TD n°3 : CORRECTION PARTIELLE

Correction des exercices 1, 4, 8, 9 et 10.

<u>Exercice 1</u>.

1. $f(x,y) = x^y$ on a pour $x > 0$, f une fonction C².

$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\,x^{y-1}}$; $\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^y.\ln x}$; $\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = (y^2-y)\,x^{y-2}}$; $\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = x^y.(\ln x)^2}$;
$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = x^y.\left(\frac{1+y\,lnx}{x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)}$

---

2. $f(x,y) = \frac{1}{(x+y+z+t)^2} = \frac{1}{(x_1+x_2+x_3+x_4)^2}$ on a pour $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \neq 0$ f une fonction C².

$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x,y) = \frac{-2}{(x_1+x_2+x_3+x_4)^3}}$; $\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\ \partial x_j}(x,y) = \frac{6}{(x_1+x_2+x_3+x_4)^4}}$; (pour $i\ et\ j = 1,2,3,4$)

---

3. $f(x,y,z) = \frac{x+y}{x+z}$ on a pour $x + z \neq 0$, f une fonction C².

$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{z-y}{(x+z)^2}}$; $\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{(x+z)}}$ $\boxed{\frac{\partial f}{\partial z}(x,y) = \frac{-x-y}{(x+z)^2}}$; $\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{2(y-z)}{(x+z)^3}}$; $\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0}$; $\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y) = \frac{2(x+y)}{(x+z)^3}}$

$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = \frac{-1}{(x+z)^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)}$; $\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}(x,y) = \frac{x+2y-z}{(x+z)^3} = \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}(x,y)}$ $\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(x,y) = \frac{-1}{(x+z)^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}(x,y)}$

<u>Exercice 4</u>. **EXTREMA LOCAUX**

1. $f(x,y) = x^4 + y^4 - (\mathrm{x}-\mathrm{y})^2$. f est clairement C² sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$
   - <u>Points critiques</u>.

     On a $\boxed{\overrightarrow{grad}\ f = (4x^3 - 2x + 2y\ ;\ 4y^3 - 2y + 2x)}$ et les solutions de $\overrightarrow{grad}\ f = \vec{0}$ sont :
     $\boxed{O(0{,}0), A(1\,;-1)\ et\ B(-1\,;1)}$.

   - Pour A et B on trouve $\boxed{r = 10, s = 2\ et\ t = 10}$, soit $\boxed{s^2 - rt = 90 < 0\ et\ r > 0}$ donc $f(A) = -2 = f(B)$ sont des <u>minima locaux</u>.
     La surface S est localement au dessus des plans tangents en A et B.
   - En O on trouve $\boxed{r = -2, s = 2\ et\ t = -2}$, soit $\boxed{s^2 - rt = 0}$. On ne peut pas conclure.
     Il faut étudier localement le signe de $f(x,y) - f(0{,}0)$ soit ici celui de $f(x,y)$ car $f(0{,}0) = 0$.
     - $f(x,x) = 2x^4 \geq 0$ donc quand x tend vers 0, f(x,x) tend vers f(0,0) et est positif.
     - $f(x,0) = x^2(x^2-1) \leq 0$ si x est dans [-1 ;1] donc quand x tend vers 0,
       $f(x,0)\ tend\ vers\ f(0{,}0)$ et est négatif.

     Il n'y a donc pas d'extremum en O.

2. $f(x,y) = x^2 + y^2 + x^3$. f est clairement C² sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$
   - Points critiques.

     On a $\boxed{\overrightarrow{grad}\, f = (2x + 3x^2\,;\ 2y)}$ et les solutions de $\overrightarrow{grad}\, f = \vec{0}$ sont : $\boxed{O(0{,}0), A(-\frac{2}{3}\,; 0)}$.

   - Pour O on trouve $\boxed{r = 2, s = 0\ et\ t = 2}$, soit $\boxed{s^2 - rt = -4 < 0\ et\ r > 0}$ donc $f(O) = 0$ est un minimum local strict.
     La surface S est localement au dessus du plan tangent en O.

     Pour A on trouve $\boxed{r = -2, s = 0\ et\ t = 2}$, soit $\boxed{s^2 - rt = 4 > 0}$
     Il n'y a donc pas d'extremum en A. On a un point selle (ou point col).

3. $f(x,y) = x^2y + \ln(1 + y^2)$. f est clairement C² sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$ car $1 + y^2 \geq 1 > 0$
   - Points critiques.

     On a $\boxed{\overrightarrow{grad}\, f = (2xy\,;\ x^2 + \frac{2y}{x^2+1})}$ et la solution de $\overrightarrow{grad}\, f = \vec{0}$ est : $\boxed{O(0{,}0)}$.

   - En O on trouve $\boxed{r = 0, s = 0}$, soit $\boxed{s^2 - rt = 0}$. On ne peut pas conclure.
     Il faut étudier localement le signe de $f(x,y) - f(0{,}0)$ soit ici celui de $f(x,y)$ car $f(0{,}0) = 0$.
     - $f(0,x) = \ln(1 + x^2) \geq 0$ donc quand x tend vers 0, $f(0,x)\ tend\ vers\ f(0{,}0)$ et est positif.
     - $f(x,x^3) = x^5 + \ln(1 + x^6) = x^5 + o(x^5)\ pour\ x \to 0$
       Donc si $x\ tend\ vers\ 0^-\ (c.a.d\ x \leq 0)$, $f(x,x^3)\ tend\ vers\ f(0{,}0)$ et est négatif.

     Il n'y a donc pas d'extremum en O.

4. $f(x,y) = (x - y)e^{xy}$. f est clairement C² sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$.
   - Points critiques.

     On a $\boxed{\overrightarrow{grad}\, f = \left((-y^2 + xy + 1)e^{xy}\,;\ (x^2 - xy - 1)e^{xy}\right)}$ et les solutions de $\overrightarrow{grad}\, f = \vec{0}$ sont :
     $\boxed{B(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}), A(-\frac{\sqrt{2}}{2}\,; \frac{\sqrt{2}}{2})}$.

   - Pour A et B on trouve $\boxed{r = \frac{\sqrt{2}}{2}\, e^{-\frac{1}{2}}\ ,\ s = \frac{-3\sqrt{2}}{2}\, e^{-\frac{1}{2}}\ et\ t = \frac{\sqrt{2}}{2}\, e^{-\frac{1}{2}}}$, soit $\boxed{s^2 - rt = 4e^{-1} > 0}$.
     Il n'y a donc pas d'extremum en A et en B. On a deux points selles (ou points cols).

5. $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$. f est clairement C² sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$.
   - Points critiques.

     On a $\boxed{\overrightarrow{grad}\, f = (4x^3 - 4y\,; 4y^3 - 4x)}$ et les solutions de $\overrightarrow{grad}\, f = \vec{0}$ sont :
     $\boxed{O(0{,}0), A(1\,; 1)\ et\ B(-1\,; -1)}$.

   - Pour A et B on trouve $\boxed{r = 12, s = -4\ et\ t = 12}$, soit $\boxed{s^2 - rt = -128 < 0\ et\ r > 0}$ donc $f(A) = -2 = f(B)$ sont des minima locaux. La surface S est localement au dessus des plans tangents en A et B.
   - Pour O on trouve $\boxed{r = 0, s = -4\ et\ t = 0}$, soit $\boxed{s^2 - rt = 16 > 0}$.
     Il n'y a donc pas d'extremum en O. On a un point selle (ou point col).

<u>Autres exemples de recherche d'extrema locaux.</u>

	Points critiques	**Extrema ou pas**
$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + \frac{x^3}{4}$	O(0 ;0)	$s^2 - rt = -3 < 0$ et $r > 0 \Longrightarrow$ f admet un minimum local strict en O
	A(-2 ;1)	$s^2 - rt > 0 \Longrightarrow$ f n'admet pas d'extremum local en A

	Points critiques	**Extrema ou pas**
$f(x,y) = x^4 + y^4$	O(0 ;0)	$s^2 - rt = 0 \Longrightarrow$ On ne peut conclure par le théorème. Mais on montre que f admet en O un minimum local strict.

$f(x,y) = x^4 + y^3 + 2y \cos x + 5y$	Pas de points critiques

	Points critiques	**Extrema ou pas**
$f(x,y) = x(3 - 4x^2 - 3y^2)$	A(0 ;1) et B(0 ;-1)	$s^2 - rt = 36 > 0 \Longrightarrow$ f n'admet pas d'extremum local en A et B
	C(½ ;0) et D(- ½ ; 0)	$s^2 - rt = -36 < 0$ et $r > 0 \Longrightarrow$ f admet un minimum local strict en C et D

Exercice 8 Soit f une fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$. On suppose f de classe $\mathcal{C}^1$ et qu'en tout point, les trois dérivées partielles de f sont non nulles. On introduit $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, f(x,y,z) = 0\}$.
On suppose en outre qu'on peut, au moins au voisinage d'un point $(a,b,c) \in S$, définir trois applications X, Y, Z à deux variables de classe $\mathcal{C}^1$ telles que :

$$(x,y,z) \in S \iff x = X(y,z) \iff y = Y(x,z) \iff z = Z(x,y)$$

a) Exprimer les dérivées partielles d'ordre 1 de X, Y, Z en fonction de celles de f.
b) En déduire la formule suivante :

$$\frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial z}\frac{\partial Z}{\partial x} = -1$$

---

a) <u>**Calculons les dp$_1$ de X, Y et Z.**</u>

On pose $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ telle que $\phi(x,y,z) = (X(y,z); y; z)$ qui est clairement C^1($\mathbb{R}^3$).

Alors la matrice jacobienne de ϕ en M=(x,y,z) est $J_\phi(M) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x}(M) & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y}(M) & \frac{\partial \Phi_1}{\partial z}(M) \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x}(M) & \frac{\partial \Phi_2}{\partial y}(M) & \frac{\partial \Phi_2}{\partial z}(M) \\ \frac{\partial \Phi_3}{\partial x}(M) & \frac{\partial \Phi_3}{\partial y}(M) & \frac{\partial \Phi_3}{\partial z}(M) \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial X}{\partial y}(M) & \frac{\partial X}{\partial z}(M) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On écrit alors la composée $fo\phi$ qui donne $fo\phi(x,y,z) = f(X(y,z); y; z)$ puis la jacobienne de la composée :

$$\left(\frac{\partial fo\phi}{\partial x}(M)\,;\,\frac{\partial fo\phi}{\partial y}(M);\frac{\partial fo\phi}{\partial z}(M)\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\phi(M))\,;\,\frac{\partial f}{\partial y}(\phi(M));\frac{\partial f}{\partial z}(\phi(M))\right) \times \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial X}{\partial y}(M) & \frac{\partial X}{\partial z}(M) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce qui donne :

$$\boxed{\begin{cases} \frac{\partial fo\phi}{\partial x}(M) = 0 \\ \frac{\partial fo\phi}{\partial y}(M) = \frac{\partial f}{\partial x}(\phi(M)) \times \frac{\partial X}{\partial y}(M) + \frac{\partial f}{\partial y}(\phi(M)) \\ \frac{\partial fo\phi}{\partial z}(M) = \frac{\partial f}{\partial x}(\phi(M)) \times \frac{\partial X}{\partial z}(M) + \frac{\partial f}{\partial z}(\phi(M)) \end{cases}}$$

Or sur un voisinage de A=(a,b,c), on a pour tout point M=(x,y,z) de ce voisinage, $f(X(y,z); y; z) = fo\phi(x,y,z) = 0$.
De ce fait, puisque par composition, $fo\phi$ est aussi C^1, elle est de différentielle nulle et ses dérivées partielles sont nulles aussi.

Pour tout point M=(x,y,z) de ce voisinage de A=(a,b,c) on a donc :

$$\begin{cases} \frac{\partial fo\phi}{\partial x}(M) = 0 \\ \frac{\partial fo\phi}{\partial y}(M) = \frac{\partial f}{\partial x}(\phi(M)) \times \frac{\partial X}{\partial y}(M) + \frac{\partial f}{\partial y}(\phi(M)) = 0 \\ \frac{\partial fo\phi}{\partial z}(M) = \frac{\partial f}{\partial x}(\phi(M)) \times \frac{\partial X}{\partial z}(M) + \frac{\partial f}{\partial z}(\phi(M)) = 0 \end{cases}$$

Or on sait que les dérivées partielles de f sont non nulles en tout point de $\mathbb{R}^3$ donc, pour tout point M=(x,y,z) de ce voisinage de A=(a,b,c) on a :

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial y}(M) = \dfrac{-\dfrac{\partial f}{\partial y}(\phi(M))}{\dfrac{\partial f}{\partial x}(\phi(M))} \\ \dfrac{\partial X}{\partial z}(M) = \dfrac{-\dfrac{\partial f}{\partial z}(\phi(M))}{\dfrac{\partial f}{\partial x}(\phi(M))} \end{cases}}$$

On obtient les autres dp_1 par permutation circulaire :

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial Y}{\partial z}(M) = \dfrac{-\frac{\partial f}{\partial z}(\phi(M))}{\frac{\partial f}{\partial y}(\phi(M))} \\ \dfrac{\partial Y}{\partial x}(M) = \dfrac{-\frac{\partial f}{\partial x}(\phi(M))}{\frac{\partial f}{\partial y}(\phi(M))} \end{cases}} \text{ et } \boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial Z}{\partial x}(M) = \dfrac{-\frac{\partial f}{\partial x}(\phi(M))}{\frac{\partial f}{\partial z}(\phi(M))} \\ \dfrac{\partial Z}{\partial y}(M) = \dfrac{-\frac{\partial f}{\partial y}(\phi(M))}{\frac{\partial f}{\partial z}(\phi(M))} \end{cases}}$$

b) On a alors immédiatement l'égalité cherchée :

$$\boxed{\frac{\partial X}{\partial y}(M) \times \frac{\partial Y}{\partial z}(M) \times \frac{\partial Z}{\partial x}(M) = \frac{-\dfrac{\partial f}{\partial y}(\phi(M))}{\dfrac{\partial f}{\partial x}(\phi(M))} \times \frac{-\dfrac{\partial f}{\partial z}(\phi(M))}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(\phi(M))} \times \frac{-\dfrac{\partial f}{\partial x}(\phi(M))}{\dfrac{\partial f}{\partial z}(\phi(M))} = -1}$$

Exercice 9 Soit f une fonction C^3 de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$. Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$. On définit φ par $\varphi(t)=f(at,bt,ct)$. Exprimer à l'aide des dérivées partielles de f les dérivées d'ordre 1, 2 et 3 de φ.

Posons $(t) = (at, bt, ct)$, une fonction C^3 de $\mathbb{R}$ $\quad dans\ \mathbb{R}^3$.
On écrit alors la composée fog qui donne $\varphi(t) = fog(t) = f(at, bt, ct)$ puis la jacobienne de la composée ce qui donne aisément :

$$(\varphi'(t)\,) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(g(t))\,;\,\frac{\partial f}{\partial y}(g(t));\frac{\partial f}{\partial z}(g(t))\right)\times\begin{pmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial t}(t)\\ \frac{\partial g_2}{\partial t}(t)\\ \frac{\partial g_3}{\partial t}(t)\end{pmatrix}$$

Soit

$$\boxed{\varphi'(t) = a\times\frac{\partial f}{\partial x}(at,bt,ct) + b\times\frac{\partial f}{\partial y}(at,bt,ct) + c\times\frac{\partial f}{\partial z}(at,bt,ct)}$$

Pour la dérivée seconde on itère le procédé, on obtient en posant $\mathrm{M} = (at, bt, ct)$

$$\begin{aligned}\varphi''(t) = a\times\frac{\partial}{\partial x}\left(a\times\frac{\partial f}{\partial x}(M) + b\times\frac{\partial f}{\partial y}(M) + c\times\frac{\partial f}{\partial z}(M)\right) + b\\ \times\frac{\partial}{\partial y}\left(a\times\frac{\partial f}{\partial x}(M) + b\times\frac{\partial f}{\partial y}(M) + c\times\frac{\partial f}{\partial z}(M)\right)\\ +c\times\frac{\partial}{\partial z}\left(a\times\frac{\partial f}{\partial x}(M) + b\times\frac{\partial f}{\partial y}(M) + c\times\frac{\partial f}{\partial z}(M)\right)\end{aligned}$$

Soit en appliquant le théorème de Schwarz puisque f est C^2 (car C^3)

$$\boxed{\varphi''(t) = a^2\times\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M) + b^2\times\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M) + c^2\times\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(M) + \ 2\left(ab\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(M) + ac\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}(M) + bc\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(M)\right)}$$

Puis de même en appliquant le théorème de Schwarz puisque f est C^3

$$\boxed{\begin{gathered}\varphi'''(t) = a^3\times\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(M) + b^3\times\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(M) + c^3\times\frac{\partial^3 f}{\partial z^3}(M) + \\ +\,4\left(a^2b\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(M) + ab^2\frac{\partial^3 f}{\partial y^2\partial x}(M) + b^2c\frac{\partial^3 f}{\partial y^2\partial z}(M) + bc^2\frac{\partial^3 f}{\partial z^2\partial y}(M) + a^2c\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial z}(M) + ac^2\frac{\partial^3 f}{\partial z^2\partial x}(M)\right)\end{gathered}}$$

Exercice 10.

On cherche les fonctions C^2 de ℝ² vérifiant : $\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) : (E')}$

Pour cela on utilise le changement de variables affine : $\boxed{\Phi(x,y) = \left(\frac{x+y}{2} ; \frac{x-y}{2}\right) = (u,v)}$

Effectuer un changement de variable consiste à chercher une fonction $g : (u,v) \longmapsto g(u,v)$ de classe C^2 sur ℝ² telle que la fonction composée $f = go\Phi$ vérifie la condition donnée (E').

$f = go\Phi$ et donc : $\mathcal{J}_f(x,y) = \mathcal{J}_g(\Phi(x,y)) \times \mathcal{J}_\Phi(x,y)$

On obtient l'égalité :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) ; \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \left(\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) ; \frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\right) \times \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial \Phi_2}{\partial y}(x,y) \end{bmatrix}$$

soit

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) ; \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \left(\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) ; \frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\right) \times \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

d'où

$$\boxed{(S) : \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) + \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) - \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) \end{cases}}$$

Il faut alors obtenir les dérivées partielles secondes de la fonction f (qui est C^2) en fonction de celles de g. Pour cela on va utiliser une petite astuce.

On interprète les égalités (S) de la façon suivante : $\boxed{(S') : \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\right) \\ \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v}\right) \end{cases}}$

Alors en combinant (S) et (S') :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) - \frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\right)$$

On développe en utilisant la linéarité de l'opérateur dérivée partielle et le fait que la fonction f étant de classe C^2, on peut appliquer le théorème de Schwarz :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v) + 2\,\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v) + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u,v)\right)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v) - 2\,\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v) + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u,v)\right)$$

L'EDP (E') devient alors :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) \qquad = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) : (E')$$
$$\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v) + 2\,\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v) + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u,v)\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v) - 2\,\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v) + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u,v)\right)$$

soit

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v) = 0 \quad (E_g)}}$$

On sait que les fonctions g de classe C^2 vérifiant cette EDP (E_g) sont de la forme :

$$g(u,u) = H(v) + k(u) \quad avec\ H\ et\ k\ de\ classe\ C^2$$

Et donc les fonctions f de classe C^2 qui vérifient (E') sont de la forme :

$$\boxed{\begin{array}{c}\boldsymbol{f(x,y) = H\left(\frac{x-y}{2}\right) + k\left(\frac{x+y}{2}\right)} \\ avec\ H\ et\ k, fonctions\ d'une\ seule\ variable\ de\ classe\ C^2\end{array}}$$