TD n°2 : CORRECTION PARTIELLE

<u>Exercice 1</u> Soit $a \in \mathbb{R}^3$. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x) = a \wedge x + 2x$

a) **<u>Déterminer les dérivées partielles de f.</u>**

On exprime f(x) en fonction des coordonnées des vecteurs x et a.

$$f(x) = \begin{pmatrix} a_2\, x_3 - a_3\, x_2 + 2x_1 \\ a_3\, x_1 - a_1\, x_3 + 2x_2 \\ a_1\, x_2 - a_2\, x_1 + 2x_3 \end{pmatrix}$$

Puis on dérive chaque lignes d'où :

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = \begin{pmatrix} 2 \\ a_3 \\ -a_2 \end{pmatrix} ; \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) = \begin{pmatrix} -a_3 \\ 2 \\ a_1 \end{pmatrix} ; \frac{\partial f}{\partial x_3}(x) = \begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

b) **<u>b) Soit $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$. Exprimer la différentielle de f en b, $\boldsymbol{d_b f}$</u>**

- <u>Méthode 1</u>.

Puisque les dérivées partielles de f existent et sont continues, f est différentiable et :

$$d_b\, f\,(h) = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_j}(b)\,.\,h_j = \begin{pmatrix} 2\,h_1 - a_3 h_2 + a_2\, h_3 \\ a_3 h_1 + 2h_2 - a_1 h_3 \\ -a_2 h_1 + a_1 h_2 + 2h_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2\, h_3 - a_3 h_2 \\ a_3 h_1 - a_1 h_3 \\ a_1 h_2 - a_2 h_1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$$

On reconnait alors l'application f et donc : $\boxed{d_b\, f(h) = f(h)}$

- <u>Méthode 2</u>.

On remarque que la fonction f est linéaire, car $f(kx + y) = kf(x) + f(y)$, par linéarité du produit vectoriel par rapport à la 2ème variable.

Or par définition : (pour $U_0 = \{h \in U \ tq\ (b + h) \in U\}$)

$$\text{f définie sur U, est différentiable en b si} \begin{Bmatrix} \exists \text{ 1 appli. linéaire notée } d_b\, f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n) \\ \exists \text{ fonction } \varepsilon \text{ telle que } \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0 \end{Bmatrix}$$

telle que : $\boxed{\forall\, h \in U_0,\ f(b + h) = f(b) + d_b\, f(h) + \|h\|\, \varepsilon(h)}$

Donc puisque f est linéaire on a : $\boldsymbol{f(b + h) - f(b) = f(h)}$ *soit* : $\boxed{d_b\, f = f}$

c) **<u>Déterminer $\boldsymbol{ker\ d_b f}$</u>**

Notons tout de suite que $\boxed{d_b\, f = f}$ et donc $ker\ d_b f = ker\ f = \{x\ tq\ f(x) = 0\}$

- **<u>Méthode 1</u> : Méthode générale de résolution d'équations avec produits vectoriel et scalaire**.

$$f(x) = 0 \quad ssi \quad (a \wedge x + 2x = 0)\ \text{(R1)}$$

On compose de chaque côté par un produit scalaire ou/et un produit vectoriel bien choisi.

  - On élimine le cas ou le vecteur a est nul, dans ce cas (R1) implique que x = 0
  - $a.(a \wedge x + 2x) = a.(a \wedge x) + 2a.x = 2a.x\ (car\ a.(a \wedge x) = 0\,)$
    Donc (R1) implique que $(a.x = 0)\ (R2)$
  - $a \wedge (a \wedge x + 2x) = a \wedge (a \wedge x) + 2a \wedge x$
    $a \wedge (a \wedge x + 2x) = a \wedge (a \wedge x) - 4\, a.x\,, d'après (R1)$
    $a \wedge (a \wedge x + 2x) = (a.x)a - (a.a)x - 4\, a.x\,, d'après\ la\ formule\ du\ double\ produit\ vectoriel$
    $a \wedge (a \wedge x + 2x) = 0 - (a.a)x - 4\, a.x$, d'après (R2)
    et donc : $x\,(\|a\|^2 + 4) = 0$
    Or $(\|a\|^2 + 4) \geq 4 > 0$ donc on obtient $\boxed{x = 0}$
  - Il reste à vérifier que $x = 0$ est bien solution de l'équation(R1), ce qui est évident.
  - Donc : $\boxed{ker\ d_b f = ker\ f = \{x\ tq\ f(x) = 0\} = \{0\}}$

- **<u>Méthode 2</u> : Méthode directe, bien plus rapide ici.**

On remarque que la relation (R1) équivaut à : $a \wedge x = -2x$
Or par définition, le vecteur $a \wedge x$ est orthogonal aux vecteurs a et x, et la relation (R1) implique qu'il est aussi colinéaire au vecteur x.
Cela implique que $a \wedge x = 0$ et donc que $x = 0$ d'après (R1).

Exercice 4.

1. $f(x,y,z) = x^2 + 3xy$ $\boxed{\overrightarrow{grad}\, f = (2x+3y\,; 3x\,; 0)}$
2. $\vec{f}(x,y,z) = (2x, 3y, 4z)$ $\boxed{div\,\vec{f} = 9}$ et $\boxed{\overrightarrow{rot}\,\vec{f} = \vec{0}}$
3. $\vec{f}(x,y,z) = (3x^2+yz, x^2+yz\cos x, 3)$ $\boxed{div\,\vec{f} = 6x + z\cos x}$ et $\boxed{\overrightarrow{rot}\,\vec{f} = (-y\cos x\,; y\,; -z(y\sin x + 1) + 2x)}$
4. $\vec{f}(x,y,z) = (2x^2+5z, e^z, x^y)$ $\boxed{div\,\vec{f} = 4x}$ et $\boxed{\overrightarrow{rot}\,\vec{f} = (x^y \ln x - e^z\,; 5 - y\,x^{y-1}\,; 0)}$
5. $\vec{f}(x,y,z) = (x^2+zx, yz, 3+\sin(xy+z^2))$
   $\boxed{div\,\vec{f} = 2z\cos(xy+z^2) + 2x + 2z}$ et $\boxed{\overrightarrow{rot}\,\vec{f} = (x\cos(xy+z^2) - y\,; -y\cos(xy+z^2) + x\,; 0)}$

Exercice 7. $\vec{f}(x,y,z) = (x^2+3y, z^3-2y, 4x)$

1. $\vec{f}$ est un champ vectoriel, le de gradient n'a donc pas de sens pour $\vec{f}$.
2. $\boxed{\overrightarrow{rot}\,\vec{f} = (-3z^2\,; -4\,; -3)}$
3. $\boxed{div\,\vec{f} = 2x - 2}$
4. $\boxed{\overrightarrow{grad}\,(div\,\vec{f}) = (2; 0; 0)}$
5. $div\ div$ pas de sens.
6. $\boxed{div\,(\overrightarrow{rot}\,\vec{f}) = div\,(-3z^2\,; -4\,; -3) = 0}$
7. $\boxed{\overrightarrow{rot}\,(\overrightarrow{rot}\,\vec{f}) = \overrightarrow{rot}\,(-3z^2\,; -4\,; -3) = (0; -6z; 0)}$
8. $\boxed{\overrightarrow{rot}\,\left(\overrightarrow{grad}\,(div\,\vec{f})\right) = \vec{0}}$