TD 10 — Séries numériques

Exercice 1 Soit la suite

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, \mathrm{d}x$$

a) Calculer I_0, I_1.
b) Montrer que la suite I_n est une suite décroissante. En déduire que I_n converge.
c) Démontrer $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
d) En déduire que $(n+1)I_n I_{n+1} = \dfrac{\pi}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
e) En déduire la limite de I_n.
f) Montrer que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{I_{n+1}}{I_n} = 1$.
g) En déduire un équivalent simple de I_n quand $n \to \infty$.
h) Donner une formule explicite de I_{2k} à l'aide de factorielles.
i) En déduire la limite de $a_n = \dfrac{\sqrt{n}(2n)!}{4^n (n!)^2}$.

Exercice 2 Soit la suite

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2} \, \mathrm{d}t$$

a) Montrer l'inégalité :

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{2n+1}$$

b) En déduire la limite de I_n.
c) Calculer $I_n + I_{n+1}$.
d) Exprimer à l'aide de la suite I_n la somme :

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

e) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ converge et calculer sa valeur.

Exercice 3 Pour chacune des suites suivantes u_n, étudier la convergence de la suite u_n et de la série $\sum u_n$.

1. $u_n = \dfrac{n+2}{n+5}$
2. $u_n = \dfrac{\sin n}{n^2}$
3. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.
4. $u_n = (1 + \dfrac{1}{n})^n$.
5. $u_n = n^3 2^{-n}$.
6. $u_n = \dfrac{\ln n}{n}$
7. $u_n = n^{-n}$
8. $u_n = \sqrt[n]{n} - 1$

Exercice 4 On s'intéresse à la suite

$$A_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) - \ln n$$

a) On pose $a_n = A_{n+1} - A_n$. Déterminer un équivalent simple de a_n pour $n \to \infty$.
b) En raisonnant sur $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, montrer que la suite A_n converge. (Remarque : la limite de la suite A_n est connue sous le nom de constante d'Euler).

Exercice 5 Soit la suite $u_n = (n!)e^n n^{-(n+\frac{1}{2})}$ définie pour $n \geq 1$.
a) On pose pour $n \geq 2$, $v_n = \ln \dfrac{u_n}{u_{n-1}}$. Montrer
$$v_n = (n - \frac{1}{2}) \ln(1 - \frac{1}{n}) - 1$$
et en déduire un équivalent simple de v_n.
b) En déduire que la série $\sum_{n=2}^{\infty} v_n$ converge.
c) En déduire que la suite u_n converge vers une limite non nulle que l'on notera k.
d) En exprimant la limite de $\dfrac{u_{2n}}{u_n^2}$ de deux façons différentes (et en utilisant notamment la limite trouvée $(1/\sqrt{\pi})$ à la question i de l'exercice 1), déterminer k.
e) En déduire la formule, dite de Stirling : $n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$.

Exercice 6 Pour les séries suivantes, préciser si la série est convergente ou divergente :

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^3 + 2n^2 + 1}$ $\quad\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-4n+3}$ $\quad\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n + n + 5}$

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n^2 + 3}$ $\quad\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!}$ $\quad\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 5}$ $\quad\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ $\quad\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 3}{3^n + 4}$

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (n^{20}) e^{-n}$ $\quad\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \cos^2 n$ $\quad\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-\sqrt{n}}$ $\quad\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}$ $\quad\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$

Exercice 7 Préciser si les séries suivantes sont absolument convergentes, convergentes, divergentes.

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-3)^{-n}$ $\quad\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{2^n}$ $\quad\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n(1+i)}$

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2 + 1}$ $\quad\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ $\quad\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} 3^{-n}$ $\quad\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1000 - n^3}{n^7 - 100}$ $\quad\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin^3 n \sin^3 \frac{1}{n}$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}})$ $\quad\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+4i)^n}{n!}$ $\quad\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-2)^n}{\sqrt{n4^n - 1}}$

Exercice 8

On suppose que u_n est une suite positive décroissante, telle que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge.

On note $R_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{\infty} u_k$.
a) Montrer que la suite R_n est définie, décroissante et converge vers 0.
b) Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$, que $nu_{2n} \leq R_n$.
c) En déduire que $nu_n \to 0$.
d) La série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ converge-t-elle ?
e) Soit v la suite définie par $v_n = \dfrac{1}{n}$ si n est le carré d'un entier, et par $v_n = 0$ sinon. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ converge.
nv_n converge-t-elle ?