Espaces EUCLIDIENS.

Espace euclidien : e.v.de dimension finie muni d'un p.s.

Propriété : Tout ev euclidien admet au moins une BON.

Produit scalaire dans E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.

On appelle *produit scalaire* sur E toute application φ : E² → $\mathbb{R}$ telle que : pour tout vecteurs x, y et y' de E et k un réel.

a) φ est *symétrique* : $\varphi\,(x,y) = \varphi\,(y,x)$
b) φ est *linéaire par rapport à la 2ème variable* : $\varphi\,(x,ky+y') = k.\varphi\,(x,y) + \varphi\,(x,y')$
c) φ est *positive* : $\varphi\,(x,x) \geq 0$
d) φ est *définie* : $\varphi\,(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

On dit qu'un produit scalaire sur un $\mathbb{R}$-ev est une forme bilinéaire, symétrique et définie positive.

On note souvent : $\varphi\,(x,y) = (\,x \mid y\,) = < x\,,y > = < x \mid y > = x\,.y$
On définie alors la *norme du vecteur x* : $\|x\| = \sqrt{\varphi\,(x,x)}$
Et de même la *forme quadratique associée au ps φ* par : $\Phi(x) = \varphi\,(x,x)$

Inégalité de Cauchy-Schwarz. $\boxed{|< X,Y >| \leq \|X\|.\|Y\|}$

Avec égalité ssi les vecteurs sont colinéaires.

Expression du produit scalaire.

- Base qcq : $< X,Y > = \sum_{i,j} x_i\, y_j < e_i, e_j >$
- B.O.N : $\boxed{< X,Y > = \sum_i x_i\, y_i = {}^tXY}$

Matrice orthogonale : P telle que ${}^tPP = Id$

Les vecteurs d'une matrice orthogonale forment une BON pour le p.s. standard.

Orthogonal d'une partie F de E (ev euclidien).

$$\boxed{F^\perp = \{X \in E \text{ tels que } \forall f \in F, < X,f > = 0\}}$$

Propriétés :

- $F^\perp$ est un sev de E.
- Si F est un sev de E, $F^\perp$ est un supplémentaire de F dans E.
- $\dim F^\perp = \dim E - \dim F$

Projection orthogonale sur un sev. E euclidien et F sev de E, x dans E

- p(x) : projeté de x sur F parallèlement à $F^\perp$ est l'unique vecteur de F tq le vecteur x-p(x) soit orthogonal à F.
- p(x) réalise le minimum de la distance de x à F i.e. : $\boxed{\forall f \in F,\ \ \|x-p(x)\| \leq \|x-f\|}$
- Si $(e_1, .., e_p)$ BON de F, alors :

$$\boxed{p(x) = \sum_{k=1}^{p} < x, e_k > \ e_k}$$

Symétrie orthogonale par rapport à un sev F de E euclidien.

$$\boxed{s(x) = 2p(x) - x}$$

Algorithme de Gram-Schmidt : Pour obtenir une BON à partir d'une base qcq.

Soit $(e_1, .., e_n)$ base qcq de E euclidien.

- $w_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$
- Pour k de 2 à n, on calcule
  - $\boxed{y_k = e_k - \sum_{j=1}^{k-1} < e_k, w_j > \ w_j}$
  - Puis $\boxed{w_k = \frac{y_k}{\|y_k\|}}$

La base orthonormée est celle des $(w_1, .., w_n)$

Endomorphismes symétriques.

f symétrique ssi : $\boxed{\forall (x,y) \in E^2, < f(x), y > = < x, f(y) >}$

La matrice de f dans une BON est symétrique

Théorèmes

- Les SEP pour f symétrique sont orthogonaux entre eux.
- Soit f symétrique, alors pour tout sev F stable par f, $F^\perp$ stable par f.

Théorème fondamentale.

Soit f symétrique, il existe une BON de E dans laquelle la matrice de f est diagonale.