Interrogation de T.D. n°4 : IPSA. <u>Maths Spé</u>

<u>Algèbre linéaire : Isométries et diagonalisation</u>

Durée : 1 heure.

<u>Exercice 1</u> : Question de cours. (4 points)

1. Donner la définition du produit scalaire d'un espace euclidien.
2. Démontrer que les valeurs propres d'une isométrie d'un espace euclidien sont de module 1.

<u>Exercice 2</u> : Isométries de $\mathbb{R}^3$. (1+5+4+1+1=13 points)

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$ un espace euclidien de base canonique $B = (i, j, k)$, et A la matrice dans la base B d'un endomorphisme f définie par :

$$A = Mat_{(i,j,k)}(f) = \frac{-1}{9}\begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que A est orthogonale, que dire de f ?.
2. Montrer que f est la réflexion par rapport au plan P d'équation : $x + 4y + z = 0$
3. Déterminer une base orthonormée $(v_1; v_2)$ de P.
4. Donner un vecteur normé (u), normal à P.
5. Ecrire alors la matrice de f dans la base $B' = (u; v_1; v_2)$.

<u>Exercice 3</u> : Diagonalisation. (6 points)

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$ un espace euclidien de base canonique $B = (i, j, k)$, et S la matrice dans la base B d'un endomorphisme g définie par :

$$S = Mat_{(i,j,k)}(g) = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -2 & 8 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Expliquer pourquoi la matrice S est diagonalisable et dans quel type de base.
2. Montrer que S peut s'écrire sous la forme , $S = PDP^{-1}$, avec P orthogonale et D matrice diagonale. Déterminer $P, D\ et\ P^{-1}$
