

Diagonalisation.

Polynôme caractéristique.

Définition : Soit $A \in M_n(K)$. On appelle polynôme caractéristique de A :

$$\chi_A : X \rightarrow \chi_A(X) = \det(A - X.Id_n)$$

Propriété :
$$\chi_A = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1} . tr A . X^{n-1} + \dots + \det A$$

Éléments propres.

Définitions :

- λ valeur propre de A : $\exists X \in M_{n,1}(K)$ tel que ($X \neq 0$ et $AX = \lambda X$)
- X vecteur propre de A : $X \neq 0$ et ($\exists \lambda \in K$ telle que $AX = \lambda X$)
- Spectre de A = ensemble des valeurs propres de A
- Sous-espace propre pour A associé à la vp λ de A :
$$SEP(A, \lambda) = Ker (A - \lambda . Id_n)$$

Proposition :

- $\lambda \in Sp_K(A) \Leftrightarrow Ker (A - \lambda . Id_n) \neq \{0\} \Leftrightarrow (A - \lambda . Id_n)$ non inversible
- $\lambda \in Sp_K(f) \Leftrightarrow Ker (f - \lambda . e) \neq \{0\} \Leftrightarrow (A - \lambda . e)$ non injectif
- $Sp_K(A) = \chi_A^{-1}(0)$

Propriétés des SEP.

- Ordre de multiplicité de λ , vp de A : ordre de multiplicité ω de λ en tant que zéro du polynôme caractéristique χ_A .
- Si ω est l'ordre de multiplicité de la vp λ de A : $1 \leq \dim[SEP(A, \lambda)] \leq \omega$

Diagonalisation.

Définition :

$A \in M_n(K)$ diagonalisable ssi il existe une matrice diagonale $D \in M_n(K)$ telle A soit semblable à D.

$$\exists P \in GL_n(K), \exists D \in D_n(K) \text{ telle que } A = PDP^{-1}$$

Proposition : les propriétés sont 2 à 2 équivalentes :

1. **A diagonalisable.**
2. Il existe une base de E formée des \overrightarrow{vp} pour A.
3. La somme des SEP pour A est égale $E = K^n$
4. La somme des dimensions des SEP pour A est égale à $n = \dim(E)$.

Théorème : CNS de diagonalisabilité

| | |
|-------------------------------|---|
| A diagonalisable ssi : | $\left\{ \begin{array}{l} \chi_A \text{ est scindé sur } K \\ \text{Pour chaque } vp, \dim[SEP(A, \lambda)] = \omega \end{array} \right.$ |
|-------------------------------|---|

χ_A est scindé sur K signifie que χ_A s'écrit comme un produit de monômes à coeff. dans K.

Théorème : CS de diagonalisabilité

| |
|---|
| Si $A \in M_n(K)$ admet $n = \dim(E)$ vp 2 à 2 distincts alors, A est diagonalisable. |
|---|