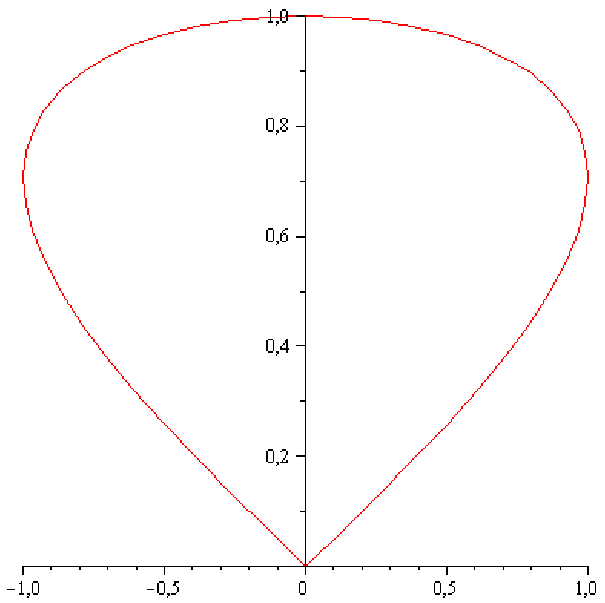
TD n°5 : CORRECTION

Intégrales doubles, triples, théorème de Green-Riemann, courbes paramétrées. .

Exercice 1 Soit Γ le chemin défini par $x(t) = \sin(2t)$, $y(t) = \cos(t)$ avec t variant de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$.
a) Faire une étude rapide de la courbe Γ, et justifier que c'est bien un chemin fermé. On appelle S la surface englobée par Γ.
b) Déterminer l'aire de S.
c) Déterminer $\iint_S x\,dx\,dy$

a)

t	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{4}$		0		$+\frac{\pi}{4}$		$+\frac{\pi}{2}$
$x'(t) = 2\cos 2t$	-2	-	0	+			0	-	-
$x(t) = \sin 2t$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0
$y(t) = \cos t$	0	$\nearrow$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	0
$y'(t) = -\sin t$	1				0				-1



Γ est donc bien un chemin fermé, on a $M\left(-\frac{\pi}{2}\right) = M\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0;0)$ et on ne parcourt qu'une seule fois le chemin sur l'intervalle donné.

b) Aire de S.

Calcul d'aires planes.

Avec $\omega(x,y) = \frac{1}{2}(-ydx + xdy)$, ou $\omega(x,y) = -ydx$ ou $\omega(x,y) = xdy$ on a :

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$$

et donc : $Aire\ (D) = \iint_D 1\ dxdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \iint_D dxdy = \int_{\Gamma = \partial D} (Pdx + Qdy)$

$$\boxed{Aire(D) = \frac{1}{2}\int_{\Gamma = \partial D} (xdy - ydx) = -\int_{\Gamma = \partial D} ydx = \int_{\Gamma = \partial D} xdy}$$

En coordonnées polaires cela donne : $\boxed{Aire(D) = \frac{1}{2}\int_{\Gamma = \partial D} r^2 d\theta}$

Attention ici, le sens de parcours n'est pas le sens direct :

$$\mathcal{A}ire(S) = -\int_{\Gamma = \partial D} xdy = -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(2t) \times (-\sin t)\, dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin t \cos t \times (\sin t)\, dt = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t \times \sin^2 t\, dt$$

$$\mathcal{A}ire(S) = 2\left[\frac{(\sin t)^3}{3}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \boxed{\mathbf{\frac{4}{3}}}$$

---

c) $\boldsymbol{\iint_S xdxdy}$

Formule de Green-Riemann

Soit S un compact simple de $\mathbb{R}^2$, on note (Γ) la courbe délimitant S, orientée dans le sens direct. On note $\Gamma = \partial S$ le bord de S.

Soit ω une forme différentielle **de classe C¹** définie dans S. $\boxed{\iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_{\Gamma = \partial S} Pdx + Qdy}$

Avec $\omega(x,y) = Pdx + Qdy = -xydx$ on a : $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = x.$

Puis on applique Green-Riemann (attention au sens de parcours)

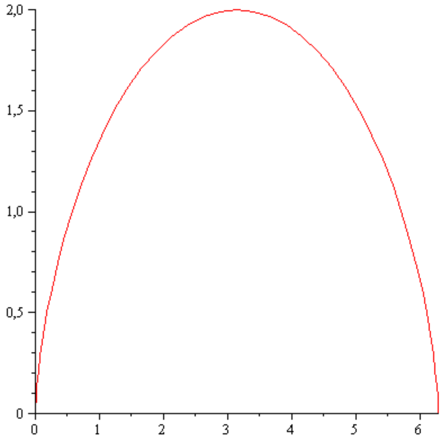
$$\iint_S xdxdy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = -\left(\int_{\Gamma = \partial S} Pdx + Qdy\right) = \int_{\Gamma = \partial S} xydx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(2t) \times \cos t \times (2\cos 2t)dt$$

$\iint_S xdxdy = 0$ car l'intégrande est impaire et on intègre sur un intervalle symétrique par rapport à 0.

Exercice 2 Calculer l'aire de la portion de plan délimitée par la courbe d'équation paramétrique

$$\gamma(t) = (t - \sin t\ ,\ 1 - \cos t)$$

(avec t variant de 0 à 2π) et l'axe des abcisses.

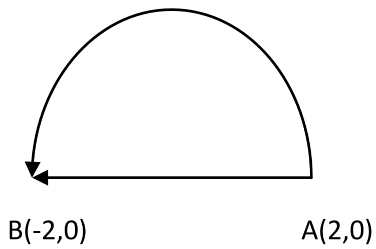


$\mathcal{A}ire(S) = \left|\int_{\Gamma=\partial D} xdy\right|$ où $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ avec Γ_1 = courbe paramétée par γ et Γ_2 = segment de $A(2\pi; 0)$à $O(0; 0)$

- $\int_{\Gamma_1} xdy = \int_0^{2\pi}(t - \sin t) \times (\sin t)dt = \int_0^{2\pi} t \sin t\, dt - \int_0^{2\pi}(\sin t)^2 dt$
  $\int_0^{2\pi}(t - \sin t) \times (\sin t)dt = [\sin t - t\cos t]_0^{2\pi} - \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{2\pi} = -2\pi - \pi = -3\pi$
- $\int_{\Gamma_2} xdy = 0$

$$\boxed{\boldsymbol{\mathcal{A}ire(S) = \left|\int_0^{2\pi}(t - \sin t) \times (\sin t)dt\right| = 3\pi}}$$

Exercice 3 Soit $A(2,0)$ et $B(-2,0)$, Γ_1 le demi-cercle supérieur de diamètre $[AB]$, Γ_2 le segment $[AB]$, ces deux chemins parcourus de A vers B. S la surface délimitée par Γ_1 et Γ_2.
Soient
$$a = \int_{\Gamma_1} 4\,\mathrm{d}x + xy\,\mathrm{d}y \ , \quad b = \int_{\Gamma_2} 4\,\mathrm{d}x + xy\,\mathrm{d}y \ , \quad c = \iint_S y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
a) Calculer directement a, b, c.
b) Justifier pourquoi $a = b + c$



Sur $\boldsymbol{\Gamma_1}$:

Par passage en coordonnées polaires, $\begin{cases} x = & x(t) = 2\cos t \\ y = & y(t) = 2\sin t \end{cases}$

avec t qui varie de 0 à π. Donc $\begin{cases} x'(t) & = -2\sin t \\ y'(t) & = 2\cos t \end{cases}$

Sur $\boldsymbol{\Gamma_2}$:

$\begin{cases} x = & x(t) = t \\ y = & y(t) = 0 \end{cases}$

avec t qui varie de2 à -2. Donc $\begin{cases} x'(t) & = 1 \\ y'(t) & = 0 \end{cases}$

$$a = \int_{\Gamma_1} 4dx + xydy = 8\int_0^{\pi} [-\sin t + (cos^2 t)\sin t]\ dt = \left[8\cos t - \frac{(\cos t)^3}{3}\right]_0^{\pi} = \boxed{-\frac{\mathbf{32}}{\mathbf{3}}}$$

$$b = \int_{\Gamma_2} 4dx + xydy = \boxed{\mathbf{-16}}$$

$c = \iint_S\ ydxdy$ On passe en polaires

$$c = \int_0^2 \left(\int_0^{\pi} r^2 \sin t\ dt\right) rdr = \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^2 \times [-\cos t]_0^{\pi} = \boxed{\frac{\mathbf{16}}{\mathbf{3}}}$$

---

b)

En posant : $\omega(x,y) = 4dx + xydy = Pdx + Qdy$, on a : $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = y - 0 = y$

Formule de Green-Riemann

Soit D un compact simple de $\mathbb{R}^2$, on note (Γ) la courbe délimitant D, orientée dans le sens direct. On note $\Gamma = \partial D$ le bord de D. Soit ω une forme différentielle **<u>de classe C¹</u>** définie dans D. $\boxed{\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_{\Gamma = \partial D} Pdx + Qdy}$

Attention au sens de parcours.

$$c = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \iint_S\ ydxdy = \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial D} Pdx + Qdy = \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial D} 4dx + xydy$$
D'après le th. de Green-Riemann

$$c = \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial D} (4dx + xydy) = \int_{\Gamma_1} (4dx + xydy) - \int_{\Gamma_2} (4dx + xydy) = a - b$$
D'après la relation de Chasles

Donc $\boxed{\boldsymbol{a = b + c}}$

Exercice 4 Calculer

$$\iiint_D z^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \quad \text{où} \quad D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, x^2+y^2\leq 4, 0\leq z\leq 1\}$$

On intègre sur un cylindre.

Il faut faire attention à l'ordre d'intégration.

Méthode 1 :

Le volume D est la région comprise à l'intérieur du cylindre d'équation : $4 = x^2 + y^2$, sous le plan horizontal d'équation $z = 1$ et au dessus du plan (xOy).

$$D = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3, x^2+y^2 \leq 4\,, 0 \leq z \leq 1\}.$$

On peut faire varier z de 0 à 1 et prendre (x ;y) dans le disque de centre O et de rayon 2.

$$D = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3, 0 \leq z \leq 1, (x;y) \in D_z\}.$$

$$D_z = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2, x^2+y^2 \leq 4\} = Disque\ (O; R=2).$$

Par passage en coordonnées cylindriques on obtient :

$$I = \int_0^2 \left(\iint_{D_z} z^{x^2+y^2}\,dxdy\right)dz = \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi}\int_0^1 r\,z^{r^2} drdt\right)dz$$

En appliquant Fubini :

$$I = \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi}\int_0^1 r\,z^{r^2} drdt\right)dz = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^2\left(\int_0^1 r\,z^{r^2}dz\right)dr\right)dt$$

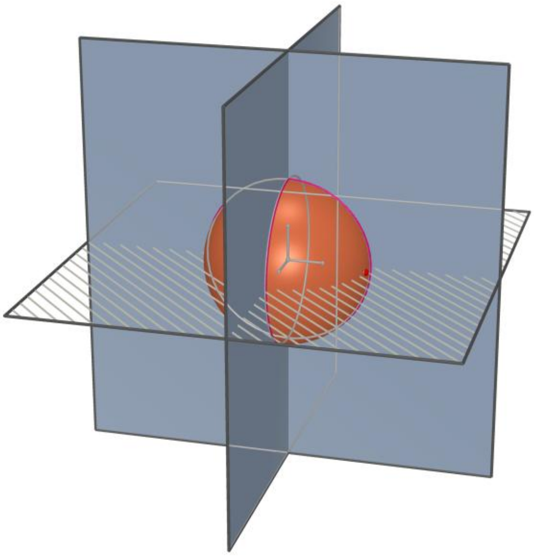
$$I = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^2\left[r\,\frac{z^{r^2+1}}{r^2+1}\right]_0^1 dr\right)dt = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^2 \frac{r}{r^2+1}dr\right)dt = \int_0^{2\pi}\left[\frac{\ln(r^2+1)}{2}\right]_0^2 dt$$

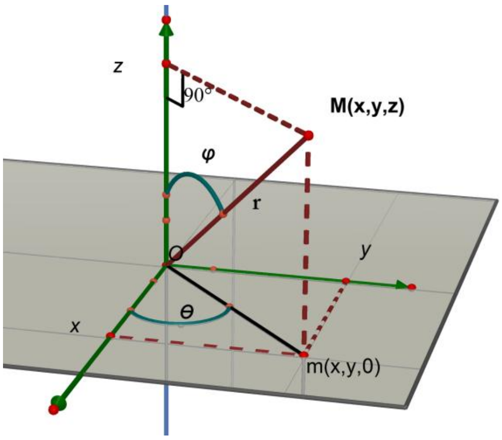
$$\boxed{\boldsymbol{I = \pi \ln 5}}$$

Méthode 2 :

$$I = \int_0^1\left(\int_0^2\left(\int_0^{2\pi} r\,z^{r^2}dt\right)dr\right)dz = \boxed{\boldsymbol{\pi\int_0^1 \frac{z^4-1}{\ln z}\,dz}}$$

Exercice 5 Soit $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \ , \ 0 \leq y \ , \ x^2+y^2+z^2 \leq 4 \ \}$.
Calculer $\iiint_V xyz \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$.





Sphériques

$$\begin{cases} x = (r\sin\varphi)\cos\theta \\ y = (r\sin\varphi)\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ \theta \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right] \\ \varphi \in [0\,;\pi] \end{cases}$$

$$|\det(J)| = |-r^2 \sin\varphi|$$

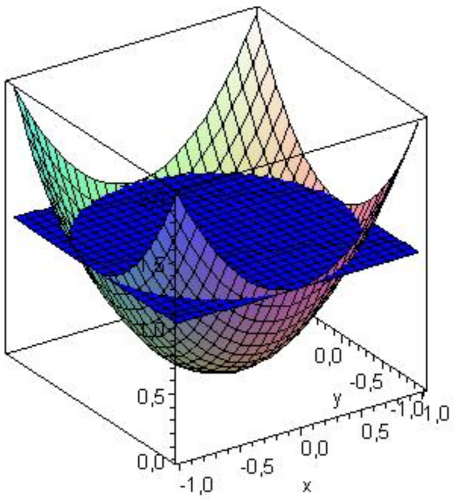
$$\boxed{\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{K=\phi^{-1}(D)} f\begin{pmatrix}(r\sin\varphi)\cos\theta \\ (r\sin\varphi)\sin\theta \\ r\cos\varphi\end{pmatrix} \times r^2 \sin\varphi \ drd\theta d\varphi}$$

$$\iiint_V xyz\ dxdydz = \int_0^2 \int_0^\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^5 (\sin\varphi)^3 \ \cos\varphi \ \cos\theta \ \sin\theta \ dr\ d\varphi\ d\theta$$

$$\iiint_V xyz\ dxdydz = \left[\frac{r^6}{6}\right]_0^2 \times \left[\frac{(\sin\varphi)^4}{4}\right]_0^2 \times \left[-\frac{\cos^2\theta}{2}\right]_0^2 = \boxed{0}$$

Exercice 6 Soit V le volume défini par $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$.
a) Calculer le volume de V.
b) Calculer $\iiint_V x^2 z \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z$

a)



Le volume V est la région comprise à l'intérieur du paraboloïde d'équation : $z = x^2 + y^2$, sous le plan horizontal d'équation $z = 1$.

$$V = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}.$$

On peut faire varier z de 0 à 1 et prendre (x ;y) dans le disque de centre O et de rayon $\sqrt{z}$.

$$V = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3, 0 \leq z \leq 1, (x; y) \in D_z\}.$$

$$D_z = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq z\} = Disque\left(O; R = \sqrt{z}\right).$$

Par Fubini on obtient :

$$V = \int_0^1 \left(\iint_{D_z} dxdy \right) dz$$

$$V = \int_0^1 \left(\pi \left(\sqrt{z}\right)^2 \right) dz = \int_0^1 (\pi z) dz = \pi \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^1 \qquad \boxed{\boldsymbol{V = \frac{\pi}{2}}}$$

b) $\iiint_V x^2 z \, dxdydz = \int_0^1 \left(\iint_{D_z} x^2 z dxdy \right) dz = \int_0^1 z \left(\iint_{D_z} x^2 dxdy \right) dz$

- $\left(\iint_{D_z} \boldsymbol{x^2 dxdy} \right)$ **On va passer en coordonnées polaires.**

$$\iint_{D_z} x^2 dxdy = \int_0^{\sqrt{z}} \left(\int_0^{2\pi} (r\cos t)^2 \, dt \right) rdr = \frac{\pi z^2}{4}$$

$$\iiint_V x^2 z \, dxdydz = \int_0^1 z \left(\iint_{D_z} x^2 dxdy \right) dz = \int_0^1 z \left(\frac{\pi z^2}{4} \right) dz = \boxed{\boldsymbol{\frac{\pi}{16}}}$$

Autre exemple :

Evaluons l'intégrale triple $\iiint_R y\,dx\,dy\,dz$ sur la région $R = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid 0 \le x,\ 0 \le y,\ (x^2+y^2) \le z \le 1\}$. Cette région est celle contenue dans le premier octant à l'intérieur du paraboloïde d'équation $z = x^2 + y^2$ et sous le plan horizontal d'équation $z = 1$. Elle est du type de la proposition 9.2. Nous avons représenté la région R à la figure 9.3.

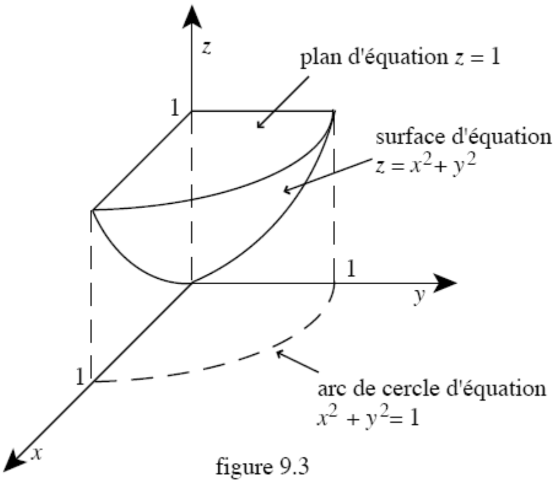


figure 9.3

En effet, $R = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le \sqrt{1-x^2},\ (x^2+y^2) \le z \le 1\}$. Donc

$$\begin{aligned}
\iiint_R y\,dx\,dy\,dz &= \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \left(\int_{x^2+y^2}^1 y\,dz \right) dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \left(yz \right]_{z=x^2+y^2}^{z=1} dy \right) dx \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} (y - y(x^2+y^2))\,dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \left((1-x^2)y - y^3 \right) dy \right) dx \\
&= \int_0^1 \left((1-x^2)\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4} \right]_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^1 \frac{(1-x^2)^2}{2} - \frac{(1-x^2)^2}{4}\,dx \\
&= \frac{1}{4}\int_0^1 (1-x^2)^2\,dx = \frac{1}{4}\int_0^1 (1 - 2x^2 + x^4)\,dx \\
&= \frac{1}{4}\left(x - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) = \frac{2}{15}.
\end{aligned}$$

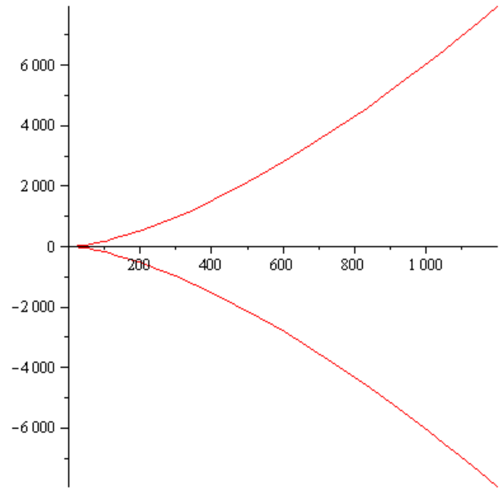
Exercice 7 On étudie la courbe définie par $\gamma(t) = (3t^2 - 1, t^3 - 3t)$.

a) Déterminer d'éventuelles symétries de la courbe.

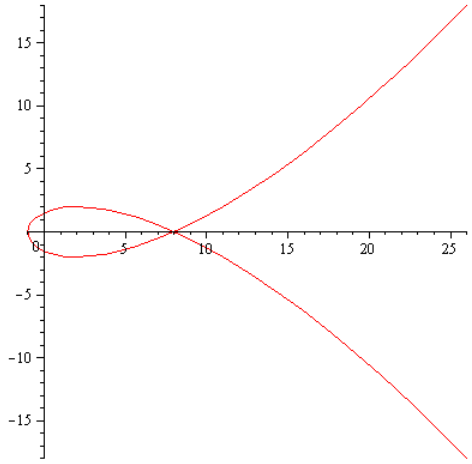
b) Déterminer les points réguliers et biréguliers de la courbe.

c) La courbe admet-elle des asymptotes ou des directions asymptotiques ?

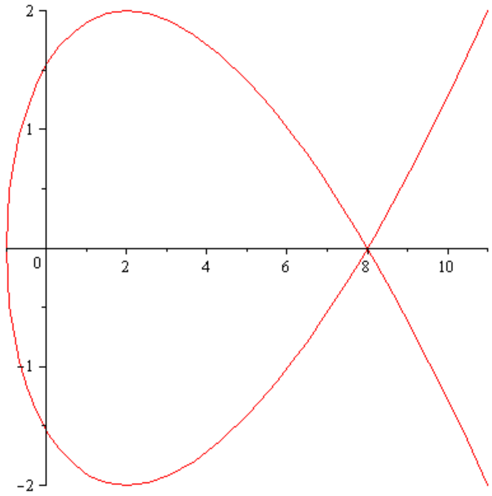
d) Après étude des variations, représenter la courbe.



t de -20 à 20



t de -3 à 3



t de -2 à 2

a) <u>Symétrie.</u>

On utilise un changement de paramétrage pour Γ d'équation :

$$\gamma(t) = \begin{cases} x = & x(t) = 3t^2 - 1 \\ y = & y(t) = t^3 - 3t \end{cases} \qquad \text{sur } I = \mathbb{R}$$

Soit $g : t \mapsto g(t)$ de I dans I telle que $I = I' \cup g(I')$ et $I' \cap g(I') = \emptyset$ *ou un singleton*

Suivant la formule liant $\gamma o g$ et γ, on fait varier t dans I', d'où une courbe Γ', puis une courbe Γ'' déduite de Γ', et $\Gamma = \Gamma' \cup \Gamma''$

	Isométrie permettant de passer de Γ' à Γ''
$\begin{cases} x(g(t)) = x(t) \\ y(g(t)) = y(t) \end{cases}$	Identité
$\begin{cases} x(g(t)) = x(t) + a \\ y(g(t)) = y(t) + b \end{cases}$	Translation de vecteur $a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}$
$\begin{cases} x(g(t)) = -x(t) \\ y(g(t)) = y(t) \end{cases}$	Symétrie par rapport à (Oy)
$\begin{cases} x(g(t)) = x(t) \\ y(g(t)) = -y(t) \end{cases}$	Symétrie par rapport à (Ox)
$\begin{cases} x(g(t)) = -x(t) \\ y(g(t)) = -y(t) \end{cases}$	Symétrie par rapport au point O
$\begin{cases} x(g(t)) = y(t) \\ y(g(t)) = x(t) \end{cases}$	Symétrie par rapport à la première bissectrice

Généralement on teste :

- $\boldsymbol{g(t) = -t}$ pour $I =]-a; a[$ et alors I' $= [0; a[$
- $\boldsymbol{g(t) = a + b - t}$ pour $I = [a; b]$ et alors $I' = [a\,; \frac{a+b}{2}[$
- $\boldsymbol{g(t) = \frac{1}{t}}$ pour $I =]\,0; +\infty[$ et alors I' $=]0; 1]$

Ici :

- $\gamma(-t) = \begin{cases} x = & x(-t) = x(t) \\ y = & y(-t) = -y(t) \end{cases}$ Donc pour $I =]-\infty; \infty[$, on a I' $= [0; \infty[$

On passe de Γ' (pour t dans I') à Γ'' par symétrie par rapport à l'axe (Ox)

b) **Points réguliers et biréguliers de la courbes.**

Définition.

Soit Γ la trajectoire de l'arc paramétré $\gamma: t \longmapsto \gamma(t) = M(t)$ de classe C^1

On dit que M(t) est **un point régulier** de Γ si et seulement si : $\boxed{\overrightarrow{\gamma'}(t) \neq \vec{0}}$

Si γ est de classe C^2

On dit que M(t) est **un point birégulier** de Γ si et seulement si : **la famille** $\left(\overrightarrow{f'(t)}; \overrightarrow{f''(t)}\right)$ **est libre.**

Pour les déterminer on écrit que le déterminant de la famille est non nul

Un point non régulier est dit **stationnaire.**

Théorèmes.

γ un arc paramétré de classe C^1

En tout point régulier M(t) de Γ, Γ admet une tangente et celle-ci est dirigé par $\overrightarrow{\gamma'}(t)$.

Soit M(t) point régulier de Γ, et T(t) la tangente en M(t)à Γ.

- Si $x'(t) \neq 0$, T(t) a pour coeff. directeur : $\frac{y'(t)}{x'(t)}$
- Si $x'(t) = 0$, T(t) est parallèle à (Oy) (dans ce cas on a y'(t) non nul car M(t) régulier)

Théorème.

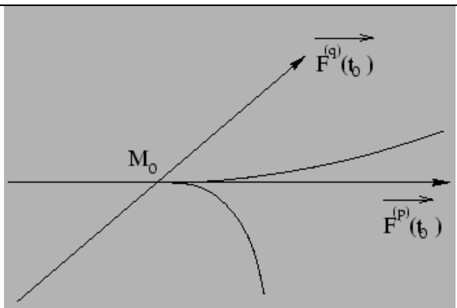
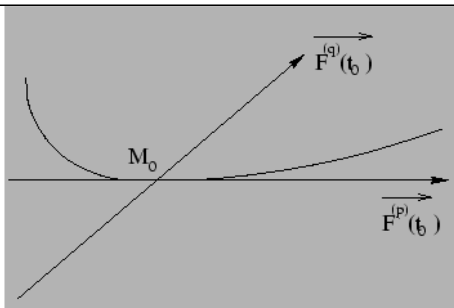
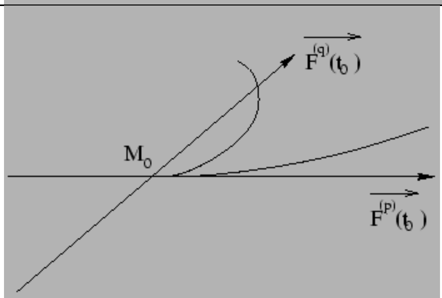
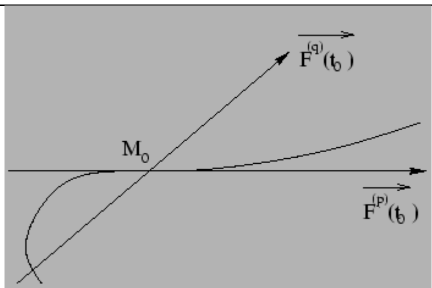
γ un arc paramétré de classe C^k, et $A(t) = \gamma(t)$

Si l'un au moins des vecteurs dérivés successifs $\overrightarrow{f'(t)}; \overrightarrow{f''(t)}; \dots ; \overrightarrow{f^{(k)}(t)}$ est non nul, alors Γ admet en A(t) une tangente et celle-ci est dirigée par le premier vecteur dérivé successif qui soit non nul.

Allure de la courbe au voisinage d'un point.

Soit p le plus petit entier ≥ 1 tel que : $\overrightarrow{\boldsymbol{f^{(p)}(t)}} \neq \vec{\mathbf{0}}$

Soit q le plus petit entier $>$ p tel que : $\left(\overrightarrow{\boldsymbol{f^{(p)}(t)}}; \overrightarrow{\boldsymbol{f^{(p)}(t)}}\right)$**soit libre**

 p **pair et** q **impair : point de rebroussement de** $1^{ère}$ **espèce**	 p **impair et** q **pair : point ordinaire**
 p **pair et** q **pair : point de rebroussement de** $2^{ème}$ **espèce**	 p **impair et** q **impair : point d'inflexion**

Points réguliers de l'arc paramétré $\boldsymbol{\gamma}$.

Ici : $\gamma(t) = \begin{cases} x = & x(t) = 3t^2 - 1 \\ y = & y(t) = t^3 - 3t \end{cases}$ donc $\gamma'(t) = \begin{cases} x'(t) = 6t \\ y'(t) = 3t^2 - 3 \end{cases}$

$\gamma'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x'(t) = 6t = 0 \\ y'(t) = 3t^2 - 3 = 0 \end{cases}$

ce qui est impossible car si $x'(t) = 0$, alors $t = 0$ or $y'(0) = -3 \neq 0$

De ce fait l'arc paramétré $\boldsymbol{\gamma}$ **est régulier car tous ces points sont réguliers**.

Points biréguliers de l'arc paramétré $\boldsymbol{\gamma}$.

$\gamma'(t) = \begin{cases} x'(t) = 6t \\ y'(t) = 3t^2 - 3 \end{cases}$ donc $\gamma''(t) = \begin{cases} x''(t) = 6 \\ y''(t) = 6t \end{cases}$

Alors : $x'(t) \times y''(t) - y'(t) \times x''(t) = 36t^2 - 18t^2 + 18 = 0$

implique : $18t^2 + 18 = 18(t^2 + 1) = 0$.

Donc $x'(t) \times y''(t) - y'(t) \times x''(t) \neq 0$ *pour tout réel t*

De ce fait l'arc paramétré $\boldsymbol{\gamma}$ **est birégulier car tous ces points sont biréguliers**.

Exercice 8 Après étude, représenter les courbes paramétrées par :

1. $\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$
2. $\gamma(t) = (\text{ch } t, \text{sh } t)$
3. $\gamma(t) = (\frac{t^2}{1+t^2}, \frac{t^3}{1+t^2})$
4. $\gamma(t) = (t^2 + t^4, t^2 - t^3)$
5. $\gamma(t) = (\cos t, \sin^3 t)$
6. $\gamma(t) = (2t + t^2, 2t - \frac{1}{t^2})$
7. $x(t) = \frac{1+t^2}{1-3t^2}$, $y(t) = tx(t)$
8. $x(t) = \tan t$, $y(t) = \sin(2t)$
9. $\gamma(t) = (3\cos t - \cos 3t, 3\sin t - \sin 3t)$
10. $\gamma(t) = (\sin t, \cos^2 t\ (2 - \cos t))$

1°) $\overrightarrow{f(t)} = \begin{pmatrix} \cos^3 t \\ \sin^3 t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

- $\overrightarrow{f(-t)}$ est 2π-périodique, <u>étude sur [-π ;π]</u>

- **<u>Symétries</u>**.
  - $\overrightarrow{f(-t)} = \begin{pmatrix} x(t) \\ -y(t) \end{pmatrix}$ donc Γ présente une symétrie /(Ox), on réduit **<u>l'étude à [0 ;π].</u>**
  - $\overrightarrow{f(\pi - t)} = \begin{pmatrix} -x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ donc Γ présente une symétrie /(Oy), on réduit **<u>l'étude à</u>** [**0** ; $\frac{\pi}{2}$].

  Remarque (on pouvait encore réduire l'intervalle d'étude mais bon ...)

- **<u>Variations</u>**.

$\overrightarrow{f'(t)} = \begin{pmatrix} -3\sin t\ \cos^2 t \\ 3\cos t\ \sin^2 t \end{pmatrix}$ et tableau de variations aisé.

t	**0**		$\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$
$x'(t)$	**0**	-	**0**
x	**1**	↘	**0**
y	**0**	↗	**1**
$y'(t)$	**0**	+	**0**

- **Points non réguliers**.

Sur l'intervalle d'étude, $\overrightarrow{f'(t)} = \vec{0}$ ssi $t = 0\ ou\ \frac{\pi}{2}$, ce sont les deux seuls points non réguliers.

- <u>**Etude aux points caractéristiques**</u>.
  - **Pour t=0 : En $\boldsymbol{M(0) = A(1\,;0)}$**

    A=M(0) est un point non régulier car $\overrightarrow{f'(0)} = \vec{0}$

    On calcule : $\overrightarrow{f''(0)} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$, dirige la tangente en A.

    $\overrightarrow{f'''(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\left(\overrightarrow{\boldsymbol{f^{(2)}(t)}} ; \overrightarrow{\boldsymbol{f^{(3)}(t)}}\right)$ **est libre**

    donc p=2 et q=3, Γ présente en A **un point de rebroussement de 1ère espèce.**

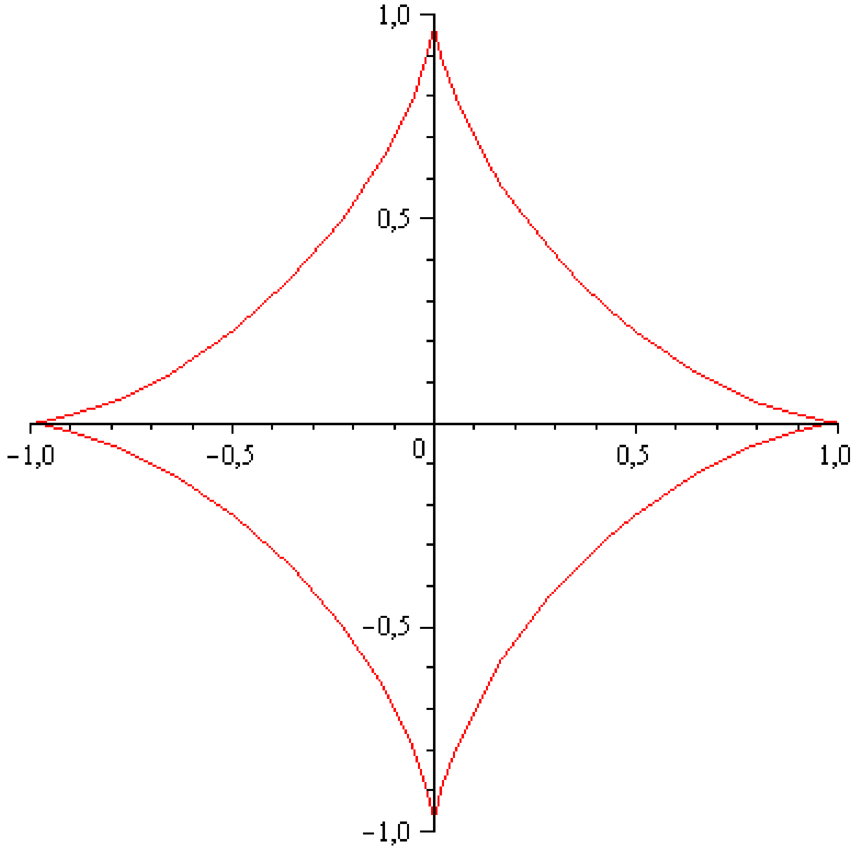
  - **Pour $\boldsymbol{t = \frac{\pi}{2}}$: En $\boldsymbol{M(\frac{\pi}{2}) = B(0\,;1)}$**

    $B = M\left(\frac{\pi}{2}\right)$ est un point non régulier car $\overrightarrow{f'(0)} = \vec{0}$

    On calcule : $\overrightarrow{f''\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, dirige la tangente en B.

    $\overrightarrow{f'''\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\left(\overrightarrow{\boldsymbol{f^{(2)}(t)}} ; \overrightarrow{\boldsymbol{f^{(3)}(t)}}\right)$ **est libre**

    donc p=2 et q=3, Γ présente en B **un point de rebroussement de 1ère espèce.**



2°) $\overrightarrow{f(t)} = \begin{pmatrix} \text{ch}\, t = \frac{e^x+e^{-x}}{2} \\ \text{sh}\, t = \frac{e^x-e^{-x}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ définie sur $\mathbb{R}$

- **Symétries**.
  - $\overrightarrow{f(-t)} = \begin{pmatrix} x(t) \\ -y(t) \end{pmatrix}$ donc Γ présente une symétrie $/(\text{O}x)$, on réduit **l'étude à [0 ;+∞[.**
- **Variations**.

$\overrightarrow{f'(t)} = \begin{pmatrix} sh\ t \\ ch\ t \end{pmatrix}$ et tableau de variations aisé.

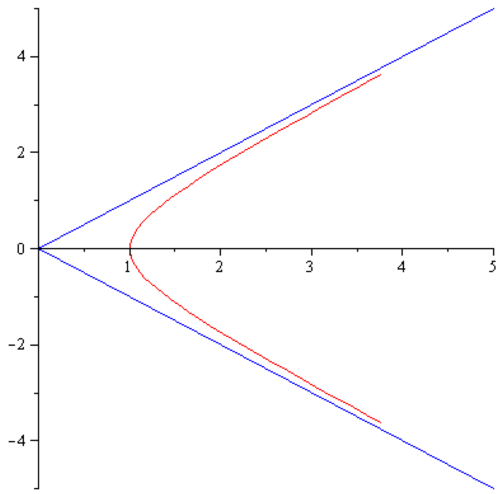
t	**0**		$+\infty$
$x'(t)$	**0**	+	0
x	**1**	↗	$+\infty$ 0
y	**0**	↗	$+\infty$
$y'(t)$	**1**	+	

- **Points non réguliers** :

  Il n'y a pas de points non réguliers car $\overrightarrow{f'(t)} \neq \vec{0}$ pour tous les t. En effet, si $x'(t) \neq 0\ \forall\ t \in \mathbb{R}$
- **Etude aux points caractéristiques**.
  - **Pour t=0 : En $M(0) = A(1\,;0)$**

    $A = M(0)\,, \overrightarrow{f'(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ qui dirige la tangente en A.

- **Branches infinies**.
  - Γ présente une branche infinie en **+∞** car $\lim_{t\to+\infty} \left\|\overrightarrow{f(t)}\right\| = +\infty$.
  - $\lim_{+\infty} x(t) = +\infty = \lim_{+\infty} y(t)$ donc on étudie le rapport y/x
  - $\begin{cases} \lim_{t\to+\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = 1 \\ \lim_{t\to+\infty} y(t) - 1 \times x(t) = 0 \end{cases}$,
    alors Γ admet une **pour asymptote la droite d'équation** $\boldsymbol{y = 1x + 0 = x}$.



3°) $\overrightarrow{f(t)} = \begin{pmatrix} \frac{t^2}{1+t^2} \\ \frac{t^3}{1+t^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ définie sur $\mathbb{R}$

- **Symétries**.
  - $\overrightarrow{f(-t)} = \begin{pmatrix} x(t) \\ -y(t) \end{pmatrix}$ donc Γ présente une symétrie $/(\text{Ox})$, on réduit **l'étude à [0 ;+∞[.**
- **Variations**. : $\overrightarrow{f'(t)} = \begin{pmatrix} \frac{2t}{(1+t^2)^2} \\ \frac{t^2(3+t^2)}{(1+t^2)^2} \end{pmatrix}$ et tableau de variations aisé.

t	0		+∞
$x'(t)$	0	+	0
x	0	↗	1 0
y	0	↗	+∞
$y'(t)$	0	+	

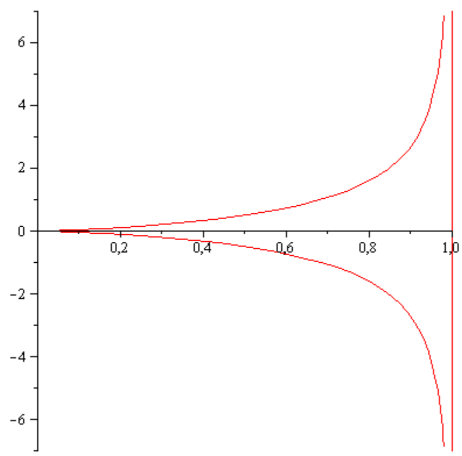
- **Points non réguliers**.
  Sur l'intervalle d'étude, $\overrightarrow{f'(t)} = \vec{0}$ ssi $t = 0$, $A(0;0) = M(0)$ est le seul point non régulier.
- **Etude aux points caractéristiques**.
  - **Pour t=0**, $A(0;0) = M(0)$ est un point non régulier car $\overrightarrow{f'(0)} = \vec{0}$

    On calcule : $\overrightarrow{f''(0)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, dirige la tangente en A.

    $\overrightarrow{f'''(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\left(\overrightarrow{f^{(2)}(t)}; \overrightarrow{f^{(3)}(t)}\right)$ **est libre**

    donc p=2 et q=3, Γ présente en A **un point de rebroussement de 1ère espèce.**

- **Branches infinies**.
  - Γ présente une branche infinie en $+\infty$ car $\lim_{t\to+\infty} \left\|\overrightarrow{f(t)}\right\| = +\infty$.
  - $\begin{cases} \lim_{t\to a} y(t) = +\infty \\ \lim_{t\to a} x(t) = 1 \end{cases}$,
    alors Γ admet **pour asymptote la droite d'équation $x = 1$.**



4°) $\overrightarrow{f(t)} = \begin{pmatrix} t^2 + t^4 \\ t^2 - t^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ définie sur $\mathbb{R}$

- **<u>Aucune Symétrie</u>**.
- **<u>Variations</u>**. : $\overrightarrow{f'(t)} = \begin{pmatrix} 2t(2t^2+1) \\ t(2-3t) \end{pmatrix}$ et tableau de variations aisé.

t	-∞		0		2/3		+∞
$x'(t)$		-	0	+	68/27	+	0
x	+∞	$\searrow$	0	$\nearrow$	52/81	$\nearrow$	+∞ 0
y	+∞				4/27	$\searrow$	-∞
$y'(t)$		-	0	+	0	-	

- **<u>Points non réguliers</u>**.
  Sur l'intervalle d'étude, $\overrightarrow{f'(t)} = \vec{0}$ ssi $t = 0$, $A(0;0) = M(0)$ est le seul point non régulier.

- **<u>Etude aux points caractéristiques</u>**.
  - **Pour t=0**, $A(0;0) = M(0)$ est un point non régulier car $\overrightarrow{f'(0)} = \vec{0}$
    On calcule : $\overrightarrow{f''(0)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, dirige la tangente en A.

    $\overrightarrow{f'''(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix}$ et $\left(\overrightarrow{\boldsymbol{f^{(2)}(t)}}; \overrightarrow{\boldsymbol{f^{(3)}(t)}}\right)$ **est libre**

    donc p=2 et q=3, Γ présente en A **un point de rebroussement de 1ère espèce**.

  - **Pour t=2/3 : En $\boldsymbol{M}\left(\frac{2}{3}\right) = \boldsymbol{B}\left(\frac{52}{81}; \frac{4}{27}\right)$**

    $B = \boldsymbol{M}\left(\frac{2}{3}\right)$ est un point régulier car $\overrightarrow{f'\left(\frac{2}{3}\right)} = \begin{pmatrix} \frac{68}{27} \\ 0 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ qui dirige la tangente en B.

- **<u>Branches infinies</u>**.
  - Γ présente une branche infinie en **+∞** car $\lim_{t\to+\infty} \left\|\overrightarrow{f(t)}\right\| = +\infty$.
  - $\lim_{t\to\pm\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = 0$,
    alors Γ admet une **branche parabolique de direction asymptotique (Ox)**.

- **Intersection de la courbe avec l'axe (Ox)**.

  $y(t) = 0 \; ssi \; t = 0 \; ou \; 1$ et $x(0) = 0, x(1) = 2$

  Donc les points d'intersection de la courbe avec l'axe (Ox) sont les points : $\begin{cases} M(0) = A(0;0) \\ M(1) = C(2;0) \end{cases}$