt de type obligataire aux conditions suivantes :

- Nombre de titres émis : 5 000
- Durée : 10 ans
- Nominal de l'obligation : 500 €
- Prix de souscription : 495 €
- Remboursement au pair
- Taux nominal annuel : 5 %
- Amortissement au moyen d'annuités sensiblement constantes.

1. Calculer l'annuité théorique de remboursement.

2. Présenter les deux premières et les deux dernières lignes du tableau d'amortissement. On arrondira le nombre d'obligations amorties chaque année à l'entier le plus proche.

3. Calculer le taux de rendement de cet emprunt.

4. Calculer le taux de revient de cet emprunt pour la chaîne sachant que les frais d'émission s'élèvent à deux pour mille du nominal.