I.P.S.A
24, rue Pasteur
94270 Le Kremlin-Bicêtre

Date de l'épreuve : **15 janvier 2007**

MATIERE : Mathématiques Professeur : M. Peschard

Classe : Aérospé A et B
Durée : 2 h 00

Les notes de cours ne sont pas autorisées
Les calculatrices ne sont pas autorisées

Exercice 1 On considère la courbe paramétrée par $M(t) = (3\cos t, t + \sin t)$.
a) Montrer en étudiant $M(-t)$ et $M(t + 2\pi)$ que la courbe est invariante par une symétrie et une translation. Justifier que l'on peut se limiter à une étude sur $[0, \pi]$.
b) Déterminer pour les valeurs $0, \frac{\pi}{2}, \pi$ de t la direction de la tangente au point de la courbe. Dire pour chacun de ces points s'il est un point de rebroussement, d'inflexion ou d'allure normale.
c) Dresser le tableau de variation sur l'intervalle d'étude de la courbe.
d) Réaliser un tracé de la courbe faisant apparaître au moins la portion de courbe pour t variant entre $-\pi$ et 3π. On représentera notamment les tangentes calculées à la question b. *(N'hésitez pas à utiliser une page entière pour ce tracé)*

Exercice 2 On reprend la courbe paramétrée de l'exercice 1. On pose $A = M(0)$ et $B = M(2\pi)$. On considère S la surface délimitée par la portion de courbe entre A et B et le segment $[AB]$.
a) Enoncer avec précision le théorème de Green-Riemann.
b) Calculer l'aire de S.

Exercice 3 Soit V le volume défini par les conditions $0 \leq x \leq y$, $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ et $0 \leq z$.
a) Déterminer le volume de V. On pourra utiliser le système de coordonnées sphériques.
b) Calculer $\displaystyle\iiint_V (x - z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$.

Exercice 4 B est une boule de rayon R.
On considère P un plan qui «coupe» la boule en deux régions. On note h la distance du centre de la boule à P. Déterminer le volume des deux régions de B délimitées par P.

Exercice 5 Soit S la surface décrite par les trois inégalités :

$$\begin{cases} x + y \leq 3 \\ x + 2y \geq 3 \\ 2x + y \geq 3 \end{cases}$$

a) Représenter S.
b) Calculer $\displaystyle\iint_S x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.