Interrogation de T.D. n°4 : IPSA. Maths Spé - CORRECTION

Exercice 1 : Question de cours. (4 points)

1. Donner la définition du produit scalaire d'un espace euclidien.

On appelle *produit scalaire* sur E toute application φ : E² → ℝ telle que : pour tout vecteurs x, y et y' de E et k un réel.

a) φ est *symétrique* : $\varphi\,(x,y) = \varphi\,(y,x)$

b) φ est *linéaire par rapport à la 2ème variable* : $\varphi\,(x,ky+y') = k.\varphi\,(x,y) + \varphi\,(x,y')$

c) φ est *positive* : $\varphi\,(x,x) \geq 0$

d) φ est *définie* : $\varphi\,(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

On dit qu'un produit scalaire sur un ℝ-ev est une forme bilinéaire, symétrique et définie positive.

2. Démontrer que les valeurs propres d'une isométrie d'un espace euclidien E sont de module 1.

Si l'on se place dans ℂ, f a au moins une vp complexe λ, et pour un vecteur propre associé X on a :
$\|f(\lambda X)\| = \|\lambda X\| = |\lambda|\|X\|$ or f est une isométrie donc $\|f(X)\| = \|X\|$.
Donc $|\lambda|\|X\| = \|X\|$ et puisque X est un vecteur propre, il est non nul, cela entraine donc : $\boxed{|\lambda| = 1}$.

Rappel : Théorème : Les 4 propriétés sont équivalentes.

a) f est une isométrie.

b) f conserve le ps.

c) f transforme une BON en une BON.

d) $A = Mat_{(i,j,k)}(f)$ est orthogonale, soit $\boxed{{}^tAA = Id}$

Exercice 2 : Isométries de $\mathbb{R}^3$. (1+6+4+1+1=13 points)

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$ un espace euclidien de base canonique $B = (i,j,k)$, et A la matrice dans la base B d'un endomorphisme f définie par :

$$A = Mat_{(i,j,k)}(f) = \frac{-1}{9}\begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que A est orthogonale, que dire de f ?.

${}^tAA = Id$ donc A est orthogonale et f est une isométrie de $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$

2. Montrer que f est la réflexion par rapport au plan P d'équation : $x + 4y + z = 0$

- B est orthogonale donc c'est la matrice d'une isométrie f. En outre $det(B) = -1$ donc l'isométrie f est indirecte.
  Puisque la matrice B est symétrique, f est une réflexion par rapport à un plan P.
- $\vec{\boldsymbol{P}}$ est l'ensemble des invariants de f , déterminé par résolution de AX=X.

On obtient bien : $\boxed{\vec{\boldsymbol{P}} = SEP(A,1) = \left\{X\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ tel\ que\ \ x + 4y + z = 0\right\}}$

3. Déterminer une base orthonormée $(v_1; v_2)$ de P.

- $\vec{\boldsymbol{P}} = SEP(A,1) = \left\{X\begin{pmatrix} -4y - z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; (y;z) \in \mathbb{R}^2\right\}$
- $\boxed{\vec{\boldsymbol{P}} = Vect\left\{\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = Vect(f_1; f_2)}$

- Il faut ensuite othonormer la base de P avec l'algorithme de Gram-Schmidt.
  - $v_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{17}}\begin{pmatrix}-4\\1\\0\end{pmatrix}}$
  - $y_2 = f_2 - < f_2, v_1 > \ v_1 = \frac{1}{\sqrt{17}}\begin{pmatrix}-\frac{1}{17}\\-\frac{4}{17}\\1\end{pmatrix}$
  - $v_2 = \frac{y_2}{\|y_2\|} = \boxed{\frac{3\sqrt{34}}{17}\begin{pmatrix}-\frac{1}{17}\\-\frac{4}{17}\\1\end{pmatrix}}$

4. Donner un vecteur normé (u), normal à P.

On a facilement $\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}$ vecteur normal à P donc $\boxed{u = \frac{1}{\sqrt{18}}\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}}$

5. Ecrire alors la matrice de f dans la base $B' = (u; v_1; v_2)$.

$$\boxed{A = Mat_{(u;v_1;v_2)}(f) = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}}$$

Exercice 3 : Diagonalisation. (6 points)

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$ un espace euclidien de base canonique $B = (i, j, k)$, et S la matrice dans la base B d'un endomorphisme g définie par :

$$S = Mat_{(i,j,k)}(g) = \begin{pmatrix}3 & -2 & -2\\-2 & 8 & -2\\-2 & -2 & 3\end{pmatrix}$$

1. Expliquer pourquoi la matrice S est diagonalisable et dans quel type de base.

La matrice S est symétrique réelle donc diagonalisable dans une BON.

2. Montrer que S peut s'écrire sous la forme , $S = PDP^{-1}$, avec P orthogonale et D matrice diagonale.

La matrice S est symétrique donc diagonalisable dans une base orthonormée.

$Sp_{\mathbb{R}}(S) = \{0; 5; 9\}$

$SEP(S, 0) = Vect\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ on prend $v1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$

$SEP(S, 5) = Vect\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ on prend $v2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

$SEP(S, 9) = Vect\begin{pmatrix}1\\-4\\1\end{pmatrix}$ on prend $v2 = \frac{1}{\sqrt{18}}\begin{pmatrix}1\\-4\\1\end{pmatrix}$

S diagonalisable, $S = PDP^{-1}$, avec P orthogonale,

$P = (v1, v2, v3)$ Et $D = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 5 & 0\\0 & 0 & 9\end{pmatrix}$