Courbes paramétrées

Définition : Arc paramétré

On appelle arc paramétré (de classe C^k) toute application $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}lan$ de classe C^k

I. Symétries

Soit $g : t \mapsto f(t)$ de I dans I telle que $I = I' \cup g(I')$ et $I' \cap g(I') = \emptyset$ *ou un singleton*

Suivant la formule liant $\gamma o g$ et γ, on fait varier t dans I', d'où une courbe Γ', puis une courbe Γ'' déduite de Γ', et $\Gamma = \Gamma' \cup \Gamma''$

	Isométrie permettant de passer de Γ' à Γ''
$\begin{cases} x(g(t)) = x(t) \\ y(g(t)) = y(t) \end{cases}$	Identité
$\begin{cases} x(g(t)) = x(t) + a \\ y(g(t)) = y(t) + b \end{cases}$	Translation de vecteur $a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}$
$\begin{cases} x(g(t)) = -x(t) \\ y(g(t)) = y(t) \end{cases}$	Symétrie par rapport à (Oy)
$\begin{cases} x(g(t)) = x(t) \\ y(g(t)) = -y(t) \end{cases}$	Symétrie par rapport à (Ox)
$\begin{cases} x(g(t)) = -x(t) \\ y(g(t)) = -y(t) \end{cases}$	Symétrie par rapport au point O
$\begin{cases} x(g(t)) = y(t) \\ y(g(t)) = x(t) \end{cases}$	Symétrie par rapport à la première bissectrice

Généralement on teste :

- $\boldsymbol{g(t) = -t}$ pour $I =]-a; a[$ et alors I' $= [0; a[$
- $\boldsymbol{g(t) = a + b - t}$ pour $I = [a; b]$ et alors $I' = [a; \frac{a+b}{2}[$
- $\boldsymbol{g(t) = \frac{1}{t}}$ pour $I =]0; +\infty[$ et alors I' $=]0; 1]$

II. Points réguliers, biréguliers.

<u>Définition.</u>

Soit Γ la trajectoire de l'arc paramétré $\gamma : t \longmapsto \gamma(t) = M(t)$ de classe C^1

On dit que M(t) est **un point régulier** de Γ si et seulement si : $\boxed{\overrightarrow{\gamma'}(t) \neq \vec{0}}$

Si γ est de classe C^2

On dit que M(t) est **un point birégulier** de Γ si et seulement si : **la famille** $\left(\overrightarrow{f'(t)}; \overrightarrow{f''(t)}\right)$ **est libre.**

Pour les déterminer on écrit que le déterminant de la famille est non nul

Un point non régulier est dit **stationnaire.**

III. Tangentes.

1. Tangente en un point régulier.

γ un arc paramétré de classe C^1

En tout point régulier M(t) de Γ, Γ admet une tangente et celle-ci est dirigé par $\overrightarrow{\boldsymbol{\gamma}'}(\boldsymbol{t})$**.**

Soit M(t) point régulier de Γ, et T(t) la tangente en M(t)à Γ.

- Si $x'(t) \neq 0$, T(t) a pour coeff. directeur : $\frac{y'(t)}{x'(t)}$
- Si $x'(t) = 0$, T(t) est parallèle à (Oy) (dans ce cas on a y'(t) non nul car M(t) régulier)

2. Tangente, cas général.

Théorème.

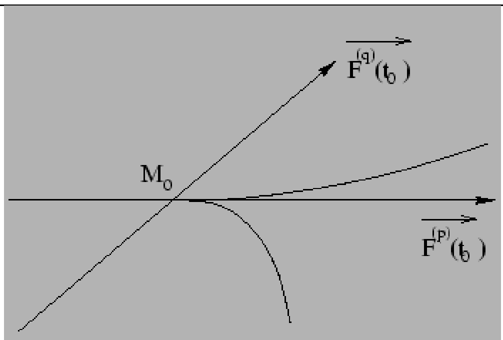
γ un arc paramétré de classe C^k, et $A(t) = \gamma(t)$

Si l' un au moins des vecteurs dérivés successifs $\overrightarrow{\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{t})}$; $\overrightarrow{\boldsymbol{f}''(\boldsymbol{t})}$; .... ; $\overrightarrow{\boldsymbol{f}^{(\boldsymbol{k})}(\boldsymbol{t})}$ est non nul, alors Γ admet en A(t) une tangente et celle-ci est dirigée par le premier vecteur dérivé successif qui soit non nul.

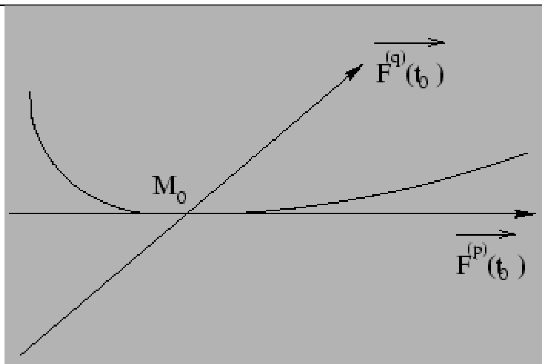
3. Allure de la courbe au voisinage d'un point.

Soit p le plus petit entier ≥ 1 tel que : $\overrightarrow{f^{(p)}(t)} \neq \vec{0}$

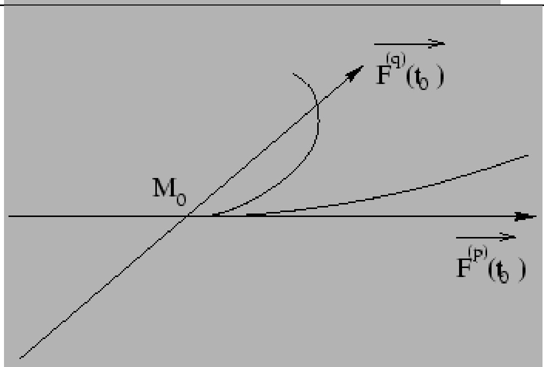
Soit q le plus petit entier $>$ p tel que : $\left(\overrightarrow{f^{(p)}(t)};\overrightarrow{f^{(p)}(t)}\right)$ **soit libre**



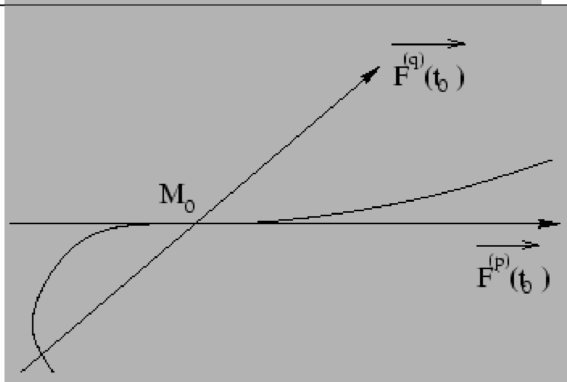
p pair et q impair : point de rebroussement de 1ère espèce



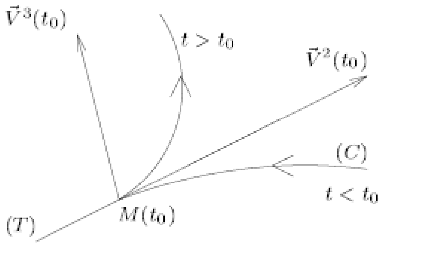
p impair et q pair : point ordinaire



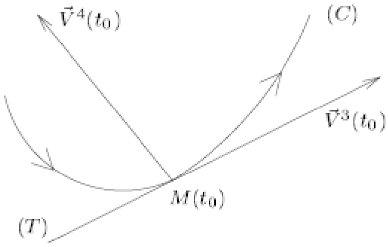
p pair et q pair : point de rebroussement de 2ème espèce



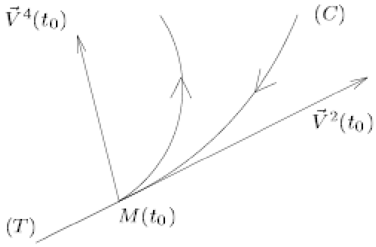
p impair et q impair : point d'inflexion



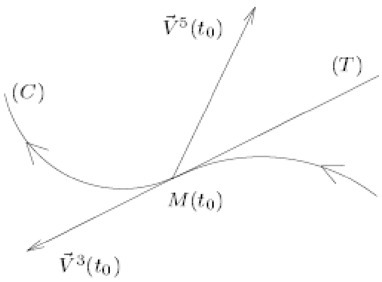
p pair, q impair : rebroussement de 1e espèce



p impair, q pair : méplat



p pair, q pair : rebroussement de 2e espèce



p impair, q impair : point d'inflexion

IV. Branches infinies.

Définition : Branche infinie.

On dit que Γ admet une **branche infinie** quand t tend vers a ($\in \overline{\mathbb{R}}$) ssi $\lim_{t\to a}\left\|\overrightarrow{f(t)}\right\| = +\infty$.

Condition suffisante.

Si $\lim_a |x(t)| = +\infty$ ou $\lim_a |y(t)| = +\infty$, alors Γ admet une **branche infinie** quand t tend vers a

Asymptotes simples.

- Si $\begin{cases} \lim_{t\to a} x(t) = \pm\infty \\ \lim_{t\to a} y(t) = b \in \mathbb{R} \end{cases}$,
  alors Γ admet **pour asymptote la droite d'équation $\boldsymbol{y = b}$.**

- Si $\begin{cases} \lim_{t\to a} y(t) = \pm\infty \\ \lim_{t\to a} x(t) = c \in \mathbb{R} \end{cases}$,
  alors Γ admet **pour asymptote la droite d'équation $\boldsymbol{x = c}$.**

Cas d'étude dans le cas où $\lim_a |x(t)| = +\infty$ **et** $\lim_a |y(t)| = +\infty$,

On suppose que Γ admet une **branche infinie** quand t tend vers a

- Si $\lim_{t\to a} \frac{y(t)}{x(t)} = \pm\infty$, alors Γ admet une **branche parabolique de direction asymptotique (Oy).**
- Si $\lim_{t\to a} \frac{y(t)}{x(t)} = 0$, alors Γ admet une **branche parabolique de direction asymptotique (Ox).**

- Si $\begin{cases} \lim_{t\to a} \frac{y(t)}{x(t)} = b \in \mathbb{R}^* \\ \lim_{t\to a} y(t) - b\,x(t) = \pm\infty \end{cases}$,
  alors Γ admet une **branche parabolique de direction asymptotique la droite d'équation $\boldsymbol{y = bx}$.**

- Si $\begin{cases} \lim_{t\to a} \frac{y(t)}{x(t)} = b \in \mathbb{R}^* \\ \lim_{t\to a} y(t) - b\,x(t) = c \in \mathbb{R} \end{cases}$,
  alors Γ admet une **pour asymptote la droite d'équation $\boldsymbol{y = bx + c}$.**