

## TD 5 - Intégration (suite), courbes paramétrées

**Exercice 1** Soit  $\Gamma$  le chemin défini par  $x(t) = \sin(2t)$ ,  $y(t) = \cos(t)$  avec  $t$  variant de  $-\frac{\pi}{2}$  à  $\frac{\pi}{2}$ .

- a) Faire une étude rapide de la courbe  $\Gamma$ , et justifier que c'est bien un chemin fermé. On appelle  $S$  la surface englobée par  $\Gamma$ .
- b) Déterminer l'aire de  $S$ .
- c) Déterminer  $\iint_S x \, dx \, dy$

**Exercice 2** Calculer l'aire de la portion de plan délimitée par la courbe d'équation paramétrique

$$\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$$

(avec  $t$  variant de 0 à  $2\pi$ ) et l'axe des abscisses.

**Exercice 3** Soit  $A(2, 0)$  et  $B(-2, 0)$ ,  $\Gamma_1$  le demi-cercle supérieur de diamètre  $[AB]$ ,  $\Gamma_2$  le segment  $[AB]$ , ces deux chemins parcourus de  $A$  vers  $B$ .  $S$  la surface délimitée par  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ .

Soient

$$a = \int_{\Gamma_1} 4 \, dx + xy \, dy, \quad b = \int_{\Gamma_2} 4 \, dx + xy \, dy, \quad c = \iint_S y \, dx \, dy$$

- a) Calculer directement  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .
- b) Justifier pourquoi  $a = b + c$

**Exercice 4** Calculer

$$\iiint_D z^{x^2+y^2} \, dx \, dy \, dz \quad \text{où} \quad D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 1\}$$

**Exercice 5** Soit  $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x, 0 \leq y, x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$ .

Calculer  $\iiint_V xyz \, dx \, dy \, dz$ .

**Exercice 6** Soit  $V$  le volume défini par  $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$ .

- a) Calculer le volume de  $V$ .
- b) Calculer  $\iiint_V x^2 z \, dx \, dy \, dz$

**Exercice 7** On étudie la courbe définie par  $\gamma(t) = (3t^2 - 1, t^3 - 3t)$ .

- a) Déterminer d'éventuelles symétries de la courbe.
- b) Déterminer les points réguliers et biréguliers de la courbe.
- c) La courbe admet-elle des asymptotes ou des directions asymptotiques ?
- d) Après étude des variations, représenter la courbe.

**Exercice 8** Après étude, représenter les courbes paramétrées par :

1.  $\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$
2.  $\gamma(t) = (\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t)$
3.  $\gamma(t) = \left(\frac{t^2}{1+t^2}, \frac{t^3}{1+t^2}\right)$
4.  $\gamma(t) = (t^2 + t^4, t^2 - t^3)$
5.  $\gamma(t) = (\cos t, \sin^3 t)$
6.  $\gamma(t) = \left(2t + t^2, 2t - \frac{1}{t^2}\right)$
7.  $x(t) = \frac{1+t^2}{1-3t^2}, y(t) = tx(t)$
8.  $x(t) = \tan t, y(t) = \sin(2t)$
9.  $\gamma(t) = (3 \cos t - \cos 3t, 3 \sin t - \sin 3t)$
10.  $\gamma(t) = (\sin t, \cos^2 t (2 - \cos t))$