Isométries.

E ev euclidien et f endomorphisme de E avec $A = Mat_{(e_1,..,e_n)}(f)$

- f isométrie ssi $\|f(X)\| = \|X\|$
- **<u>Théorème</u>** : Les 4 propriétés sont équivalentes.
  1. f est une isométrie.
  2. f conserve le ps.
  3. f transforme une BON en une BON.
  4. A est orthogonale, ${}^tAA = Id$
- **<u>Théorème.</u>**
  - $\det(f) = \mp 1$
  - Les vp de f sont de modules 1

Isométries de $\mathbb{R}^2$.

- Si **det f = 1** f isométrie directe
  - f est une rotation
  - A non diagonalisable et non symétrique.

$$A = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} : \text{rotation}$$

- Si **det f= -1** f isométrie indirecte
  - f est une symétrie orthogonale / $\vec{D}$
  - A diagonalisable et symétrique.
  - **$\vec{D}$ droite vectorielle d'angle polaire** $\frac{t}{2}$

$$A = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix} : \text{symétrie orthogonale } / \vec{D}$$

On exclu les cas triviaux ou A = id et A=-id (f symétrie par rapport à l'origine)

Isométries de $\mathbb{R}^3$.

Théorèmes

- Toute isométrie de $\mathbb{R}^3$ admet au moins une vp réelle λ (1 ou -1).
- Soit F = SEP(A , λ réelle), $F^{\perp}$ stable par f et la restriction de f à $F^{\perp}$ est encore une isométrie

- $\boxed{Si\ \boldsymbol{det\,f}\ =\ \mathbf{1}}$ f isométrie directe (donc rotation)

f est une **rotation par rapport à une droite vectorielle $\vec{\boldsymbol{D}}$.**

  - $\vec{\boldsymbol{D}}$ est l'ensemble des invariants de f , déterminée par résolution de AX=X
  - **L'angle t** est déterminé par :
    - $tr(A) = 1 + 2cos\ t$
    - sin t est du signe du produit mixte $[x, f(x), u] = \det_{(i,j,k)}\ (x, f(x), u)$ pour x non colinéaire à u , et u le vecteur normé dirigeant et orientant l'axe $\vec{D}$

$$Mat_{(u,v,w)}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix} : \text{rotation}$$

$$pour\ u,v,w\ normés, \vec{\boldsymbol{D}} = \boldsymbol{vect}(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{v}\ \perp \boldsymbol{u}\ et w = u \wedge v$$

- $\boxed{Si\ \boldsymbol{det\,f}\ =\ \mathbf{-1}}$ f iso. ind. (réflexion/plan ou composée ($symétrie\ o\ rotation$))
  - <u>**Si A symétrique**</u> : f est une **symétrie orthogonale / plan $\vec{\boldsymbol{P}}$**
    - det A= - 1 et A≠-Id donc f réflexion /P
    - $\vec{\boldsymbol{P}}$ est l'ensemble des invariants de f , dét. par résolution de $\boxed{AX\ = X}$

$$Mat_{(u,v,w)}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} : \text{symétrie}$$

$$pour\ u,v,w\ normés, \vec{\boldsymbol{P}} = \boldsymbol{vect}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}), \boldsymbol{w}\ \perp\ \vec{\boldsymbol{P}}$$

  - <u>**Si A non symétrique**</u> :
    f est la **composée commutative d'une rotation $\boldsymbol{Rot}(\vec{\boldsymbol{D}}, \boldsymbol{t})$ et d'une réflexion $\boldsymbol{Ref}(\vec{\boldsymbol{P}})$ avec $\vec{\boldsymbol{P}}\ \perp \vec{\boldsymbol{D}}$**
    - $\vec{\boldsymbol{D}}$ est caractérisé par les X tels que $\boxed{AX\ = -X}$
    - **L'angle t** est déterminé par :
      - $tr(A) = -1 + 2cos\ t$
      - sin t est du signe de $[x, f(x), u] = \det_{(i,j,k)}\ (x, f(x), u)$ pour x non colinéaire à u ,et u le vecteur normé dirigeant et orientant l'axe $\vec{D}$

$$Mat_{(u,v,w)}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

$$pour\ u,v,w\ normés, \vec{\boldsymbol{D}} = \boldsymbol{vect}(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{v}\ \perp \boldsymbol{u}\ et w = u \wedge v$$