Interrogation de T.D. n°2 : IPSA. Maths Spé $\boxed{1}$

Exercice 1.

- On introduit la fonction de changement de variable notée Φ.

Ici on a : $\boxed{\Phi(x,y) = (x+y\,;x-y) = (u,v)}$ La fonction Φ est un C^1 difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

On a alors : $\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases}$ et donc $\begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{u-v}{2} \end{cases}$

- On procède au changement de variable.

Effectuer un changement de variable consiste à chercher une fonction $g : (u,v) \longmapsto g(u,v)$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ telle que la fonction composée $f = go\Phi$ vérifie la condition donnée (E).

- Utilisation des matrices jacobiennes.

$f = go\Phi$ et donc

$$\mathcal{J}_f\,(x,y) = \mathcal{J}_g\big(\Phi(x,y)\big) \times \mathcal{J}_\Phi(x,y)$$

Soit puisque $\Phi(x,y) = (u,v)$,

$$\mathcal{J}_f\,(x,y) = \mathcal{J}_g(u,v) \times \mathcal{J}_\Phi(x,y)$$

On obtient l'égalité :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,;\,\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \left(\frac{\partial g}{\partial u}(u,v)\,;\,\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\right) \times \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial \Phi_2}{\partial y}(x,y) \end{bmatrix}$$

Ce qui donne :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,;\,\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \left(\frac{\partial g}{\partial u}(u,v)\,;\,\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\right) \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,;\,\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \left(\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\,;\,\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) - \frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\right)$$

Et donc par identification :

$$\boxed{\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial g}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) - \frac{\partial g}{\partial v}(u,v) \end{cases}}$$

- On remplace les dérivées partielles de f par celles de g dans l'expression de départ (E).

(E) devient alors : $\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) - \frac{\partial g}{\partial v}(u,v)$

et donc : $2\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = 0$

La fonction g ne dépend donc pas de u, elle est de la forme $g(u,v) = h(u)$ où h est une fonction de classe C^1

Donc, les solutions de l'EDP sont les fonctions C^1 de la forme : $\boxed{f(x,y) = h(x+y)}$ **puisque** $u = x + y$ **.**

Un exemple de fonction qui est solution de l'équation est : $f(x,y) = \exp(x+y)$

On a alors : $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \exp(x+y)$

Exercice 2.

- **Γ :** arc AB :
  Le cercle C est d'équation : $x^2 + y^2 = 4$
  Par passage en coordonnées polaires, $\begin{cases} x = & x(t) = 2\cos t \\ y = & y(t) = 2\sin t \end{cases}$ avec t qui varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$.

  Donc $\begin{cases} x'(t) = -2\sin t \\ y'(t) = 2\cos t \end{cases}$

- Calcul de l'intégrale curviligne.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [4\cos t \, sint\, t\,(-2\sin t) + 2 sint\, t\,(2\cos t)]\; dt = \left[-\frac{8}{3} sin^3(t) + 2\, sin^2(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boxed{-\frac{2}{3}}$$

Exercice 3.

Le domaine D correspond aux points extérieurs au cercle C de centre O et de rayon 1, qui sont intérieur au carré O, (1 ;0) (1 ;1), (0 ;1). Pour x qui varie de 0 à 1, y varie de $\sqrt{1-x^2}$ à 1

$$K = \iint_D \frac{xy}{1+x^2+y^2}\, dxdy = \int_0^1 x \left[\int_{\sqrt{1-x^2}}^1 \left(\frac{y}{1+x^2+y^2}\right) dy\right] dx$$
$$K = \int_0^1 \frac{x}{2}\, [ln(x^2+y^2+1)]_{\sqrt{1-x^2}}^1\, dx$$
$$2 \times K = \int_0^1 x\, ln\left(\frac{x^2+2}{2}\right)\, dx$$

Par IPP :

$$2 \times K = \int_0^1 x\, ln\left(\frac{x^2+2}{2}\right) = \left[\frac{x^2}{2} ln\left(\frac{x^2+2}{2}\right)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2} \times \frac{2x}{x^2+2} dx$$

$$\boxed{2 \times K = \frac{1}{2} ln\left(\frac{3}{2}\right) - \int_0^1 \frac{x^3}{x^2+2} dx}$$

Calculons $\int_0^1 \frac{x^3}{x^2+2} dx$.

$$\int_0^1 \frac{x^3}{x^2+2} dx = \int_0^1 \frac{x^3+2x-2x}{x^2+2} dx = \int_0^1 \frac{x(x^2+2)-2x}{x^2+2} dx = \int_0^1 x - \frac{2x}{x^2+2} dx = \left[\frac{x^2}{2} - \ln(x^2+2)\right]_0^1$$

$$\int_0^1 \frac{x^3}{x^2+2} dx = \boxed{-\ln 3 + \ln 2 + \frac{1}{2}}$$

Donc on obtient : $2 \times K = \frac{1}{2} ln\left(\frac{3}{2}\right) - \left(-\ln 3 + \ln 2 + \frac{1}{2}\right)$ *soit* $\boxed{K = \frac{3}{4} ln\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{4}}$

Interrogation de T.D. n°2 : IPSA. Maths Spé $\boxed{2}$

Nom :

Exercice 1.

- On introduit la fonction de changement de variable notée Φ.

Ici on a : $\boxed{\Phi(x,y) = (5x+3y\,;x-y) = (u,v)}$ La fonction Φ est un C^1 difféomorphisme de ℝ² dans ℝ².

On a alors : $\begin{cases} u = 5x+3y \\ v = x-y \end{cases}$

- On procède au changement de variable.

Effectuer un changement de variable consiste à chercher une fonction $g : (u,v) \longmapsto g(u,v)$ de classe C^1 sur ℝ² telle que la fonction composée $f = go\Phi$ vérifie la condition donnée (E).

- Utilisation des matrices jacobiennes.

$f = go\Phi$ et donc $\mathcal{J}_f\,(x,y) = \mathcal{J}_g\big(\Phi(x,y)\big) \times \mathcal{J}_\Phi(x,y)$

Soit puisque $\Phi(x,y) = (u,v)$, on a $\mathcal{J}_f\,(x,y) = \mathcal{J}_g(u,v) \times \mathcal{J}_\Phi(x,y)$

On obtient l'égalité :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,;\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \left(\frac{\partial g}{\partial u}(u,v)\,;\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\right) \times \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial \Phi_2}{\partial y}(x,y) \end{bmatrix}$$

Ce qui donne :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,;\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \left(\frac{\partial g}{\partial u}(u,v)\,;\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\right) \times \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,;\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \left(5\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\,;\,3\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) - \frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\right)$$

Et donc par identification :

$$\boxed{\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 5\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial g}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) - \frac{\partial g}{\partial v}(u,v) \end{cases}}$$

- On remplace les dérivées partielles de f par celles de g dans l'expression de départ (E).

$3\frac{\partial f}{\partial x}\,(x,y) = 5\,\frac{\partial f}{\partial y}\,(x,y) : (E)$ (E) devient alors : $15\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) + 3\,\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = 15\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) - 5\,\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)$

et donc : $8\,\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = 0$

La fonction g ne dépend donc pas de u, elle est de la forme $g(u,v) = h(u)$ où h est une fonction de classe C^1

Donc, les solutions de l'EDP sont les fonctions C^1 de la forme : $\boxed{f(x,y) = h(5x+3y)}$ puisque $u = 5x+3y$.

Exercice 2.

- **Γ : l'arc de parabole** :

  Sur cet arc, $\begin{cases} x = 2y^2 - 1 \\ y \text{ varie de } 1 \text{ à } 0 \end{cases}$ Le paramétrage est donc : $\begin{cases} x = & x(t) = 2t^2 - 1 \\ y = & y(t) = t \end{cases}$ soit : $\begin{cases} x'(t) = 4t \\ y'(t) = 1 \end{cases}$

- Calcul de l'intégrale curviligne.

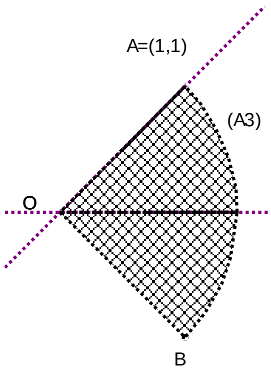
$$I = \int_\Gamma y^2 dx + x^2 dy = \int_1^0 t^2\,(4t dt) + (2t^2 - 1\,)^2 dt = \left[\frac{4t^5}{5} + t^4 - \frac{4t^3}{3} + t\right]_1^0 = \boxed{-\frac{\mathbf{22}}{\mathbf{15}}}$$

Exercice 3.

1. **Calculons** $\boldsymbol{I_{A_2} = \iint_{A_2} (x^2 - y)\ dxdy}$

   Sur A_2 on a $\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ -x \le y \le x \end{cases}$ donc $I_{A_2} = \iint_{A_2} (x^2 - y)\ dxdy = \int_0^1 \left(\int_{-x}^{x} (x^2 - y)\, dy\right)\, dx = \boxed{\frac{1}{2}}$

2. **Calculons** $\boldsymbol{I_{A_3} = \iint_{A_3} (x^2 - y)\ dxdy}$



On effectue un changement de variable en coordonnées polaires.

Posons $\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases}$ et donc Φ l'application de $D = [0\,;1] \times [-\frac{\pi}{4}\,;\frac{\pi}{4}]$ dans A_3, définie par : $\Phi(r,t) = \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \end{pmatrix}$.

Φ est **n'est pas** une bijection et est de classe $C^1(D)$ (cas où r=0, t quelconque) mais on peut tout de même faire ce changement de variables en raisonnant sur l'intérieur de D.

On sait que $\boxed{\det J_\Phi(r,t) = \begin{vmatrix} \cos t & -r\sin t \\ \sin t & r\cos t \end{vmatrix} = r}$

$$I_{A_3} = \iint_{A_3} (x^2 - y)\ dxdy = \iint_D f\left(\Phi(r,t)\right) \times |det\, J_\Phi(r,t)|\, drdt = \iint_D f\left(\Phi(r,t)\right) \times |det\, J_\Phi(r,t)|\, drdt$$

$$I_{A_3} = \iint_{A_3} (x^2 - y)\ dxdy = \int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (r^3 cos^2 t - r^2 \sin t)\, dt\right) dr$$

Or $\quad r^3 cos^2 t - r^2 \sin t = \frac{r^3}{2}(\cos 2t + 1) - r^2 \sin t$

$$I_{A_3} = \int_0^{\sqrt{2}} \left[\frac{r^3}{2}\left(\frac{\sin 2t}{2} + t\right) + r^2 \cos t\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} dr = \int_0^{\sqrt{2}} \left[\frac{r^3}{2}\left(\frac{\sin 2t}{2} + t\right) + r^2 \cos t\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} dr = \int_0^{\sqrt{2}} \left(\frac{\pi + 2}{4}\, r^3\right)\ dr$$

$$\boxed{\boldsymbol{I_{A_3} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}}}$$

3. **Calculons** $\boldsymbol{I_{A_1} = \iint_{A_1} (x^2 - y)\ dxdy}$

   En appliquant la relation de Chasles pour les intégrales doubles on a facilement $\boxed{I_{A_1} = I_{A_3} - I_{A_2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{\pi}{4}}}$