

Interrogation de T.D. n°4 – B : IPSA. Maths Spé

Algèbre linéaire : Isométries et diagonalisation

Durée : 1 heure.

Exercice 1 : Question de cours. (4 points)

1. Donner la définition du produit scalaire d'un espace euclidien.
2.
 - a. Que dire du déterminant d'une isométrie d'un espace euclidien ?
 - b. Démontrer ce résultat.

Exercice 2 : Isométries de \mathbb{R}^3 . (1+7+5=13 points)

Soit $E = \mathbb{R}^3$ un espace euclidien de base canonique $B = (i, j, k)$, et A la matrice dans la base B d'un endomorphisme f définie par :

$$A = \text{Mat}_{(i,j,k)}(f) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que A est orthogonale, que dire de f ?
2. Montrer que f est une rotation,
d'axe dirigé et orienté par $u = \frac{1}{\sqrt{11}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et d'angle $\theta = \text{Arccos} \left(\frac{-5}{6} \right) [2\pi]$
3. Soit P un plan dont u est un vecteur normal, déterminer une base orthonormée $(v_1; v_2)$ de P .

Exercice 3 : Diagonalisation. (6 points)

Soit $E = \mathbb{R}^3$ un espace euclidien de base canonique $B = (i, j, k)$, et S la matrice dans la base B d'un endomorphisme g définie par :

$$S = \text{Mat}_{(i,j,k)}(g) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Expliquer pourquoi la matrice S est diagonalisable et dans quel type de base.
2. Montrer que S peut s'écrire sous la forme $S = PDP^{-1}$, avec P orthogonale et D matrice diagonale. Déterminer P, D et P^{-1}